Глава 12. Криволинейные интегралы.

§1. Длина дуги кривой.

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Рассмотрим множество точек $\{M(x,y)\}$, координаты которых задаются уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \qquad (1)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$.

Если некоторая точка $M \in \{M\}$ соответствует нескольким значениям $t \in [\alpha,\beta]$, то такую точку назовём <u>кратной</u>.

Пусть различным значениям $t \in [\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки $M(x,y)$, т.е. мн-во $\{M(x,y)\}$ не содержит кратных точек. Тогда мн-во $\{M(\varphi(t), \psi(t))\}$ назовём <u>простой плоской незамкнутой кривой</u>. Переменную t назовем <u>параметром</u> и будем говорить, что <u>уравнения (1) задают кривую параметрически</u>.

Точки $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ и $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ назовем <u>граничными точками</u> или <u>концами</u> кривой. Саму кривую называют также <u>кривой AB</u> или <u>дугой AB</u>.

Если точки A и B совпадают, а остальные точки не являются кратными, то кривая называется <u>простой замкнутой кривой</u>.

<u>Примеры.</u> 1) $x = \cos t$, $y = \sin t$;

а) $0 \le t \le \pi$ — простая незамкнутая кривая (полуокружность),

б) $0 \le t \le 2\pi$ — простая замкнутая кривая (окружность),

в) $0 \le t \le 4\pi$ — непростая кривая (все её точки - двукратные, кроме точки $(1,0)$ — она трехкратная).

2) График непр. кривой ф-ии $y = f(x)$, $a \le x \le b$, можно рассматривать как простую незамкнутую кривую, записав её параметрические уравнения в виде

$$x = t, \quad y = f(t), \quad a \le t \le b.$$

Рассмотрим простую (замкнутую или незамкнутую) кривую, заданную ур-ием (1). Разобьем $[\alpha,\beta]$ на n частей точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta.$$

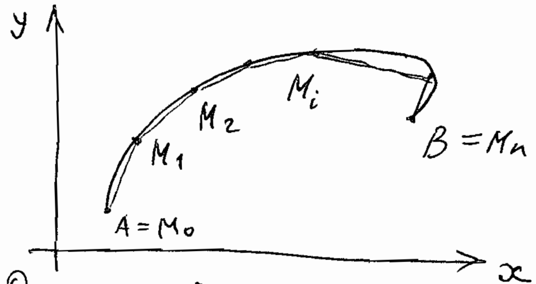


Рис. 12.1

Каждому значению t_i соответствует точка $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ на кривой (рис. 12.1). Впишем в кривую ломаную

$AM_1M_2\cdots B$.

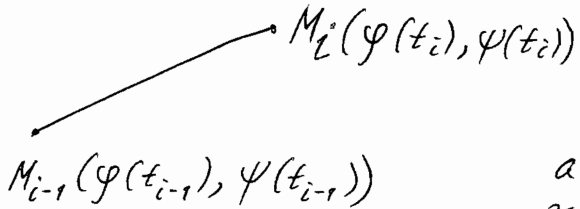


Рис. 12.2

Длина i-го звена ломаной равна

$$\Delta l_i = \sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2},$$

(рис. 12.2), а длина $l(t_i)$ всей ломаной выражается равенством

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2} \tag{2}$$

Пусть $\Delta t = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Определение. Число l наз-ся пределом длин ломаных $l(t_i)$ при $\Delta t \to 0$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, такое, что $\forall$ разбиения $[\alpha,\beta]$, у которого $\Delta t<\delta$, выполняется нер-во

$$0 \le l - l(t_i) < \varepsilon.$$

Если сущ-т $\lim\limits_{\Delta\to 0} l(t_i) = l$, то кривая наз-ся спрямляемой, а число l — длиной её дуги.

Теорема 1. Пусть простая кривая задана параметрически

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\quad \alpha \le t \le \beta \tag{1}$$

и пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на $[\alpha,\beta]$.

Тогда кривая спрямляема и длина l её дуги выражается формулой

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \tag{3}$$

а) Доказательство "на пальцах" (рис. 12.3).

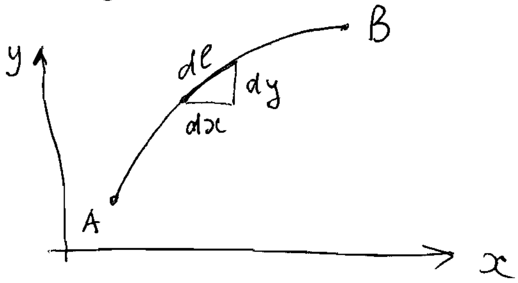


Рис. 12.3

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt,$$
$$dy = d\psi(t) = \psi'(t)dt,$$
$$dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt,$$

поэтому $\quad l = \int_\alpha^\beta dl = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$

б) "Аккуратное" док-во.

Нужно доказать, что [$\lim\limits_{\Delta\to 0} l(t_i) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$ (4)]

Длина ломаной $l(t_i)$ выражается формулой (2). По формуле Лагранжа конечных приращений имеем:

$$\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i)\Delta t_i\,, \quad \xi_i\in[t_{i-1},t_i],$$
$$\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}) = \psi'(\xi_i^*)\Delta t_i, \quad \xi_i^*\in[t_{i-1},t_i].$$

Следовательно,

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i^*)}\,\Delta t_i\,.$$

Введём функцию $f(t) = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$. Она непрерывна и, сл-но, интегрируема на $[\alpha,\beta]$. Интегральная сумма этой функции, соответствующая разбиению $[\alpha,\beta]$ на частичные сегменты $[t_{i-1},t_i]$ и выбору точек ξ_i в качестве промежуточных точек, имеет вид

$$I(t_i,\xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\,\Delta t_i\,.$$

По определению определенного интеграла

$$\lim_{\Delta\to 0} I(t_i,\xi_i) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \qquad (5)$$

В силу (5) для док-ва (4) достаточно доказать, что

$$\lim_{\Delta\to 0}\left(l(t_i)-I(t_i,\xi_i)\right)=0.$$

Для этого понадобится вспомогательное (алгебраическое) неравенство

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\le|b-c|. \qquad (6)$$

Геометрическое док-во справедливости неравенства (6) представлено на рисунке 12.4.

