МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

**И.Е. Могилевский, М.А. Терентьев,
Н.Е. Шапкина**

Пособие для подготовки к тестированию по математическому анализу. II семестр. Часть 1

Москва
Физический факультет МГУ
2019

М о г и л е в с к и й И. Е., Т е р е н т ь е в М. А.,
Ш а п к и н а Н. Е.
Пособие по подготовки к тестированию по математическому анализу. II семестр. Часть 1 / Учебное пособие.
М.: Физический факультет МГУ, 2019.

Настоящее методическое пособие составлено на основе многолетнего опыта проведения семинарских занятий и тестирований по курсу математического анализа на физическом факультете МГУ. В первую очередь оно предназначено для подготовки к тестированию по математическому анализу на 1 курсе, что определяет выбор рассмотренных задач. Данное пособие никоим образом не претендует на полноту охвата всех задач курса, но способствует лучшему усвоению изучаемого материала.

Пособие может представлять интерес как для студентов и преподавателей физического ф-та МГУ, так и для более широкого круга читателей.

Рецензенты:
В.А. Газарян, к.ф.-м.н. научный сотрудник кафедры математического моделирования и информатики
Е.В. Лукашева, к.ф.-м.н. доцент кафедры общей физики

Могилевский Илья Ефимович
Терентьев Михаил Анатольевич
Шапкина Наталья Евгеньевна

ПОСОБИЕ ПО ПОДГОТОВКЕ К ТЕСТИРОВАНИЮ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. II СЕМЕСТР. ЧАСТЬ 1

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр.2

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Вычисление двойных пределов

Пусть $\{M\}$ — множество точек m-мерного координатного пространства $\mathbb{R}^m$, на котором задана функция $u = f(M)$. Пусть точка A — предельная точка множества $\{M\}$, то есть точка, в любой окрестности которой имеются точки $\{M\}$, отличные от A. Пусть $\rho(M, A)$ — расстояние между точками M и A. Напомним два определения предела функции многих переменных: по Коши и по Гейне.

Определение 1.1 *(по Коши) Число b называется пределом функции $u = f(M)$ при $M \to A$, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$, такое, что $\forall M \in \{M\}$, удовлетворяющей условию $0 < \rho(M, A) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.*

Определение 1.2 *(по Гейне) Число b называется пределом функции $u = f(M)$ при $M \to A$, если $\forall\{M_n\} \to A$, $M_n \neq A$, соответствующая последовательность $\{f(M_n)\} \to b$.*

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве $\{M\}$, которое содержит точки, сколь угодно удаленные от точки $O(0; 0; \ldots; 0)$.

Определение 1.3 *Число b называется пределом функции $f(M)$ при $M \to \infty$, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists R > 0$, такое, что $\forall M \in \{M\}$, удовлетворяющей условию $\rho(M, O) > R$, выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.*

Определение 1.4 *Последовательность точек $\{M_n\}$ назовем бесконечно большой, если $\forall A > 0$ $\exists N$ такой, что $\forall n > N$, $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\rho(M_n, O) > A$.*

Определение 1.5 *Число b называется пределом функции $f(M)$ при $M \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности точек $M_n \in \{M\}$ соответствующая последовательность значений функции $f(M_n)$ сходится к b ($\{f(M_n)\} \to$ $\to b$).*

В ряде случаев при вычислении предела функции нескольких переменных удается воспользоваться методами поиска предела функции одной переменной.

Пример 1.1. *Найдите предел, если он существует:*

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{\cos(xy) - 1}{y^2}.$$

Решение. Выражение под знаком предела определено на всей плоскости, за исключением оси Ox. Заметим, что $xy \longrightarrow 0$ и воспользуемся асимптотической формулой для $\cos(xy) = 1 - \frac{(xy)^2}{2} + o\left((xy)^2\right)$:

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{\cos(xy)-1}{y^2} = \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \left(x^2\right)\frac{\cos(xy)-1}{(xy)^2} = 9\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}.$$

Задача 1.2. *Найдите предел, если он существует:*

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{y}.$$

Ответ: 3.

Предел функции двух переменных $f(x,y)$ при $M(x;y)\to 0$ или $M(x;y)\to\infty$ часто удобно находить, переходя в полярную систему координат: $f(x,y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

Пример 1.3. *Найдите предел, если он существует:*

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Решение. Для решения задачи перейдем в полярную систему координат:

$$\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^4} = \frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{\rho}.$$

Воспользуемся принципом «двух полицейских»: если выполняется неравенство

$$f_1(\rho) \leqslant f(\rho,\varphi) \leqslant f_2(\rho)$$

для всех рассматриваемых значений φ и если $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} f_1(\rho) = A$ и $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} f_2(\rho) = A$, то $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} f(\rho,\varphi) = A$. Это соотношение верно и в случае $\rho\to\infty$.

В силу того, что $|\cos\varphi| \leqslant 1$ и $|\sin\varphi| \leqslant 1$, в данном примере удобно взять $f_1(\rho) = -\frac{1}{\rho}$, а $f_2(\rho) = \frac{1}{\rho}$. Так как $f_1\to 0$ и $f_2\to 0$ при $\rho\to\infty$, поэтому и

$$\frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{\rho} \to 0,$$

а, значит, и исходный предел равен нулю.
Ответ: 0.

Задача 1.4. *Найдите предел, если он существует:*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$$

Ответ: 0.

Пример 1.5. *Найдите предел, если он существует:*

$$\lim_{\substack{x\to -\infty\\ y\to -\infty}} \left(x^2+y^2\right) e^{x+y}.$$

Решение. Начнем с формулировки определения предела функции при $x \to -\infty$, $y \to -\infty$. Число b называется пределом функции $u = \left(x^2+y^2\right) e^{x+y}$ при $x \to -\infty$ и $y \to -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R < 0$ такое, что $\forall x < R$, $\forall y < R$ выполнено неравенство $\left|\left(x^2+y^2\right) e^{x+y} - b\right| < \varepsilon$. Преобразуем выражение под знаком предела следующим образом

$$\left(x^2+y^2\right) e^{x+y} = x^2 e^{x+y} + y^2 e^{x+y} \leqslant x^2 e^x + y^2 e^y.$$

Оба слагаемых в правой части неравенства стремятся к нулю при $x \to -\infty$ и $y \to -\infty$ соответственно, поэтому и предел их суммы будет равен нулю.

Ответ: 0.

Задача 1.6. *Найдите предел, если он существует:*

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x+y)e^{-(x+y)}$$

Ответ: 0.

Теперь рассмотрим случай, когда предел не существует.

Пример 1.7. *Найдите предел, если он существует:*

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{y^2-x^2-3xy}{x^2+4xy+5y^2}.$$

Решение. Перейдем в полярную систему координат:

$$\frac{y^2-x^2-3xy}{x^2+4xy+5y^2} = \frac{\rho^2\sin^2\varphi - \rho\cos^2\varphi - 3\rho\sin\varphi\rho\cos\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4\rho\sin\varphi\rho\cos\varphi + 5\rho^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi + 5\sin^2\varphi}.$$

Согласно определению предела функции многих переменных по Гейне на бесконечности предел данной функции должен существовать и быть одной и той же величиной для *любой* бесконечно большой последовательности точек (в нашем случае на плоскости). А в данной задаче последнее выражение будет иметь, вообще говоря, различные предельные значения для разных последовательностей точек с фиксированным φ ввиду независимости выражения от ρ. Следовательно, исходного предела не существует.

Задача 1.8. *Найдите предел, если он существует:*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{y^2+2xy+3y^2}.$$

Ответ: предел не существует.