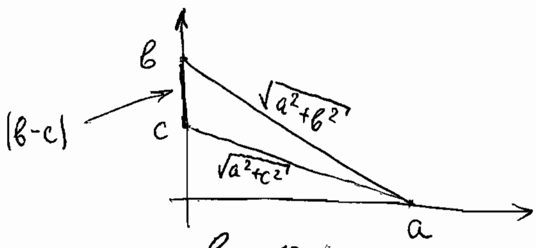


Рис. 12.4

Согласно не-ву треугольника

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\le|b-c|.$$

Используя не-во (6), а также выражения для $l(t_i)$ и $I(t_i,\xi_i)$, получаем

$$\left|l(t_i)-I(t_i,\xi_i)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i^*)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\right)\Delta t_i\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left|\psi'(\xi_i^*)-\psi'(\xi_i)\right|\cdot\Delta t_i .$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon>0$. Т.к. $\psi'(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то $\exists\,\delta>0$, такое, что при $\Delta t_i<\delta$ будет выполнено не-во

$$\left|\psi'(\xi_i^*)-\psi'(\xi_i)\right|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}.$$

Следовательно, при $\Delta t_i<\delta$, $i=1,2,\dots,n$ (т.е. при $\Delta<\delta$) выполняется не-во

$$\left|l(t_i)-I(t_i,\xi_i)\right|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(l(t_i)-I(t_i,\xi_i)\right)=0$. Теорема 1 доказана.

Следствия. ① Возьмём на кривой AB произвольную точку $C(\varphi(\gamma),\psi(\gamma))$, $\gamma\in(\alpha,\beta)$ (рис. 12.5). Тогда

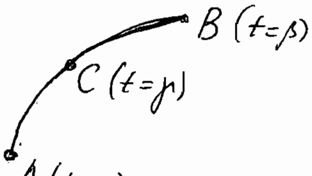


Рис. 12.5

$$l_{AC}=\int_\alpha^\gamma\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt,\quad l_{CB}=\int_\gamma^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt,\quad l_{AB}=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Т.к. $\int_\alpha^\gamma+\int_\gamma^\beta=\int_\alpha^\beta$, то $l_{AC}+l_{CB}=l_{AB}$. Это св-во наз-ся аддитивностью длины дуги.

② Пусть кривая задана в прямоуг. системе координат уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, причем ф-я $f(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную производную $f'(x)$.

Перейдём к параметрическим уравнениям кривой:

$$x = t\,,\ y = f(t),\quad a \le t \le b$$

в которой нужно положить $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = f(t)$, по формуле (3), получаем:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\,dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,.$$

③ Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах

$$r = r(\varphi),\quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \text{ (рис. 12.6)},$$

причём ф-я $r(\varphi)$ имеет на $[\varphi_1, \varphi_2]$ непр. производную $r'(\varphi)$.

Переходя к декартовым координатам, получаем уравнение кривой в параметрической форме (φ – параметр):

$$x = r(\varphi)\cos\varphi,\quad y = r(\varphi)\sin\varphi,\quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2.$$

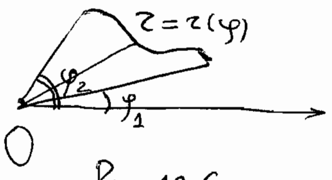


Рис. 12.6

Т.к. $x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$, $y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$, то, применяя ф-лу (3), получаем

$$\ell = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)}\,d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

④ Если кривая задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \varphi(r)$, $r_1 \le r \le r_2$, то

$$\ell = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2\varphi'^2(r)}\,dr$$ (вывести эту формулу самостоятельно).

<u>Примеры.</u> 1) $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

(окружность радиуса R с центром в начале координат).

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,dt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

2) $r = R = \text{const} > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ (та же окружность, но заданная уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi) = R$).

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0}\,d\varphi = R\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R.$$

3) $y = x^2,\ 0 \le x \le 1$ (часть параболы).

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx = \left[x\sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}} + \tfrac{1}{4}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}}\right)\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5}).$$

<u>Замечание о пространственной кривой.</u>

Простая пространственная кривая определяется как множество точек $\{M(x, y, z) : x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t),\ \alpha \le t \le \beta\}$, где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ — непрерывные функции на сегменте $[\alpha, \beta]$, причём множество $\{M(x, y, z)\}$ не содержит кратных точек.

Понятие длины дуги вводится таким же образом, как и для плоской кривой, и получается формула

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,dt.$$

<u>Пример.</u> $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = ht$ — винтовая линия.

Пусть $0 \le t \le 2\pi$ (один виток), тогда

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + h^2}\,dt = 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}.$$

~~Глава XII. Криволинейные интегралы~~

§2. Криволинейные интегралы 1 рода.

Пусть L – простая спрямляемая кривая (на плоскости), заданная параметрически

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\le t\le\beta. \qquad (1)$$

(т.е. $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непр. ф-ции на $[\alpha,\beta]$ и различным значениям t соответствуют различные точки $M(\varphi(t),\psi(t))$; если $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=B(\varphi(\beta),\psi(\beta))$, то кривая – замкнутая).

Пусть на кривой L задана огранич. ф-я $z=f(x,y)$.

Разобьём $[\alpha,\beta]$ на n частей точками $\alpha=t_0<t_1<\dots<t_n=\beta$.

При этом кривая L разобьётся на n частей точками $A=M_0, M_1,\dots,M_n=B$ (рис. 12.7). Точка M_i имеет коорд. $(\varphi(t_i),\psi(t_i))$.

Пусть Δl_i – длина дуги $M_{i-1}M_i$, $\Delta l=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$.

Выберем на каждой дуге $M_{i-1}M_i$ какую-нибудь точку $K_i(\xi_i,\eta_i)$ и составим интегральную сумму

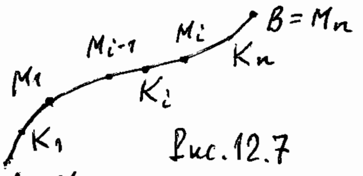


Рис. 12.7

$$I(M_i,K_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i.$$

Предел инт. сумм $I(M_i,K_i)$ при $\Delta l\to 0$ (если он сущ-т) наз-ся <u>криволинейным интегралом 1 рода</u> от ф-ции $f(x,y)$ по кривой L и обозначается

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl \quad \text{или} \quad \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl.$$

Из этого определения следует, что $\int\limits_L f\,dl$ не зависит от того, в каком направлении пробегается кривая L, т.е. $\int\limits_{AB} f\,dl=\int\limits_{BA} f\,dl$.

(С.м.н.2.)

Вычисление криволинейных интегралов 1 рода с помощью определённых интегралов.

Теорема 2. Пусть

① простая кривая L задана параметрически

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\le t\le\beta, \qquad (1)$$

и пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на $[\alpha,\beta]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, одновременно не равные нулю, т.е. $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$ (в таком случае кривая L наз-ся гладкой);

② функция $f(x,y)$ непрерывна вдоль кривой L.

Тогда

криволинейный интеграл $\int_L f(x,y)\,dl$ существует

и справедливо равенство

$$\int_L f(x,y)\,dl=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \qquad (2).$$

Док-во. Разобьем $[\alpha,\beta]$ на n частичных сегментов точками $\alpha=t_0<t_1<\dots<t_n=\beta$.

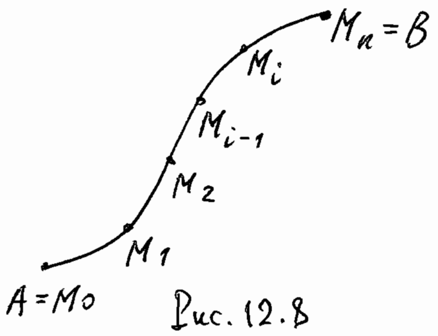


Рис. 12.8

При этом кривая L разобьётся на частичные дуги точками $A=M_0, M_1,\dots,M_n=B$, (рис. 12.8), где $M_i=(\varphi(t_i),\psi(t_i))$. Введём обозначения:

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1},\quad \Delta t=\max_{1\le i\le n}\Delta t_i,$$

$$\Delta l_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \text{ — длина } i\text{-й частичной дуги},$$

$$\Delta l=\max_{1\le i\le n}\Delta l_i.$$

Отметим, что $\Delta l\to 0$ при $\Delta t\to 0$ (это очевидно), и обратно, $\Delta t\to 0$ при $\Delta l\to 0$ (это следует из того, что $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\ge\min\limits_{[\alpha,\beta]}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}=m>0$ и поэтому $\Delta l_i\ge m\cdot\Delta t_i$; следовательно, $\Delta t_i\le\frac{\Delta l_i}{m}$ и $\Delta t\le\frac{\Delta l}{m}$).

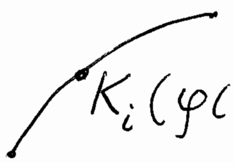


Рис. 12.9

На каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ возьмём произвольным образом точку $K_i(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))$ (рис. 12.9) и составим интегральную сумму

$$I(M_i,K_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\,\Delta l_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Требуется доказать, что $\lim I(M_i,K_i)$ при $\Delta l\to 0$ (или, что то же самое, при $\Delta t\to 0$) существует и равен опр. интегралу $I=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$.

Представим интеграл I в виде

$$I=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

и рассмотрим разность

$$I(M_i,K_i)-I=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Big[f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))-f(\varphi(t),\psi(t))\Big]\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \qquad (3)$$

Нам нужно доказать, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(I(M_i,K_i)-I\right)=0,$$

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, такое, что $\forall$ разбиения $[\alpha,\beta]$, у которого $\Delta t<\delta$, и $\forall$ выбора точек K_i выполняется не-во

$$|I(M_i,K_i)-I|<\varepsilon.$$

Ф-я $f(\varphi(t), \psi(t))$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и, сл-но, равномерно непр. на этом сегменте. Поэтому $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что если $\Delta t < \delta$, то $\forall \tau_i$ и $t \in [t_{i-1}, t_i]$ выполняется неравенство

$$\left| f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t)) \right| < \frac{\varepsilon}{\ell},$$

где $\ell = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$ — длина кривой L.

Из (3) получаем; что если $\Delta t < \delta$, то

$$\left| I(M_i, K_i) - I \right| < \frac{\varepsilon}{\ell} \underbrace{\sum_{i=1}^n \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt}_{\ell} = \varepsilon,$$ что и требовалось доказать.

Замечания.

1. Выражение $d\ell = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$ представляет собой дифференциал функции $\ell(t) = \int\limits_\alpha^t \sqrt{\varphi'^2(s) + \psi'^2(s)}\, ds$, которая называется переменной дугой и при каждом $t \in [\alpha, \beta]$ равна длине дуги кривой AM, где $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$, $M(\varphi(t), \psi(t))$.

Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$ (в декартовых координатах), причем ф-я $y(x)$ имеет непрерывную производную $y'(x)$ на $[a, b]$, то

$$d\ell = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx,$$

$$\int\limits_L f(x, y)\, d\ell = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

Если кривая L задана в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, причем $r(\varphi)$ имеет непр. производную $r'(\varphi)$, то $d\ell = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi$ и

$$\int\limits_L f(x, y)\, d\ell = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

2. Непрерывная кривая, состоящая из конечного числа гладких кривых, наз-ся кусочно гладкой (рис. 12.10).

Рис. 12.10

Если кривая L — кусочно гладкая, а функция $f(x,y)$ — кусочно непрерывная вдоль кривой L, то формула (2) остаётся в силе.

3. Криволинейные интегралы 1 рода обладают такими же свойствами, как и определенные интегралы (линейность, аддитивность, оценка по модулю, формула среднего значения).

4. Криволинейные интегралы 1 рода в пространстве вводятся аналогично тому, как это сделано для плоскости. Если

$$L=\{(x,y,z):\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t),\ \alpha\le t\le\beta\}\ -$$

— кусочно гладкая кривая в пространстве, то

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt.$$

Примеры. 1. $\int\limits_L x\,dl$, где L (кривая) (задана уравнением) $y=x^2$, $0\le x\le 1$.

$$\int\limits_L x\,dl=\int\limits_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\dots=\frac{1}{12}(5\sqrt5-1).$$

2. $\int\limits_L xy\,dl$, где L (дуга эллипса) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x\ge0$, $y\ge0$ (рис. 12.11).

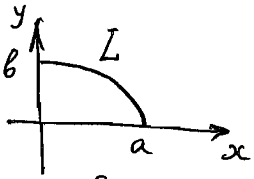


Рис. 12.11

Запишем уравнение L в параметрическом виде:

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$\int\limits_L xy\,dl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos t\sin t\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2t}\,dt=\dots=\frac{ab(a^3-b^3)}{3(a^2-b^2)}.$$

§3. Криволинейные интегралы 2 рода.