Отметим, что при обосновании отсутствия предела достаточно найти хотя бы два «пути», при движении по которым к рассматриваемой точке на плоскости получаются разные значения пределов. Например, в задаче на вычисление предела

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{y^2-x^2-3xy}{x^2+4xy+5y^2}$$

можно рассмотреть путь по прямой $y=kx$, тогда получим

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y=kx}} \frac{k^2x^2-x^2-3xkx}{x^2+4xkx+5k^2x^2} = \lim_{\substack{x\to \infty\\ y=kx}} \frac{k^2-1-3k}{1+4k+5k^2} = \frac{k^2-1-3k}{1+4k+5k^2}.$$

Полученное выражение зависит от коэффициента k, следовательно, предела не существует.

Однако выбор определенного пути подходит для обоснования отсутствия предела, но не подходит для доказательства его существования, так как перебрать все пути не получится. Рассмотрим пример.

Пример 1.9. *Найдите предел, если он существует:*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^2x^3}{3x^6+5y^4}.$$

Если взять $y=kx$, то получим в пределе

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^2x^3}{3x^6+5y^4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{k^2x^2x^3}{3x^6+5k^4x^4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{k^2x}{3x^2+5k^4} = 0$$

при любом значении k. Однако если взять $y^2 = x^3$, то вдоль этой кривой получаем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y^2=x^3}} \frac{x^6}{3x^6+5x^6} = \frac{1}{8}.$$

Так как при стремлении переменных к нулю вдоль разных кривых получаем разные предельные значения, то предел исходной функции двух переменных не существует.

Задача 1.10. *Найдите предел, если он существует:*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^4+3y^2}.$$

Ответ: предел не существует.

Задачи для самостоятельного решения.

Найдите предел функции, если он существует. Если он не существует, обоснуйте это.

1.
$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2+y^2-5xy}{2x^2+4xy+3y^2}.$$

Ответ: предел не существует.

2.
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^3+x^3+3x^2y^2}{x^2+4xy+5y^2}.$$

Ответ: 0.

3.
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2-5xy}{2x^2+4xy+3y^2}.$$

Ответ: предел не существует.

4. Найдите предел, если он существует:

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ y\to 0}} \frac{\sin\left(\sqrt{x}\, y\right)}{y}.$$

Ответ: 2.

5.
$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(x^2+y^2\right) e^{-(x+y)}.$$

Ответ: 0.

6.
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^3}{x^2+y^6}.$$

Ответ: предел не существует.

§ 2. Вычисление частных производных

Пусть точка $M\,(x_1, x_2, ..., x_m)$ — внутренняя точка области определения функции $u = f\,(M)$. Рассмотрим частное приращение этой функции в точке $M(x_1; \ldots; x_m)$, соответствующее приращению Δx_k аргумента x_k:

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, ..., x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, ..., x_m) - \\ - f(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_m).$$

Определение 2.1 *Если существует*

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k},$$

то он называется частной производной функции $u = f\,(M)$ *в точке* M *по переменной* x_k *и обозначается* $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ *или* u_{x_k}.
Для того, чтобы найти частную производную с помощью правил формального дифференцирования, надо зафиксировать все переменные, кроме одной, и найти производную по этой оставшейся не фиксированной переменной.

С частными производными тесно связаны понятия дифференцируемости и дифференциала функции. В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться свойствами дифференцируемых функций, так что напомним здесь соответствующие определения.

Рассмотрим полное приращение функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ во внутренней точке $M(x_1; \ldots; x_m)$ области определения функции

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \ldots, x_m)$$

Определение 2.2 *Функция называется дифференцируемой в точке* $M(x_1; \ldots; x_m)$*, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде*

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m,$$

где A_i — некоторые числа, α_i $(i = 1, \ldots, m)$ — функции аргументов Δx_1, …, Δx_m, бесконечно малые при $\Delta x_1 \to 0$, …, $\Delta x_m \to 0$ и равные нулю при $\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_m = 0$.

Если функция $u = f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то она имеет в этой точке производные по всем переменным, при этом $A_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)$. Для таких функций можно определить понятие дифференциала.

Определение 2.3 *Дифференциалом (первым дифференциалом) функции $u = f(M)$ в точке M называется линейная относительно $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$ часть приращения функции в точке M:*

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\,\Delta x_m.$$

Дифференциалом независимой переменной x_i будем называть приращение этой переменной:

$$dx_i = \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Выражение для дифференциала функции в точке M запишется теперь так:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)dx_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j}(M)dx_j.$$

Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ имеет частную производную $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ в некоторой окрестности точки M. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ является функцией переменных $x_1, \ldots, x_m$, определенной в этой окрестности точки M.

Определение 2.4 *Если функция $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ имеет в точке M частную производную по переменной x_k, то есть существует $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ в точке M, то она называется второй частной производной (или частной производной 2-го порядка) функции u по переменным x_i, x_k в точке M.*

Для этой второй частной производной используются различные обозначения: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}(M)$, $u_{x_i x_k}(M)$, $f''_{x_i x_k}(M)$, $f_{x_i x_k}(M)$.

Если $k \neq i$, то частная производная 2-го порядка называется *смешанной* частной производной 2-го порядка.

Частные производные более высокого порядка вводятся по индукции: n-я частная производная (или частная производная n-го порядка) функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ по аргументам $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ $\ldots, x_{i_n}$ в точке M определяется равенством

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \right)$$

Если не все номера $i_1, \ldots, i_n$ равны друг другу, то эта частная производная называется смешанной частной производной n-го порядка.

Дифференциал n-го порядка функции $u = f(x_1, ..., x_m)$ определяется по рекуррентной формуле $d^n u = d\left(d^{n-1} u\right)$ при условии, что все предыдущие дифференциалы являются функциями только x_1, ..., x_m (dx_i рассматриваются как постоянные множители). Приращения независимых переменных dx_i при вычислении второго и последующих дифференциалов берутся теми же самыми, что и при вычислении первого дифференциала. При этом функция $f(M)$ предполагается достаточное число раз дифференцируемой (f называется дифференцируемой n раз в точке M, если все ее частные производные $(n-1)$-го порядка дифференцируемы в точке M).

Если ввести оператор дифференциала

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m,$$

то справедлива формула

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n u.$$

В частности,

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 u = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Пример 2.1. *Найдите частные производные первого и второго порядка функции $u(x, y) = y^2 \sin\left(x^3 y\right)$.*

Решение. Начнем с производных первого порядка.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \cos\left(x^3 y\right) \cdot 3x^2 y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\sin\left(x^3y\right) + y^2\cos\left(x^3y\right)\cdot x^3$$

Для того, чтобы найти производные второго порядка,надо взять производную первого порядка и продифференцировать ее по всем переменным по очереди. Сначала найдем вторую производную по переменной x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Тогда для рассматриваемой функции получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\cos(x^3y)\cdot 3x^2y\right) =$$

$$= y^2\left(-\sin\left(x^3y\right)\cdot 3x^2y\cdot 3x^2y + \cos\left(x^3y\right)6xy^2\right) =$$

$$= 6xy^3\cos\left(x^3y\right) - 9x^4y^4\sin\left(x^3y\right).$$

Аналогично вычисляем вторую производную по переменной y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\sin\left(x^3y\right) + 2y\cos\left(x^3y\right)x^3 + 2y\cos\left(x^3y\right)x^3 -$$

$$-y^2\sin\left(x^3y\right)\cdot x^6 = \cos\left(x^3y\right)\cdot 4x^3y + \sin\left(x^3y\right)\left(2 - x^6y^2\right).$$

Для того, чтобы найти смешанную производную $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$, нужно первую производную по y продифференцировать по переменной x. Отметим, что для дважды дифференцируемых функций смешанные производные равны: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

Итак,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y\sin(x^3y) + y^2\cos(x^3y)\cdot x^3\right) =$$

$$= 9x^2y^2\cos\left(x^3y\right) - 3y^3x^5\sin\left(x^3y\right).$$

Задача 2.2. *Найдите частные производные первого и второго порядка функции* $u(x,y) = x^2e^{xy^2}$.

Ответ: $u_x = \left(2x + x^2y^2\right)e^{xy^2}$; $u_y = 2yx^3e^{xy^2}$;
$u_{xx} = e^{xy^2}\left(2 + 4xy^2 + x^2y^4\right)$; $u_{yy} = e^{xy^2}2x^3\left(1 + 2xy^2\right)$;
$u_{xy} = e^{xy^2}\cdot 2x^2y(3 + xy^2)$.

Будьте внимательны при решении задач, наподобие следующей: важно правильно расставить скобки в выражении, задающем функцию.

Пример 2.3. *Найдите частные производные первого порядка функции* $u(x,y,z) = e^{\left(x^{(y^2 z)}\right)}$.

Решение. Будем дифференцировать функцию $u(x,y,z)$ как сложную функцию трех аргументов. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\left(x^{(y^2 z)}\right)} \cdot (y^2 z) \cdot x^{(y^2 z - 1)};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\left(x^{(y^2 z)}\right)} \cdot x^{(y^2 z)} \cdot 2yz \ln x; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = e^{\left(x^{(y^2 z)}\right)} \cdot x^{(y^2 z)} \cdot y^2 \ln x$$

Задача 2.4. *Найдите частные производные первого порядка функции* $u(x,y,z) = z^{(y^x)}$.

Ответ: $u_x = z^{(y^x)} \cdot \ln z \cdot y^x \ln y$; $u_y = z^{(y^x)} \cdot \ln z \cdot xy^{x-1}$; $u_z = y^x \cdot z^{(y^x - 1)}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ для функции $u = \cos \dfrac{xy}{x+y}$.

   Ответ: $-\left(\dfrac{x^2 y^2}{(x+y)^4} \cos \dfrac{xy}{x+y} + \dfrac{2xy}{(x+y)^3} \sin \dfrac{xy}{x+y}\right)$.

2. Найдите частные производные первого и второго порядка для функции $u(x,y) = y^{(x^2)}$

   Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^{(x^2)} 2x \ln y$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 y^{(x^2 - 1)}$;

   $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y^{(x^2)} \ln y \left(2x^2 \ln y + 1\right)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2(x^2 - 1) y^{(x^2 - 2)}$;

   $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2xy^{(x^2 - 1)} \left(1 + x^2 \ln y\right)$.

3. Найдите $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ для функции $u = z^{x^2 + y^2}$.

   Ответ: $2xz^{x^2 + y^2 - 1} \cdot 2x \left((x^2 + y^2) \ln z + 1\right)$.

4. Найдите $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$ для функции $u = z^{(x+1)^{y-1}}$.

   Ответ: $z^{(x+1)^{y-1}} \cdot (x+1)^{y-1} \ln(x+1) \left(1 + (x+1)^{y-1} \ln z\right)$.

§ 3. Производная по направлению и градиент

Пусть функция $u = f(M)$ определена в окрестности точки $M_0(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. С помощью единичного вектора $\vec{l}$ зададим в точке M_0 некоторое направление и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}$, коллинеарный вектору $\vec{l}$.

Определение 3.1 *Если существует* $\lim\limits_{M\to M_0} \dfrac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$, *то он называется производной функции $u = f(M)$ по направлению $\vec{l}$ и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0)$, где $M_0M = \left|\overrightarrow{M_0M}\right|$, если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ сонаправлен с $\vec{l}$, и $M_0M = -\left|\overrightarrow{M_0M}\right|$, если он направлен противоположно вектору $\vec{l}$.*

Дополнительно предположим, что функция $u = f(M)$ дифференцируема в точке M_0. Пусть единичный направляющий вектор $\vec{l}$ задан своими направляющими косинусами: $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Тогда производная по направлению $\vec{l}$ в точке M_0 есть

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Определение 3.2 *Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется* ***вектор***

$$\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}(M_0); \frac{\partial u}{\partial y}(M_0); \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\right\}.$$

Градиент функции задает направление ее наискорейшего роста.

Нетрудно видеть, что производную по направлению можно представить в виде скалярного произведения двух векторов:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\right).$$

Пример 3.1. *Найдите градиент функции $u = \sin\left(\pi \cdot x \cdot y^2 \cdot z^3\right)$ и ее производную по направлению $\vec{a} = \{2; 2; 1\}$ в точке $M_0(1; 1; 1)$.*

Решение. Градиент данной функции u равен

$$\operatorname{grad} u = \pi y^2 z^3 \cos\left(\pi \cdot x \cdot y^2 \cdot z^3\right)\vec{i} + 2\pi x y z^3 \cos\left(\pi \cdot x \cdot y^2 \cdot z^3\right)\vec{j} +$$

$$+ 3\pi x y^2 z^2 \cos\left(\pi \cdot x \cdot y^2 \cdot z^3\right)\vec{k}.$$

Единичный вектор, сонаправленный с $\vec{a}$, есть

$$\vec{l} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{4+4+1}} = \left\{\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}.$$

Производная функции u по заданному направлению в точке M_0 равна

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \pi y^2 z^3 \cos\left(\pi \cdot x \cdot y^2 \cdot z^3\right)\Big|_{M_0} \cdot \frac{2}{3} + \\ + 2\pi x y z^3 \cos\left(\pi \cdot x \cdot y^2 \cdot z^3\right)\Big|_{M_0} \cdot \frac{2}{3} + \\ + 3\pi x y^2 z^2 \cos\left(\pi \cdot x \cdot y^2 \cdot z^3\right)\Big|_{M_0} \cdot \frac{1}{3} = -\pi\left(\frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3}\right) = -3\pi.$$

Задача 3.2. *Найдите производную функции $u = e^{(x+y)z}$ в точке $M_0(1; -1; 1)$ по направлению $\vec{a} = \{-1; -2; 2\}$*
Ответ: -1.

Пример 3.3. *Найдите угол α между векторами градиента функции $u = x^2 + y^2 - z^3$ в точках $M_1(3; 0; 1)$ и $M_2\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$.*

Решение. Найдем $\operatorname{grad} u = \left\{2x; 2y; -3z^2\right\}$. Тогда $\vec{a} = \operatorname{grad} u|_{M_1} = \{6; 0; -3\}$ и $\vec{b} = \operatorname{grad} u|_{M_2} = \{0; 1; -3\}$.

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{9}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3}{5\sqrt{2}}.$$

Отсюда $\alpha = \arccos \dfrac{3}{5\sqrt{2}}$.

Задача 3.4. *Найдите угол α между векторами градиента функции $u = \ln\left(x^2 + yz\right)$ в точках $M_1(2; -1; 3)$ $M_2(-2; 3; -1)$.*
Ответ: $\arccos\left(-\dfrac{11}{13}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите производную функции $\cos\left(x + y^2 + z\right)$ по направлению вектора $\{1; 1; 1\}$ в точке $M(1; 2; 3)$.
   Ответ: $-\dfrac{6}{\sqrt{3}}\sin 8$.
2. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в точке $M(1; 1; 1)$, где $\vec{a} = \operatorname{grad}(x + 3y + 2z)$ и $\vec{b} = \operatorname{grad}\left(x^2 + 2y^2 + 3z^2\right)$.
   Ответ: $\arccos\dfrac{13}{14}$.