Пусть L: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$ — простая незамкнутая спрямляемая кривая, на которой заданы две функции: $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

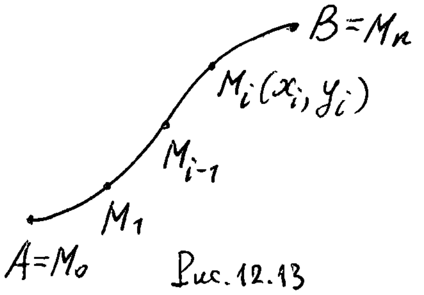


Рис. 12.13

Разобьем сегмент $[\alpha,\beta]$ на n частичных сегментов точками $\alpha=t_0<t_1<\dots<t_n=\beta$. Кривая L разобьётся при этом на n частичных дуг точками $A=M_0, M_1, \dots, M_n=B$ в направлении от A к B (рис. 12.13). Обозначим координаты точки M_i через (x_i, y_i) $(x_i=\varphi(t_i), y_i=\psi(t_i))$ и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, Δl_i — длина дуги $M_{i-1}M_i$, $\Delta l = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$.

На каждой частичной дуге ($M_{i-1}M_i$) возьмём произвольным образом точку $K_i(\xi_i,\eta_i)$ и составим две интегральные суммы следующего вида:

$$I_1(M_i,K_i)=\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i\,,\quad I_2(M_i,K_i)=\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\,.$$

Если сущ-т $\lim\limits_{\Delta l\to 0} I_k(M_i,K_i)=I_k$, то он наз-ся криволинейным интегралом 2 рода и обозначается так:

$$I_1=\int\limits_{AB}P(x,y)\,dx\,,\quad I_2=\int\limits_{AB}Q(x,y)\,dy\,.$$

Сумма $I=I_1+I_2=\int\limits_{AB}P\,dx+Q\,dy$ наз-ся общим криволинейным интегралом 2 рода

Из определения следует, что криволинейный интеграл 2 рода зависит от того, в каком направлении пробегается кривая L, т.е. от того, какая из точек A и B считается начальной, а какая конечной. Если двигаться от B к A, то все Δx_i и Δy_i в интегральных суммах изменят знак и, сл-но, интегралы также изменят знак, т.е.

$$\int\limits_{AB} P\,dx = -\int\limits_{BA} P\,dx, \quad \int\limits_{AB} Q\,dy = -\int\limits_{BA} Q\,dy.$$

Физический пример.

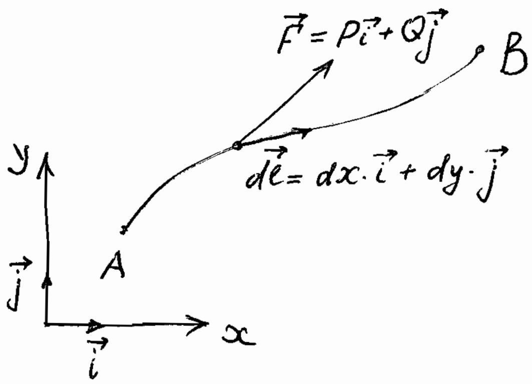


Рис. 12.14

Пусть материальная точка движется по кривой AB из т. A в т. B под действием силы $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ (рис. 12.14). Тогда $(\vec{F}\cdot d\vec{l}) = P\,dx + Q\,dy$ — работа силы при перемещении точки на вектор $d\vec{l} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j}$, а

$$\int\limits_{AB} (\vec{F}\,d\vec{l}) = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$$ — работа силы при перемещении точки по кривой AB из точки A в точку B.

Вычисление криволин. интегралов 2 рода с помощью определенных интегралов.

Теорема 3. Пусть 1) гладкая (незамкнутая) кривая AB задана уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$,

2) функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вдоль кривой AB.

Тогда криволинейные интегралы 2 рода от ф-ий P и Q сущ-т и справедливы равенства

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = \int_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \quad \int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta Q(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Док-во теоремы 3 аналогично док-ву теоремы 2.

Замечания. 1. Если гладкая кривая AB задана в декартовых координатах уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, $A = (a, y(a))$, $B = (b, y(b))$, (слово "гладкая" означает, что ф-я $y(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную производную $y'(x)$), то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x)\right] dx. \quad (2)$$

2. Если L — замкнутая кривая (замкнутый контур), то есть точки A и B совпадают, то криволинейный интеграл 2 рода по кривой L вводится так же, как и для незамкнутой кривой, но только теперь в обозначении $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ не отражено, в каком направлении пробегается кривая. Договоримся считать положительным то направление обхода замкнутого контура, при котором область, лежащая внутри контура, остаётся слева по отношению к движущейся по контуру точке (рис. 12.15). Интеграл по замкнутому контуру L в положительном направлении обозначается так:

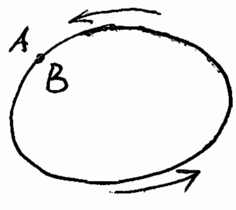


Рис. 12.15

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy.$$

3. Криволинейные интегралы 2 рода в пространстве вводятся аналогично интегралам на плоскости.

Кривая AB: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$;

$$I = \int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_\alpha^\beta \left[P(\varphi,\psi,\chi)\varphi' + Q\psi' + R\chi'\right] dt.$$

Интеграл I записывается также в виде:

$$I = \int\limits_{AB} (\vec{F}\, d\vec{l}\,), \text{ где } \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},\ d\vec{l} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k},$$

$(\vec{F}\, d\vec{l}\,)$ — скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $d\vec{l}$, и называется <u>циркуляцией</u> векторного поля $\vec{F}$ вдоль кривой AB.

Примеры. 1. $-\frac{1}{2}\oint\limits_L y\,dx - x\,dy$, где L — эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Перейдем к параметрическим уравнениям эллипса:

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi,$$

и воспользуемся формулами (1):

$$-\frac{1}{2}\oint\limits_L y\,dx-x\,dy=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[b\sin t\,(-a\sin t)-a\cos t\,(b\cos t)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\pi ab \overset{O}{=} S_{эл}$$ (площадь фигуры, ограниченной эллипсом).

В следующем параграфе будет выведена формула Грина, из которой, в частности, следует, что если плоская фигура G ограничена кусочно гладким контуром L (рис. 12.16), то

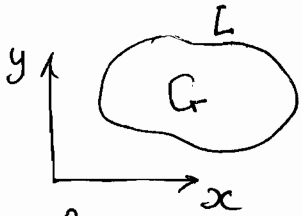


Рис. 12.16

$$\underbrace{S(G)=\frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy-y\,dx}$$

2. Вычислить $I=\int\limits_{AB}2xy\,dx+x^2dy$ по трём кривым, соединяющим точки $A(0,0)$ и $B(1,1)$ и изображенным на рисунке 12.17.

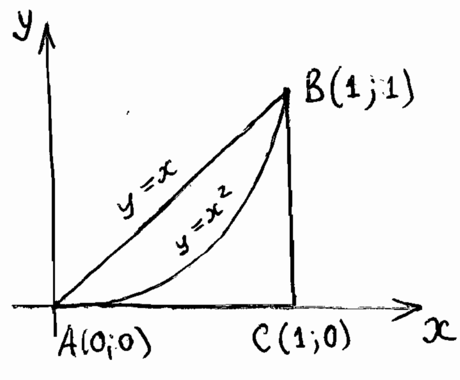


Рис. 12.17

Воспользуемся формулой (2):

1) $y=x$, $\quad I_1=\int_0^1 2x\cdot x\,dx+x^2\cdot dx=\int_0^1 3x^2dx=x^3\Big|_0^1=1$;

2) $y=x^2$, $\quad I_2=\int_0^1 2x\cdot x^2dx+x^2\cdot 2x\,dx=\int_0^1 4x^3dx=x^4\Big|_0^1=1$;

3) ломаная ACB $\quad I_3=\int_0^1 2x\cdot 0\cdot dx+\int_0^1 1^2\cdot dy=1$.

Таким образом, $I_1=I_2=I_3$.

Это не случайно! Можно доказать, что значение интеграла I не зависит от кривой, соединяющей точки A и B. Как это доказать и в каких случаях интеграл не зависит от пути интегрирования — об этом пойдёт речь в § 4.

Связь между криволинейными интегралами 1 и 2 рода.

Пусть (гладкая) кривая (AB) задана (в декартовых координатах) уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$. ~~кривая $y=y(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную производную~~ Обозначим через $\alpha(x)$ угол между направлением касательной к кривой в т. $M(x, f(x))$ и осью Ox.

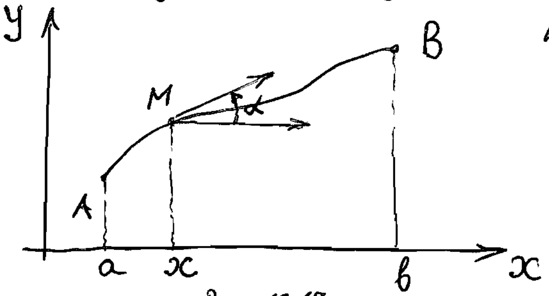


Рис. 12.18

Направление касательной выберем в соответствии с направлением движения по кривой (рис. 12.18):

при движении от A к B: $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$tg\alpha = y'(x), \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}, \quad \sin\alpha = \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}};$$

при движении от B к A: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $tg\alpha = y'(x)$,

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}, \quad \sin\alpha = -\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}.$$

Рассмотрим два криволинейных интеграла:

$$\underbrace{\int_{AB} P(x,y)\,dx}_{\text{Криволин. интеграл 2 рода}} = \int_a^b P(x, y(x))\,dx; \quad \underbrace{\int_{AB} P(x,y)\cos\alpha\,dl}_{\text{Криволин. интеграл 1 рода}} = \int_a^b P(x,y(x)) \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}}_{\cos\alpha} \cdot \underbrace{\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx}_{dl} = \int_a^b P(x,y(x))\,dx.$$

Из написанных равенств следует, что

$$\boxed{\int_{AB} P(x,y)\,dx = \int_{AB} P(x,y)\cos\alpha\,dl}$$

Аналогично: $$\boxed{\int_{AB} Q(x,y)\,dy = \int_{AB} Q(x,y)\sin\alpha\,dl}$$

Таким образом, $$\boxed{\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,dl}$$ — формула, связывающая криволин. инт. 1 и 2 рода.

Если ввести векторы $\vec{F}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$ и $\vec{\tau} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ — единичный вектор направленной касательной к кривой, то полученную ф-лу можно записать так: $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AB} (\vec{F}\vec{\tau})\,dl$.

Аналогичные формулы имеют место для криволинейных интегралов по пространственной кривой AB:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl = \int_{AB} (\vec{F}\cdot\vec{\tau})\,dl,$$

где $\vec{F} = \{P, Q, R\}$, $\vec{\tau} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — ед. вектор направленной касательной к кривой.

§4. Формула Грина.

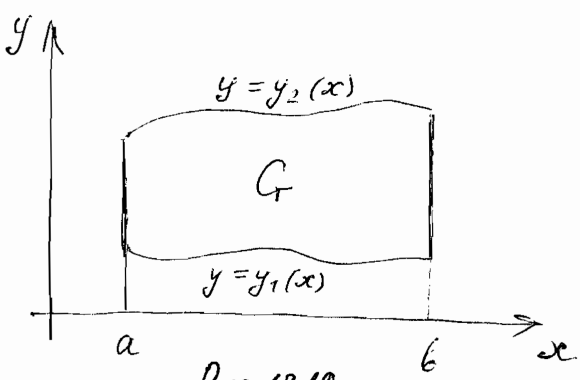


Рис. 12.19

Пусть $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ $(a \le x \le b)$ — уравнения двух кусочно гладких кривых в декартовых координатах, $y_1(x) \le y_2(x)$. Область $G = \{(x, y):\ a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ назовём "y-трапециевидной" (рис. 12.19). Аналогично опр-ся "x-трапециевидная" область.

Замкнутую область G назовём простой, если её можно разбить как на конечное число "x-трапециевидных" областей, так и на конечное число "y-трапециевидных" обл-й (без общих внутр. точек у любых двух обл-й).

Примеры простых областей: (прямоугольник,) круг, кольцо (рис. 12.20).