3. Найдите производную функции $u = \ln\left(2x + y^2 + z^3\right)$ в точке $M(2; -1; 1)$
а) по направлению вектора $\vec{a} = \{-1; 1; 1\}$;
б) по направлению вектора $\vec{b} = \{1; -1; 1\}$.
Ответ: а) $-\dfrac{1}{6\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{7}{6\sqrt{3}}$.
4. Найдите производную функции $\cos\left(x + y^2 + z\right)$ по направлению градиента функции $x + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}$ в точке $M(1; 2; 3)$.
Ответ: $-\dfrac{6}{\sqrt{3}}\sin 8$.
5. Найдите производную функции $u(x, y, z) = xy^2z^3$ в точке $(1; 1; 1)$ по направлению а) оси Ox; б) оси Oy; в) биссектрисы угла xOy при $z = 1$.
Ответ: а) 1; б) 2; в) $3\sqrt{2}$.

§ 4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то в точке $N_0\left(x_0; y_0; f(x_0, y_0)\right)$ существует касательная плоскость к поверхности $S = \left\{N\,(x, y, z) : z = f(x, y)\right\}$, являющейся графиком этой функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(M_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(M_0)\,(y - y_0) - (z - f(M_0)) = 0.$$

Вектор с координатами

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\,(M_0)\,; \frac{\partial f}{\partial y}\,(M_0)\,; -1\right\}$$

в точке N_0 поверхности S, называется вектором нормали к поверхности S в этой точке.

Пример 4.1. *Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности* $z = \sqrt{1 + x^2 + y^4}$ *в точке* $N_0\left(2\sqrt{2}\,; 2; 5\right)$.

Решение. Запишем вектор нормали к поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$:

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1\right\} = \left\{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^4}}; \frac{2y^3}{\sqrt{1 + x^2 + y^4}}; -1\right\}.$$

В точке N_0 этот вектор имеет координаты $\left\{\frac{2\sqrt{2}}{5}; \frac{16}{5}; -1\right\}$. Следовательно, уравнение плоскости

$$\left(x - 2\sqrt{2}\right)\frac{2\sqrt{2}}{5} + (y-2)\frac{16}{5} - (z-5) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2\sqrt{2}\,x + 16y - 5z - 15 = 0.$$

Ответ: $2\sqrt{2}\,x + 16y - 5z - 15 = 0$.

Задача 4.2. *Найдите уравнение плоскости, касательной к поверхности* $z = \operatorname{arctg}(2x+3y) - \frac{\pi}{4}$ *в точке* $N_0(0,5; 0; 0)$.

Ответ: $2x + 3y + \sqrt{2}\,z - 1 = 0$.

Пример 4.3. *Найдите угол* φ *между векторами нормали к поверхности* $z = \sqrt{1+xy}$ *в точках* $N_1(3;1;2)$ *и* $N_2(1;3;2)$.

Решение. Вектор нормали к поверхности в данной точке по определению совпадает с вектором нормали к касательной плоскости к поверхности в этой точке. Нормаль к касательной плоскости к поверхности $z = f(x,y)$ равна $\{z_x; z_y; -1\}$. Тогда в произвольной точке $N(x;y;z)$ вектор нормали к поверхности есть

$$\left\{\frac{y}{2\sqrt{1+xy}}; \frac{x}{2\sqrt{1+xy}}; -1\right\}.$$

Тогда в точках $N_1(3;1;2)$ и $N_2(1;3;2)$ векторы нормали равны $\vec{n}_1 = \left\{\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; -1\right\}$ и $\vec{n}_2 = \left\{\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; -1\right\}$ соответственно. Так как

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

и $|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = \frac{\sqrt{26}}{4}$, а $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{22}{16}$, то $\cos\varphi = \frac{11}{13}$.

Задача 4.4. *Найдите угол* φ *между векторами нормали к поверхности* $z = xy(x-y)$ *в точках* $N_1(1;-1;-2)$ *и* $N_2(-1;0;0)$.

Ответ: $\arccos\frac{4}{\sqrt{38}}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = 2x^2 + 5y^2$ в точке $(1;0;2)$.
   Ответ: $4x - z - 2 = 0$.

2. Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности $\pi \cdot z = \sin\left(\pi x + \pi y^2\right)$ в точке $\left(\frac{1}{6}; 1; -\frac{1}{2\pi}\right)$.

   Ответ: $\sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3}\,y + 2z + \frac{1}{\pi} - \frac{13\sqrt{3}}{6} = 0.$
3. Найдите острый угол между нормалями к поверхности $z = xy + x^2 + y^2$ в точках $(1; 0; 1)$ и $(0; 1; 1)$.

   Ответ: $\arccos\frac{5}{6}$.
4. Найдите острый угол между нормалями к поверхностям $z = xy + x^2 + y^2$ и $z = -xy + x^2 + y^2$в точке $(1; 0; 1)$.

   Ответ: $\arccos\frac{2}{3}$.

§ 5. Формула Тейлора

При решении задач на разложение функции нескольких переменных по формуле Тейлора с центром разложения в точке M_0 можно либо пользоваться общей формулой

$$u(M) = u(M_0) + du\big|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u\Big|_{M_0} + \frac{1}{3!}d^3u\Big|_{M_0} + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}d^nu\Big|_{M_0} + o\left(\rho^n(M, M_0)\right), \tag{5.1}$$

либо свести задачу к применению формулы Тейлора для функций одной переменной, возможно, после какой-либо замены. Второй подход, как правило, оказывается предпочтительным с точки зрения простоты вычислений, однако нужно внимательно следить за тем, чтобы все слагаемые нужного порядка были учтены, а старших порядков — отброшены. По теореме о единственности разложения результат разложения будет одинаковый.

Под многочленом Тейлора понимается правая часть формулы Тейлора (5.1) без остаточного члена.

Пример 5.1. *Найдите многочлен Тейлора для функции* $u = \ln(2 + x + y)$ *с центром разложения в точке* $M_0(0; 0)$ *до членов четвертого порядка. Вычислите значение многочлена в точке* $N(1; 3)$.

Решение. Введем новую переменную $z = x + y$, тогда

$$\ln(2 + x + y) = \ln(2 + z) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{z}{2}\right).$$

Для второго слагаемого в последнем выражении можно записать многочлен Тейлора 4-го порядка с центром разложения в точке $z = 0$:

$$P_4(z) = \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{4} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{8} - \frac{1}{4}\frac{z^4}{16}.$$

Ввиду линейности z как функции x и y после подстановки $z = x + y$ в $P_4(z)$ получим требуемый многочлен Тейлора для исходной функции. В точке $N(1;3)$ величина $z = 2$, и многочлен Тейлора имеет значение $\ln 2 + \dfrac{7}{12}$.

Задача 5.2. *Найдите многочлен Тейлора для функции* $u = \cos(2x + 3y)$ *с центром разложения в точке* $M_0(0;0)$ *до членов четвертого порядка. Вычислите значение многочлена в точке* $N(-1;1)$.

Ответ: $\dfrac{13}{24}$

Пример 5.3. *Найдите многочлен Тейлора для функции* $u = \ln\left(2 + x^2 + y^2\right)$ *с центром разложения в точке* $M_0(0;0)$ *до членов шестого порядка. Вычислите значение многочлена в точке* $N(1;2)$.