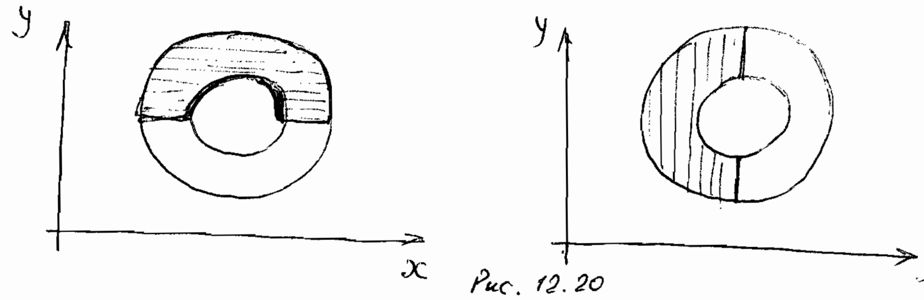


Рис. 12.20

Границу области G обозначим L. Она может состоять из конечного числа замкнутых контуров (рис. 12.21). Как было оговорено ранее, направление обхода контура считается положительным, если при этом обходе область G остаётся слева от движущейся по контуру точки.

Рис. 12.21

Теорема 4. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частные пр-е $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в простой обл. G с (кусочно-гладкой) границей L.

Тогда

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_L P\,dx + Q\,dy, \qquad (1)$$

где интеграл по границе L берётся в положительном направлении.

Формула (1) наз-ся ф-лой Грина.

Док-во. а) Рассмотрим сначала случай, когда G — "y-трапец." обл., (рис. 12.22) и докажем, что

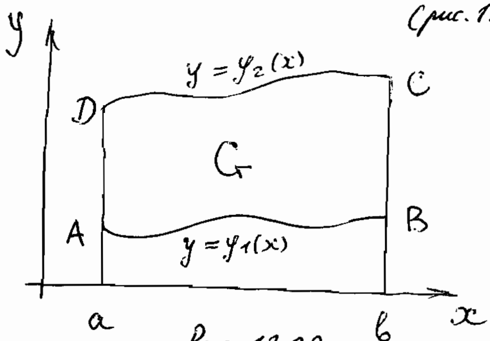


Рис. 12.22

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint\limits_L P\,dx. \qquad (2)$$

Сводя дв. интеграл к повторному, получаем

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy = \int_a^b dx \cdot P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} =$$

$$= \int_a^b P(x,\varphi_2(x))\,dx - \int_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx \qquad (3)$$

Каждый из двух определенных интегралов в правой части (3) выразим через криволинейный интеграл соотв-но по кривым CD и AB:

$$\int_a^b P(x,\varphi_2(x))\,dx = \int\limits_{DC} P(x,y)\,dx = -\int\limits_{CD} P(x,y)\,dx,$$

$$\int_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx = \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx.$$

Используя полученные равенства, а также р-ва $\int\limits_{BC} P(x,y)\,dx = 0$ и $\int\limits_{DA} P(x,y)\,dx = 0$,

запишем (3) в виде:

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{CD} P\,dx - \int\limits_{DA} P\,dx - \int\limits_{AB} P\,dx - \int\limits_{BC} P\,dx = -\oint\limits_L P\,dx.$$

Тем самым справедливость р-ва (2) доказана для "y-трапециевидной" области.

г) Пусть теперь G — простая область. Разобьём её на конечное число "y-трапец." областей G_i $(i=1,\dots,n)$: $G=\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ (рис. 12.23).

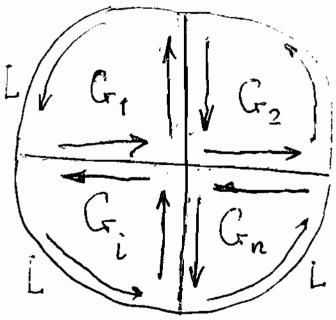


Рис. 12.23

Напишем для каждой обл. G_i р-во (2):

$$\iint\limits_{G_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint\limits_{L_i} P\,dx.$$

Суммируя эти р-ва по i от 1 до n, получим в левой части $\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$, а в правой части получим $-\oint\limits_{L} P\,dx$, т.к. криволинейный интеграл по каждой внутренней разделительной линии берётся дважды, причём в противоположных направлениях, и потому сумма таких интегралов равна нулю. Итак, для простой области G справедливо р-во

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint\limits_{L} P\,dx. \qquad (2).$$

Аналогично можно док-ть, используя разбиение G на "x-трапец." области, что

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint\limits_{L} Q\,dy \qquad (4)$$

Вычитая (2) из (4), получаем ф-лу (1):

$$\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy.$$

Теор. 4 доказана.

Замечание. Можно док-ть, что ф-ла Грина справедлива не только для простых областей, но и для любой области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гл. кривых.

Следствие. Полагая в (1) $Q = x$, $P = 0$, а затем $Q = 0$, $P = -y$, получаем

$$\iint_G dx\,dy = \oint_L x\,dy \quad \text{и} \quad \iint_G dx\,dy = -\oint_L y\,dx, \quad \text{т.е.}$$

$$S(G) = \oint_L x\,dy \quad \text{и} \quad S(G) = -\oint_L y\,dx. \qquad (5)$$

Пусть α и β — произвольные числа, такие, что $\alpha + \beta = 1$. Умножая первое р-во (5) на α, а второе на β, и складывая, получаем

$$S(G) = \oint_L \alpha x\,dy - \beta y\,dx \qquad (\alpha + \beta = 1).$$

Наиболее употребительна эта ф-ла при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

$$S = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx$$

Примеры. 1) Вычислить $I = \oint_L (x^2 - y)\,dx + (x + y^2)\,dy$,

где L — окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Здесь $P = x^2 - y$, $Q = x + y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. По ф-ле Грина

$$I = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 2\iint_G dx\,dy = 2\pi R^2.$$

2) Найти площадь области, ограниченной астроидой

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

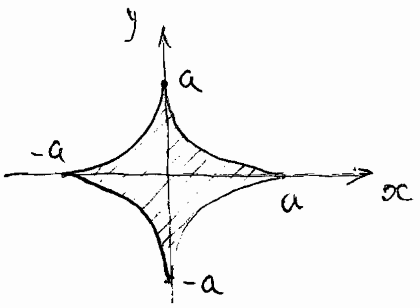


Рис. 12.24

Параметрич. ур-я астроиды:

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos^3 t \cdot a\,3\sin^2 t\cos t - a\sin^3 t\left(-a\cdot 3\cos^2 t\sin t\right)\right]dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

§5. Условия независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути интегрирования.

В §3 был рассмотрен пример, в котором кривол. инт. 2 рода по трем различным кривым, соединяющим две данные точки, имел одно и то же значение. В этом параграфе мы установим условия, при которых кривол. инт. 2 рода не зависит от пути интегрирования, т.е. для двух данных точек значение интеграла одно и то же для любой кривой, соединяющей эти точки.

Нам понадобится понятие односвязной области.

Областью мы называем открытое связное мн-во. Объединение области и её границы наз-ся замкнутой областью.

Область G (на плоскости) наз-ся односвязной, если она обладает след. свойством: для любого замкнутого контура L, лежащего в обл. G, часть плоскости, ограниченная этим контуром, целиком принадлежит G.

Примеры. Круг, треугольник — односвязные мн-ва. Кольцо, круг с выколотой точкой (рис. 12.25) не явл-ся односвязными областями.

Рис. 12.25

Теорема 5. (1) Пусть ф-ии $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непр. в обл. G. Тогда следующие три условия эквивалентны (т.е. из каждого из них следуют два другие):

1. Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $L \subset G$:
$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0.$$
2. Для любых двух фиксированных точек A и $B \in G$ кривол. инт. $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования (т.е. от кривой, соединяющей A и B)
3. Выражение $P\,dx + Q\,dy$ явл-ся полным дифференциалом,

т.е. существует ф-я $u(x,y) = u(M)$, такая, что

$$du(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

При этом для любой кус.-гладкой кривой $AB \subset G$ вып-ся р-во

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A) \qquad (1)$$

② Если, кроме того, область G — односвязная, а ф-ии P и Q имеют в обл. G непрерывные пр-е $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то каждое из условий 1–3 эквивалентно условию

4. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в обл. G.

Док-во. проведём по схеме: ① $1 \to 2 \to 3 \to 1$; ② $3 \to 4 \to 1$.

① а) $1 \to 2$. Пусть вып-но усл. 1. Рассмотрим две произв. точки A и $B \in G$ и две произвольные кривые, соединяющие эти точки: ACB и ADB (рис. 12.26). В силу условия 1

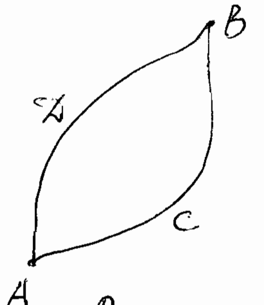


Рис. 12.26

$$\int\limits_{ACBDA} P\,dx + Q\,dy = 0, \text{ т.е. } \int\limits_{ACB} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{BDA} P\,dx + Q\,dy = 0,$$

откуда $\int\limits_{ACB} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{BDA} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{ADB} P\,dx + Q\,dy.$

Таким образом, выполнено условие 2.

б) $2 \to 3$. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — фиксир. точка $\in G$, $M(x,y)$ — произв. точка $\in G$. В силу усл. 2 интеграл $\int\limits_{M_0M} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от выбора кривой M_0M, а зависит только от т. $M(x,y)$, т.е является ф-й от x и y. Обозначим эту ф-ю $u(x,y)$:

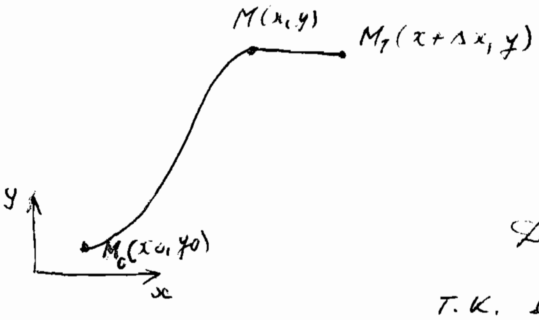


Рис. 12.27

$$u(x,y) = \int\limits_{M_0M} P\,dx + Q\,dy,$$

Докажем, что $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$. Отсюда, т.к. P и Q — непр. ф-ии, последует, что $u(x,y)$ — диф. ф-я, причём $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy$, т.е. выражение $P\,dx + Q\,dy$ явл-ся полным дифференциалом.

Зафиксируем точку $M(x,y)$ и дадим приращение Δx переменной x (рис. 12.27). Функция $u(x,y)$ получит частное приращение

$$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y) = \int\limits_{M_0M_1} P dx + Q dy - \int\limits_{M_0M} P dx + Q dy =$$

$$= \int\limits_{MM_1} P dx + Q dy = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)\, dx = P(\xi, y)\Delta x, \text{ где } \xi \in [x, x+\Delta x]$$

(последнее равенство получено с помощью формулы среднего значения). Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = P(\xi, y) \to P(x,y) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

т.е. функция $u(x,y)$ имеет в точке $M(x,y)$ частную производную по переменной x и $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$.

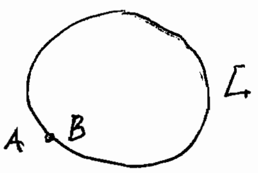
Аналогично доказывается, что $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$.

Докажем, что верна формула (1):

$$\int\limits_{AB} P dx + Q dy = \int\limits_{AM_0} P dx + Q dy + \int\limits_{M_0B} P dx + Q dy = \underbrace{\int\limits_{M_0B} P dx + Q dy}_{u(B)} -$$

$$- \underbrace{\int\limits_{M_0A} P dx + Q dy}_{u(A)} = u(B) - u(A).$$

в) $3 \to 1$. Пусть выполнено условие 3 и, следовательно, верна формула (1). Возьмём произвольный замкнутый контур $L \subset G$ (рис. 12.28, $A=B$). По формуле (1)



$$\oint\limits_L P dx + Q dy = u(B) - u(A) = 0,$$

т.е. выполнено условие 1.

Рис. 12.28

② **2) $3 \to 4$** Пусть выполнено условие 3, т.е. существует функция $u(x,y)$, такая, что $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$. Тогда $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ — непрерывные функции, то $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, т.е. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и, значит, выполнено условие 4.

<u>Замечание.</u> Односвязность области G здесь не использовалась.

д) 4 → 1. Пусть вып-но усл. 4, т.е. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ в обл. G, и G – односвязная область.

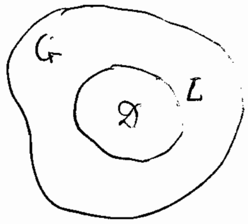


Рис. 12.29

Возьмём произвольный замкнутый контур $L\subset G$ (рис. 12.29). В силу односвязности обл. G область D, ограниченная контуром L, целиком принадлежит области G. По ф-ле Грина

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0,$$ т.е. вып-но усл. 1.