Решение. Введем новую переменную $z = x^2 + y^2$, тогда

$$\ln\left(2 + x^2 + y^2\right) = \ln(2 + z) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{z}{2}\right).$$

Поскольку z как функция x и y *однородна* и совпадает со своим собственным многочленом Тейлора второго порядка с центром разложения в точке $(0,0)$, для получения искомого многочлена Тейлора шестого порядка достаточно разложить полученное выражение по z в нуле до членов третьего порядка и подставить в него выражение для z:

$$P_3 = \ln 2 + \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2}\right)^3 =$$

$$= \ln 2 + \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\left(x^2 + y^2\right)^2}{4} + \frac{1}{3}\frac{\left(x^2 + y^2\right)^3}{8}.$$

Отметим, что если бы $z(x,y)$ не была однородной функцией переменных x, y, то выражение пришлось бы разложить по степеням z до членов 6 порядка (не забыв после подстановки $z = z(x,y)$ отбросить слагаемые со степенями x и y выше шестого порядка малости).

Значение найденного многочлена в точке N равно $\ln 2 + \dfrac{55}{12}$.

Задача 5.4. *Найдите многочлен Тейлора для функции* $u = \sqrt{3 + x^3 + y^3}$ *с центром разложения в точке* $M_0(0;0)$ *до членов шестого порядка. Вычислите значение многочлена в точке* $N(1;2)$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Пример 5.5. *Найдите многочлен Тейлора для функции* $u = e^{2x} \cdot \sin(2y)$ *с центром разложения в точке* $M_0(0;0)$ *до членов третьего порядка. Вычислите значение многочлена в точке* $N(1;2)$.

Решение. Запишем многочлены Тейлора $P_3(x)$ и $Q_3(y)$ до третьей степени переменной для функций e^{2x} и $\sin(2y)$ соответственно.

$$P_3(x) = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6}; \quad Q_3(y) = 2y - \frac{(2y)^3}{6}.$$

Запишем произведение многочленов $P_3(x)$ и $Q_3(y)$:

$$\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6}\right) \cdot \left(2y - \frac{(2y)^3}{6}\right).$$

Раскроем скобки в этом произведении и в соответствии с условием задачи оставим только слагаемые не выше третьей степени. Тогда многочлен Тейлора для функции $u(x,y) = e^{2x} \cdot \sin(2y)$ есть

$$2y + 4xy + 4x^2y - \frac{4y^3}{3}.$$

Значение найденного многочлена в точке $N(1;2)$ равно $\dfrac{28}{3}$.

Задача 5.6. *Найдите многочлен Тейлора для функции* $u = \ln(1+2x) \cdot \cos 2y$ *с центром разложения в точке* $M_0(0;0)$ *до членов четвертого порядка.*

Ответ: $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - 2xy^2 + x^2y^2$.

Пример 5.7. *Найдите многочлен Тейлора для функции* $u = y^{\arcsin x}$ *с центром разложения в точке* $M_0(0,5;1)$ *до членов второго порядка.*

Решение. Воспользуемся общей формулой

$$P_n(x,y) = u(M_0) + du\big|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u\Big|_{M_0} + \frac{1}{3!}d^3u\Big|_{M_0} + \ldots + \frac{1}{n!}d^nu\Big|_{M_0}.$$

В данной задаче нужно учесть только первые три слагаемых в правой части. Сначала найдем частные производные первого и второго порядка функции $u(x, y)$, чтобы получить

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

и

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

По правилам формального дифференцирования получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^{\arcsin x} \cdot \ln y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \arcsin x \cdot y^{\arcsin x - 1};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \ln y \left(y^{\arcsin x} \cdot \ln y \frac{1}{1-x^2} + y^{\arcsin x} \frac{x}{(\sqrt{1-x^2}\,)^3} \right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \arcsin x \cdot y^{\arcsin x - 1} \cdot \ln y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + y^{\arcsin x} \frac{1}{y\sqrt{1-x^2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \arcsin x(\arcsin x - 1) y^{\arcsin x - 2}.$$

Подставляя значения x и y в выражения для производных и учитывая, что $u\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 1$, $dx = x - 0,5$ и $dy = y - 1$, находим

$$P_2(x, y) = 1 + \frac{\pi}{6}(y-1) + \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 0,5)(y-1) + \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{6} - 1\right)(y-1)^2.$$

Задача 5.8. *Найдите многочлен Тейлора для функции* $u = \sin\left(y^2 x + \ln(xy) - 1\right)$ *с центром разложения в точке* $M_0(1; 1)$ *до членов второго порядка.*
Ответ: $2(x-1) + 3(y-1) - 0,5(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + 0,5(y-1)^2$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите многочлен Тейлора третьего порядка $P_3(x, y)$ для функции $u = \sin(2x - y)$ с центром разложения в точке $(0; 0)$. В ответе запишите значение $P_3(2, 3)$.
   Ответ: $\frac{5}{6}$.

2. Найдите многочлен Тейлора второго порядка $P_2(x, y)$ для функции $u = (x+y)^{x-y}$ с центром разложения в точке $(2; -1)$.
   Ответ: $1 + 3(x-2) + 3(y+1) + 4(x-2)^2 + 2(y+1)^2 + $ $+ 6(x-2)(y+1)$.
3. Найдите многочлен Тейлора третьего порядка $P_3(x, y)$ для функции $u = x^y$ с центром разложения в точке $(1; 0)$.
   Ответ: $1 + (x-1)y - \dfrac{(x-1)^2 y}{2}$.
4. Найдите многочлен Тейлора пятого порядка $P_5(x, y)$ для функции $u = y^2 \sin x + x \cos y$ с центром разложения в точке $(0; 0)$. В ответ запишите $P_5(1, 1) + \dfrac{1}{8}$.
   Ответ: $1,5$.
5. Найдите многочлен Тейлора второго порядка $P_2(x, y, z)$ для функции $u = \ln\left(xy + z^2\right)$ с центром разложения в точке $(1; 1; 0)$. В ответ запишите $P_2(2, 3, 1)$.
   Ответ: $1,5$.

§ 6. Локальный экстремум

Пусть функция $u = f(M)$, где $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена в некоторой окрестности точки M_0.

Определение 6.1 *Говорят, что $u(M)$ имеет в точке M_0 локальный минимум (максимум), если существует такая окрестность точки M_0, что для любой точки $M \neq M_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ $\big(f(M) < f(M_0)\big)$.*

Общее название для точек локального максимума и минимума — точки локального экстремума.

Теорема (необходимое условие экстремума) *Если функция $u = f(M)$ имеет экстремум в точке M_0 и в этой точке существует частная производная функции по переменной x_k, то эта частная производная $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M_0} = 0$.*

Следствие (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции) *Если дифференцируемая в точке M_0 функция $u = f(M)$ имеет экстремум в этой точке, то дифференциал функции равен нулю в точке M_0:*

$$du|_{M_0} = 0.$$

Точки, в которых первый дифференциал функции равен нулю, принято называть точками возможного экстремума дифференцируемой функции.

Теорема (достаточное условие экстремума дифференцируемой функции) *Пусть функция $u = f(M)$ дифференцируема в окрестности точки M_0 и дважды дифференцируема в точке M_0, причем это точка возможного экстремума. Тогда, если d^2u является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой в точке M_0, то в точке M_0 функция имеет локальный минимум (максимум). Если второй дифференциал в точке является знакопеременной квадратичной формой, то экстремума в этой точке нет.*

В точке, где первый и второй дифференциалы обращаются в нуль, либо функция не дифференцируема, также возможно наличие локального экстремума — в таких случаях требуется дополнительное исследование.

Пример 6.1. *Найдите, если они существуют, точки локального экстремума $M(x;y)$ для функции*

$$u(M) = x^2 + 2xy + y^3.$$

Если их несколько, выберите точку с наибольшим значением x и укажите в ответе значение $x^2 + y^2$ и тип экстремума.