Теорема 5 доказана.

Замечание. Аналогичная теорема имеет место для криволин. интегралов 2 рода в пр-ве: $\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$, где P, Q, R – ф-ции от x, y, z.

В частности, усл. 3 принимает вид: $\exists$ существует функция $u(x,y,z)$, такая, что $du=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$, а условие 4 содержит теперь 3 р-ва: $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$.

Утверждения $1\to2\to3\to1$ (и $3\to4$) док-ся так же, как в Т. 5, а для док-ва утверждения $4\to1$ нужна ф-ла Стокса. О ней речь пойдёт в следующей главе.

Примеры. 1) Вернёмся к примеру из §3:

$$I=\int_{A(0,0)}^{B(1,1)} 2xy\,dx+x^2dy.$$

Т.к. $2xy\,dx+x^2dy=du$, где $u=x^2y$, то интеграл I не зависит от пути интегрирования: $I=u(1,1)-u(0,0)=1-0=1$.

2) Если область G не является односвязной, то из усл. 4 может не следовать усл. 1. Вот пример: $P=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$ т.е. вып-но усл. 4. При этом $P, Q,$ $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ опр-ны и непр. всюду, кроме одной точки $(0,0)$.

Рассм. обл. G с выколотой точкой $(0,0)$. Она не яв-ся односвязной. Возьмём окружность L: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ (рис. 12.30).

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy=\int_0^{2\pi}\left[-\sin t(-\sin t)\,dt+\cos t\cos t\cdot dt\right]=\int_0^{2\pi}dt=2\pi\ne 0.$$

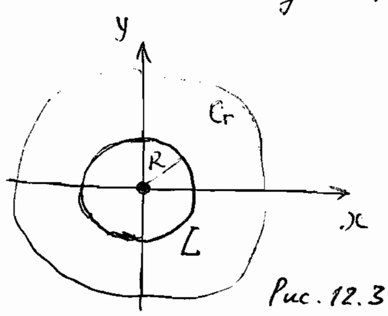


Рис. 12.30

3) Вычислить $I=\int\limits_{AB} \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где AB – кривая, расположенная в кольце между концентрическими окружностями радиусов a и b с центром в начале координат (рис. 12.31).

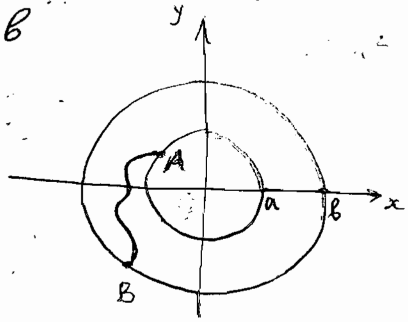


Рис. 12.31

В данном примере

$$P(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad Q(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Проверим, выполнено ли условие 4 теоремы 5:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=-\frac{1}{2}x(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot 2y=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Итак, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, т.е. условие 4 теоремы 5 выполнено и, следовательно, существует функция $u(x,y)$, такая, что $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$.

Как найти $u(x,y)$? В данном примере её нетрудно "угадать": $u=\sqrt{x^2+y^2}$. Поэтому $I=u(B)-u(A)=b-a$.

Но можно найти $u(x,y)$ без угадывания (см. рис. 12.32):

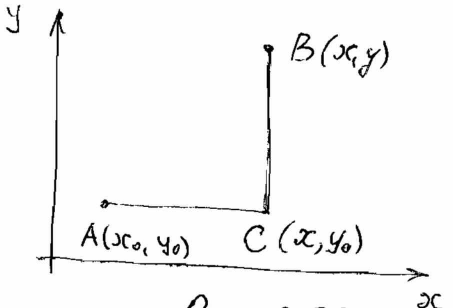


Рис. 12.32

$$u(x,y)=\int\limits_{ACB} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y_0^2}}+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+C=\sqrt{x^2+y_0^2}\,\Big|_{x_0}^{x}+$$

$$+\sqrt{x^2+y^2}\,\Big|_{y_0}^{y}+C=\sqrt{x^2+y_0^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}+\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+y_0^2}+C=$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}+C.$$ Если взять $C=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, то $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

4) <u>Физический пример.</u> Пусть в обл. G задано векторное поле, т.е. в каждой точке M области G задан вектор $\vec{F}(M)$. Если $\vec{F}(M)$ – вектор силы, то говорят о силовом векторном поле.

<u>Примеры:</u> поле тяготения точечной массы $\vec{F}(M) = -\gamma \frac{m}{r^3} \vec{r}$ {см. гл. 9}; электрическое поле напряжённости.

Векторное поле $\vec{F}(M)$ наз-ся потенциальным, если существует такая функция $u(M)$, что
$\vec{F}(M) = \operatorname{grad} u(M)$ (понятие потенц. поля уже упоминалось ранее – в гл. 9).

Ф-я $u(M)$ наз-ся потенциалом вект. поля $\vec{F}(M)$.

Пусть $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\cdot\vec{k}$ – потенц. силовое поле в пр-ве.
Тогда $\vec{F}(M) = \operatorname{grad} u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ и, сл-но,

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Поэтому $P dx + Q dy + R dz = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = du$ – полный дифференциал.

Криволин. интеграл $\int\limits_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int\limits_{AB} (\vec{F} \cdot d\vec{l})$ есть работа силового поля $\vec{F}(M)$ при перемещении матер. точки по кривой AB из т. A в т. B. Т.к. $P dx + Q dy + R dz = du$ – полный диф-л, то по Т.5

$$\int\limits_{AB} P dx + Q dy + R dz = u(B) - u(A),$$

т.е. работа потенциального силового поля не зависит от пути, по которому матер. точка перемещается из т. A в т. B, а зависит лишь от начальной и конечной точек A и B: она равна разности потенциалов в точках **B и A**.

В частности, если $\vec{F}(M) = -\gamma \frac{m}{r^3} \vec{r}$ – поле тяготения точечной массы m, то $\vec{F} = \operatorname{grad} u(M)$, где $u(M) = \gamma \frac{m}{r}$ – ньютоновский потенциал, и для работы этого силового поля получаем выражение
$\int\limits_{AB} (\vec{F} d\vec{l}) = \gamma m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$; здесь r_M – расстояние от т. M до точки, в которой находится масса m.