Решение. Сначала найдем точки возможного экстремума. Отметим, что функция $u(M)$ дважды дифференцируема во всех точках области определения. Точки возможного экстремума — это точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума $du = 0$:

$$du = 2xdx + 2xdy + 2ydx + 3y^2dy = 0 \Longleftrightarrow$$
$$(2x + 2y)dx + \left(2x + 3y^2\right)dy = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 2y = 0, \\ 2x + 3y^2 = 0, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3}, \\ y = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Проверим выполнение достаточного условия знакопределенности второго дифференциала в обеих точках. Второй дифференциал функции $u(M)$ равен:

$$d^2u = 2dx^2 + 2dxdy + 2dydx + 6ydy^2 \Longleftrightarrow$$
$$d^2u = 2\left(dx^2 + 2dxdy + 3ydy^2\right).$$

В точке $M_1(0;0)$:

$$d^2u\big|_{M_1} = 2\left(dx^2 + 2dxdy\right) = 2(dx+dy)^2 - 2dy^2.$$

Очевидно, что второй дифференциал в точке M_1 не является знакоопределенной квадратичной формой. В точке $M_2\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$:

$$d^2u\big|_{M_2} = 2\left(dx^2 + 2dxdy + 2dy^2\right) = 2(dx+dy)^2 + 2dy^2.$$

В данном случае второй дифференциал является положительно определенной квадратичной формой, следовательно, в точке M_2 — минимум: $x^2+y^2 = \frac{4}{9}+\frac{4}{9} = \frac{8}{9}$.

Ответ: $\frac{8}{9}$, минимум.

Задача 6.2. *Найдите, если они существуют, точки локального экстремума $M(x;y)$ для функции $u(M) = x^3 + 3xy + 3y^2$. Если их несколько, выберите точку с наибольшим значением x и укажите в ответе значение x^2+y^2 и тип экстремума.*

Ответ: $\frac{5}{16}$, минимум.

Пример 6.3. *Найдите, если они существуют, точки локального экстремума $M(x;y)$ для функции $u(M) = e^{x+y}xy$. Если их несколько, выберите точку с наибольшим значением x и укажите в ответе значение x^2+y^2 и тип экстремума.*

Решение. Функция $u(M) = e^{x+y}xy$ всюду дифференцируема. Необходимым условием экстремума является $du = 0$:

$$du = 0 \Longleftrightarrow du = e^{x+y}(dx+dy)xy + e^{x+y}(xdy+ydx) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow e^{x+y}\left((x+1)ydx + (y+1)xdy\right) = 0.$$

Отсюда получаем два решения: $M_1(0;0)$ и $M_2(-1;-1)$ — две точки возможного экстремума. Проверим в каждой точке выполнение достаточных условий.

Точка $M_1(0;0)$:

$$d^2u\big|_{M_1} = e^{x+y}(dx+dy)((x+1)ydx + (y+1)xdy))\big|_{M_1} +$$

$$e^{x+y}\left(ydx^2 + (x+1)dxdy + (y+1)dxdy + xdy^2\right)\big|_{M_1} = 2dxdy.$$

Очевидно, что в точке M_1 второй дифференциал не является знакоопределенной квадратичной формой.

Точка $M_2(-1;-1)$:

$$\begin{aligned} d^2u\big|_{M_2} &= e^{x+y}(dx+dy)\left((x+1)ydx+(y+1)xdy\right)\big|_{M_2} + \\ &+ e^{x+y}\left(ydx^2+(x+1)dxdy+(y+1)dxdy+xdy^2\right)\big|_{M_2} = \\ &= e^{-2}\left(-dx^2-dy^2\right). \end{aligned}$$

В данном случае второй дифференциал является отрицательно определенной квадратичной формой, следовательно, в точке M_2 — максимум.

Ответ: $\left(x^2+y^2\right)\big|_{M_2}=2$, максимум.

Задача 6.4. *Найдите, если они существуют, точки $M(x;y)$ локального экстремума функции $u(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$. Если их несколько, выберите точку с наибольшим значением x и укажите в ответе значение x^2+y^2 и тип экстремума.*

Ответ: 0, минимум.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите, если они существуют, точки $M(x;y)$ локального экстремума функции $u=4(x-y)-x^2-y^2$. Если их несколько, выберите точку с наибольшим значением x и укажите в ответе значение x^2+y^2 и тип экстремума.
   Ответ: 8, максимум.
2. Найдите, если они существуют, точки $M(x;y)$ локального экстремума функции $u=x^2+y^2-8\ln(xy)$. Если их несколько, выберите точку с наименьшим значением x и укажите в ответе значение $x+y$ и тип экстремума.
   Ответ: -4, минимум.
3. Найдите, если они существуют, точки $M(x;y)$ локального экстремума функции $u=\left(x+y^2\right)e^{\frac{x}{2}}$. Если их несколько, выберите точку с наименьшим значением x и укажите в ответе значение $x+y$ и тип экстремума.
   Ответ: -2, минимум.
4. Найдите, если они существуют, точки $M(x;y)$ локального экстремума функции $u=(5-2x+y)\,e^{x^2-y}$. Если их несколько, выберите точку с наименьшим значением x и укажите в ответе значение $x+y$ и тип экстремума.
   Ответ: нет экстремума.
5. Найдите, если они существуют, точки $M(x;y)$ локального экстремума функции $u=\left(8x^2-6xy+3y^2\right)e^{2x+3y}$. Если их несколько, выберите точку с наименьшим значением x и укажите в ответе значение $x+y$ и тип экстремума.
   Ответ: 0, минимум.

§ 7. Неявные функции

Пусть задано уравнение

$$F(x, y) = 0,$$

и пусть для любого x из некоторого множества X это уравнение имеет решение относительно y (если решений несколько, то мы выбираем какое-то одно из них). Тогда уравнение определяет на X некоторую функцию $y(x)$. Такое задание функции называется неявным.

Теорема. *Пусть: $F(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности ω точки $M_0(x_0, y_0)$, производная $\dfrac{dF}{dy}$ непрерывна в точке M_0; $F(M_0) = 0$, $\left.\dfrac{dF}{dy}\right|_{M_0} \neq 0$. Тогда существует область $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$ внутри окрестности ω, в которой уравнение $F(x, y) = 0$ определяет единственную неявную функцию $y(x)$, дифференцируемую в области $|x - x_0| < d_1$.*

Аналогичную теорему можно сформулировать для неявной функции $x(y)$, поменяв ролями x и y. Точно так же, уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

может определять неявные функции $z(x, y)$, $y(x, z)$ и т.д. Вопрос о существовании, например, $z(x, y)$ решается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в некоторой окрестности ω точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$; пусть частная производная F_z непрерывна в точке M_0; $F(M_0) = 0$, $F_z(M_0) \neq 0$. Тогда существует область $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$, $|z - z_0| < d_3$ внутри окрестности ω, в которой уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет единственную неявную функцию $z(x, y)$, дифференцируемую в области $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$.*

Если требуется найти производную функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то есть два пути: либо выразить $y(x)$ из данного уравнения и искать производную по правилам для явно заданной функции, либо воспользоваться алгоритмом поиска производной неявно заданной функции.

Рассмотрим этот алгоритм. Так как функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы внутри окрестности ω, то, формально подставляя функцию $y(x)$ в уравнение $F(x, y) = 0$, получаем в области $|x - x_0| < d_1$ тождество

$$F(x, y(x)) \equiv 0,$$

которое можно дифференцировать в указанной области по правилам дифференцирования сложной функции:

$$F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x)) \cdot y'(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}.$$

Напомним, что в точке M_0 производная $F_y \neq 0$, а ввиду непрерывности F_y в этой точке $F_y \neq 0$ также и в области $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$ при достаточно малых d_1 и d_2 по теореме о сохранении знака непрерывной функции.

Для того, чтобы найти $y''(x)$, продифференцируем тождество два раза по x:

$$\frac{d}{dx}\left(F_x + F_y \cdot y'\right) \equiv 0 \Longleftrightarrow$$
$$F_{xx} + 2F_{yx} \cdot y' + F_{yy} \cdot y' \cdot y' + F_y \cdot y'' \equiv 0,$$

где для краткости мы опустили аргументы у функций. Отсюда

$$y'' = -\frac{F_{xx} + 2F_{yx} \cdot y' + F_{yy} \cdot y' \cdot y'}{F_y}.$$

Подставляя сюда выражение для y', полученное ранее, находим вторую производную как функцию от x и так далее. На практике удобнее не запоминать формулу, а реализовывать этот процесс для каждой конкретной функции. Как видно из полученных формул, производные неявно заданной функции выражаются через производные функции F, зависящие как от значений x, так и от значений y этой неявной функции.

Пример 7.1. *Найдите $y'(-1)$ и $y''(-1)$ для неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $3x^2y + y^2 = 1 + x^3$ и удовлетворяющей условию $y(-1) = -3$.*

Решение. Нетрудно проверить, что в достаточно малой окрестности точки $M_0(-1; -3)$ выполняются условия теоремы, и $y(x)$ есть решение уравнения

$$3x^2y + y^2 = 1 + x^3.$$

Тогда

$$3x^2 \cdot y'(x) + 6xy(x) + 2y(x) \cdot y'(x) = 3x^2 \Longleftrightarrow y'(x) = \frac{3x^2 - 6xy(x)}{3x^2 + 2y(x)}.$$

Поскольку $y(-1) = -3$, то $y'(-1) = \dfrac{3 - 18}{3 - 6} = 5$.

Найдем $y''(x)$. Для этого еще раз применим операцию дифференцирования:

$$\Big(\big(3x^2+2y(x)\big)\cdot y'(x)\Big)' = \big(3x^2-6xy(x)\big)' \Longleftrightarrow$$

$$(6x+2y'(x))\cdot y'(x) + \big(3x^2+2y(x)\big)\cdot y''(x) = 6x-6y-6xy'(x) \Longleftrightarrow$$

$$y''(x) = \frac{6(x-y)-y'(x)(12x+2y'(x))}{3x^2+2y(x)}.$$

Поскольку $y(-1)=-3$, $y'(-1)=5$, находим

$$y''(-1) = \frac{6(-1+3)-5(-12+10)}{3+2(-3)} = -\frac{22}{3}.$$

Задача 7.2. *Найдите $y'(-1)$ и $y''(-1)$ для неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $x^2-2xy+y^3+1=0$ и удовлетворяющей условию $y(0)=-1$.*

Ответ: $y'=-\dfrac{2}{3}$, $y''=-\dfrac{2}{3}$.

Пример 7.3. *Найдите $y'(1)+9y''(1)$ для неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $y^3+x^4=x^2y$ и удовлетворяющей условию $y(1)=1$.*

Решение. Пусть $y(x)$ представляет собой решение данного уравнения, тогда при подстановке оно обращается в тождество. Возьмем производную от левой и правой части полученного тождества, считая, что $y=y(x)$:

$$3y^2y' + 4x^3\ln y + \frac{x^4y'}{y} = 2xy + x^2y' \Longleftrightarrow$$

$$y'\left(3y^2+\frac{x^4}{y}-x^2\right) = 2xy-4x^3\ln y \Longleftrightarrow y' = \frac{2xy-4x^3\ln y}{3y^2+\dfrac{x^4}{y}-x^2}.$$

Отсюда $y'(1)=\dfrac{2}{3}$.

Вторую производную найдем как производную от первой производной, считая, как и ранее, что $y=y(x)$:

$$y'' = 2\frac{\left(y+xy'-6x^2\ln y-2\dfrac{x^3y'}{y}\right)}{3y^2+\dfrac{x^4}{y}-x^2} - $$

$$-2\frac{\left(xy-2x^3\ln y\right)\left(6yy'+4\dfrac{x^3}{y}-\dfrac{x^4y'}{y^2}-2x\right)}{\left(3y^2+\dfrac{x^4}{y}-x^2\right)^2}.$$

Отсюда $y''(1) = -\dfrac{26}{27}$. Тогда $y'(1) + 9y''(1) = -8$.

Задача 7.4. *Найдите $y'(0) + y''(0)$ для неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $(x-1)y = \ln y - e^{xy}$ и удовлетворяющей условию $y(0) = 1$.*
Ответ: 4.

Пример 7.5. *Найдите первый и второй дифференциалы функции $z(x,y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если функция задана уравнением*

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1, \tag{7.1}$$

$x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $y_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $z(x_0, y_0) = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Пусть $z = z(x,y)$ — решение уравнения (7.1). Тогда, подставляя это решение в (7.1), получаем тождество

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z(x,y) \equiv 1.$$

Возьмем дифференциал от левой и правой части полученного тождества, воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала:

$$-\sin 2x dx - \sin 2y dy - \sin 2z dz = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sin 2z dz = -\sin 2x dx - \sin 2y dy. \tag{7.2}$$

Отсюда находим первый дифференциал dz:

$$dz = -\frac{\sin 2x}{\sin 2z} dx - \frac{\sin 2y}{\sin 2z} dy \Longrightarrow dz|_{M_0} = -dx.$$

Для того, чтобы найти d^2z, возьмем дифференциал от тождества (7.2), считая, как и ранее, что $z = z(x,y)$:

$$\sin 2z d^2 z = -2\cos 2x dx^2 - 2\cos 2y dy^2 + 2\cos 2z dz^2 \Longrightarrow$$
$$d^2 z\big|_{M_0} = 2dy^2.$$

Ответ: $dz|_{M_0} = -dx$, $d^2z\big|_{M_0} = 2dy^2$.

Задача 7.6. *Найдите первый и второй дифференциалы функции $z(x,y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если функция задана уравнением*

$$\sin^2 x + \sin^2 y + z^4 = 2,$$

$x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $y_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $z(x_0, y_0) = 1$.

Ответ: $dz|_{M_0} = -\dfrac{1}{4}(dx + dy)$, $d^2z\big|_{M_0} = -\dfrac{3}{16}(dx+dy)^2$.

Пример 7.7. *Найдите* $z_x - 3z_{xy}$ *для функции* $z(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0; y_0)$, *если функция задана уравнением*

$$x^3 + y^2 + z^3 = 3, \tag{7.3}$$

$x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z(x_0, y_0) = 1$.

Решение. Пусть $z = z(x, y)$ — решение уравнения (7.3). Тогда, подставляя это решение в (7.3), получаем тождество

$$x^3 + y^2 + z^3 \equiv 3.$$

Возьмем дифференциал от левой и правой части полученного тождества, воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала:

$$3x^2dx + 2ydy + 3z^2dz = 0 \Longleftrightarrow dz = -\frac{x^2}{z^2}dx - \frac{2y}{3z^2}dy.$$

Отсюда находим $z_x|_{M_0} = -\left.\frac{x^2}{z^2}\right|_{M_0} = -1$, $z_y|_{M_0} = -\left.\frac{2y}{3z^2}\right|_{M_0} = -\frac{2}{3}$,

$$z_{xy} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{z^2}\right) = 2\frac{x^2}{z^3} \cdot z_y = -\frac{4}{3}\frac{x^2y}{z^5} \Longrightarrow z_{xy}|_{M_0} = -\frac{4}{3}.$$

Следовательно, $(z_x - 3z_{xy})|_{M_0} = 3$.

Задача 7.8. *Найдите* $2z_x + 4z_{xy}$ *для функции* $z(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0; y_0)$, *если функция задана уравнением*

$$xy + z^2 = 2,$$

$x_0 = -1$, $y_0 = -1$, $z(x_0, y_0) = 1$.

Ответ: -2.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите $2y'(0) + 3y''(0)$ для неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $xy - \ln(x + y) = 0$ и удовлетворяющей условию $y(0) = 1$.
   Ответ: 3.
2. Найдите $y'(-1)$ и $y''(-1)$ для неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $x^3 + y^2 = 2e^{x^3+y^2} + 2x$ и удовлетворяющей условию $y(-1) = 1$.
   Ответ: $y'(-1) = -\frac{5}{2}$, $y''(-1) = -\frac{29}{4}$.

3. Найдите производные первого и второго порядка в точке $M_0(x_0, y_0)$, если функция $z(x, y)$ задана уравнением

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 z = \frac{3}{4},$$

$x_0 = \dfrac{\pi}{3}$, $y_0 = \dfrac{\pi}{3}$, $z(x_0, y_0) = \dfrac{\pi}{6}$.

Ответ: $z_x\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right) = z_y\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$,

$z_{xx}\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right) = z_{yy}\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, $z_{xy}\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

§ 8. Образцы тестовых заданий

Вариант 1

1. Вычислите предел

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{3x^2+xy+2y^2}{x^2-xy-y^2}$$

A. 0 **B.** 3 **C.** -2 **D.** -6 **E.** Предел не существует

2. Найдите частные производные z_x, z_y и z_{yy} функции $z(x,y)=y\cdot x^2\sin\left(xy^2\right)$ в точке $M_0\left(1;\sqrt{\pi}\right)$:
A. $z_x=\sqrt{\pi}$; $z_y=2\pi$; $z_{yy}=2\sqrt{\pi^3}$
B. $z_x=\sqrt{\pi^3}$; $z_y=2\pi$; $z_{yy}=6\sqrt{\pi}$
C. $z_x=-\sqrt{\pi}$; $z_y=-2\pi$; $z_{yy}=-2\sqrt{\pi^3}$
D. $z_x=-\sqrt{\pi^3}$; $z_y=-2\pi$; $z_{yy}=-6\sqrt{\pi}$
E. $z_x=-\sqrt{\pi^3}$; $z_y=-\pi$; $z_{yy}=-6\sqrt{\pi}$

3. Найдите градиент функции $u=\sin^2\left(\pi\cdot x+\pi y^2+\pi z^2\right)$ в точке $M_0\left(0;\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ и укажите в ответе величину $\dfrac{|\mathrm{grad}u|}{\pi}$.
A. $\sqrt{2}$ **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 1 **E.** $\dfrac{\pi}{2}$

4. Найдите уравнение плоскости, касательной к поверхности $z=x^2y^2+\ln y$ в точке $M_0(2;1;4)$.
A. $4x+9y+z-21=0$ **B.** $2x+3y-z-3=0$
C. $4x+9y-z-13=0$ **D.** $2x+3y+z-11=0$
E. $9x+4y-z-18=0$

5. Найдите многочлен Тейлора четвертого порядка $P_4(x,y)$ для функции $u(M)=\cos y\cdot\ln\left(2x-x^2\right)$ с центром разложения в точке $(1;0)$. В ответе укажите значение $P_4(2,1)$.
A. 2 **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $-\dfrac{3}{2}$ **D.** -1 **E.** -2

6. Найдите, если они существуют, точки $M(x;y)$ локального экстремума функции $u = \left(x^2 - 2y^2\right) e^{x-y}$. Если их несколько, выберите точку с наименьшим значением x и укажите в ответе значение $x+y$ и тип экстремума.
A. -6, минимум **B.** -6, максимум **C.** нет экстремума
D. 0, максимум **E.** 0, минимум
7. Найдите значение выражения $z_x + z_y$ в точке $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ для неявной функции $z(x,y)$, заданной уравнением $\sin^2 x + \sin^2 y + \cos^2 z = 2$ и удовлетворяющей условию $z\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.
A. $\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** 2 **D.** -1 **E.** 0

Вариант 2

1. Вычислите предел
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to -2}} \frac{\sin\left(xy^2\right)}{x}$$
A. 0 **B.** 1 **C.** 4 **D.** $\frac{1}{4}$ **E.** Предел не существует

2. Найдите частные производные z_x, z_y и z_{xy} функции $z(x, y) = y \cdot x^{2y}$ в точке $M_0(2; 1)$.
A. $z_x = 4$; $z_y = 2 + 4\ln 2$; $z_{xy} = 4(1 + \ln 2)$
B. $z_x = 8$; $z_y = 8 + 4\ln 2$; $z_{xy} = 8\ln 2$
C. $z_x = 2$; $z_y = 4\ln 2$; $z_{xy} = 8 + 4\ln 2$
D. $z_x = 4$; $z_y = 4(1 + 2\ln 2)$; $z_{xy} = 8 + 4\ln 2$
E. $z_x = 4$; $z_y = 4 + 8\ln 2$; $z_{xy} = 8(1 + \ln 2)$

3. Найдите производную функции $u = \ln\left(x^3 + 3y^2 + z^3\right)$ по направлению $\vec{a} = \{2; -2; -1\}$ в точке $M_0(1; 1; 1)$.
A. $\frac{2}{5}$ **B.** $-\frac{3}{5}$ **C.** $-\frac{6}{5}$ **D.** $\frac{6}{5}$ **E.** $-\frac{9}{5}$

4. Найдите уравнение плоскости, касательной к поверхности $z = 2x^3y + y^2$ в точке $M_0(1; -1; -1)$.
A. $6x + z - 5 = 0$ **B.** $3x - 4y - z - 8 = 0$
C. $3x - 4y + z - 6 = 0$ **D.** $6x - z - 7 = 0$
E. $6x + y - z - 6 = 0$

5. Найдите многочлен Тейлора второго порядка $P_2(x, y)$ для функции $u(M) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ с центром разложения в точке $(1; 1)$. В ответе укажите $4 \cdot P_2(2, 1) - \pi$.
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** -2

6. Найдите, если они существуют, точки $M(x; y)$ локального экстремума функции $u = x^2 + y^2 - 32\ln(xy)$. Если их несколько, выберите точку с наибольшим значением x и укажите в ответе значение $x + y$ и тип экстремума.
A. нет экстремума **B.** 0, минимум **C.** 0, максимум
D. 8, минимум **E.** 8, максимум

7. Найдите первую и вторую производные неявной функции $y(x)$ при $x = 0$, заданной уравнением $(x - 1)y = \ln y - e^{xy}$

и удовлетворяющей условию $y(0) = 1$.
A. $y' = 1,\ y'' = 2$ **B.** $y' = -1,\ y'' = 2$ **C.** $y' = 1,\ y'' = 3$
D. $y' = 3,\ y'' = 1$ **E.** $y' = 2,\ y'' = -3$

Ключи к вариантам

Вариант 1: 1-E, 2-D, 3-A, 4-C, 5-D, 6-B, 7-E

Вариант 2: 1-C, 2-E, 3-B, 4-A, 5-B, 6-D, 7-C

Список литературы

1. В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин Математический анализ в вопросах и задачах. М: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
2. В.Ф. Бутузов. Лекции по математическому анализу. Часть 2. М.: Физический ф-т МГУ. 2014.
3. В.Ф. Бутузов, А.А. Быков, Н.Т. Левашова, Н.Е. Шапкина. Вопросы и задачи к экзамену по математическому анализу. (II семестр). М.: Физический ф-т МГУ. 2010.
4. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы Математического анализа. Ч. 1,2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
5. Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ, 2002.
6. И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. Задачи и упражнения по математическому анализу. Книга 1. М.: Высш. шк., 2000.