Линейная алгебра–2
Тензоры
Билинейные и квадратичные функционалы

1. Преобразование базисов

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{K}$, $\dim V = n$,
$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — старый базис в V,
$\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ — новый базис в V.

Так как $\mathbf{e}_{k'} \in V\ \forall k' = 1', \ldots, n'$, его можно разложить по базису $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{e}_{k'} = c^1_{k'}\mathbf{e}_1 + \cdots + c^n_{k'}\mathbf{e}_n$$

или, в обозначениях Эйнштейна

$$\boxed{\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'}\mathbf{e}_k, \qquad \begin{matrix} k = 1, \ldots, n, \\ k' = 1', \ldots, n'. \end{matrix}} \tag{1}$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & \ldots & c^1_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n_{1'} & \ldots & c^n_{n'} \end{pmatrix} = (c^k_{k'})^n_{n'}$$

называется *матрицей перехода* (**МП**) от старого базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$.

Столбцы матрицы перехода представляют собой столбцы координат векторов нового базиса относительно старого базиса.

Рассмотрим матрицу

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} c^{1'}_1 & \ldots & c^{n'}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{1'}_n & \ldots & c^{n'}_n \end{pmatrix} = (c^{k'}_k)^{n'}_n,$$

обратную к матрице C. Умножим обе части (1) на $c^{k'}_j$ и просуммируем по k':

$$c^{k'}_j\mathbf{e}_{k'} = c^{k'}_j c^k_{k'}\mathbf{e}_k.$$

Так как $c^{k'}_j c^k_{k'} = \delta^k_j$, получаем

$$c^{k'}_j\mathbf{e}_{k'} = \delta^k_j\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_j$$

или, меняя индекс k' на j',

$$\boxed{\mathbf{e}_j = c^{j'}_j\mathbf{e}_{j'}, \qquad \begin{matrix} j = 1, \ldots, n, \\ j' = 1', \ldots, n'. \end{matrix}} \tag{2}$$

Эта формула выражает векторы старого базиса через векторы нового базиса.

Рассмотрим матрицы-строки

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n), \quad \mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'},\ \ldots,\ \mathbf{e}_{n'}),$$

состоящие из векторов старого и нового базисов, соответственно. Тогда формулы преобразования базисов можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}C, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}'C^{-1}.$$

Задача. Докажите эти формулы.

2. Преобразование координат вектора

Пусть $\mathbf{x} \in V$. Найдем связь между координатами x^k этого вектора относительно старого базиса и его координатами $x^{k'}$ относительно нового базиса. Имеем:

$$\mathbf{x} = x^k\mathbf{e}_k = x^{k'}\mathbf{e}_{k'}. \tag{3}$$

Подставим сюда (1):

$$x^k\mathbf{e}_k = x^{k'}\mathbf{e}_{k'} = x^{k'}c^k_{k'}\mathbf{e}_k.$$

В силу единственности разложения по базису имеем

$$\boxed{x^k = c^k_{k'}x^{k'}.} \tag{4}$$

Аналогично, подставляя в (3) соотношение (2), получим

$$\boxed{x^{k'} = c^{k'}_k x^k.} \tag{5}$$

Рассмотрим столбцы координат вектора $\mathbf{x}$ относительно старого и нового базисов:

$$X_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad X_{\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы (4), (5) можно записать в виде

$$X_{\mathbf{e}} = CX_{\mathbf{e}'}, \quad X_{\mathbf{e}'} = C^{-1}X_{\mathbf{e}}.$$

3. Преобразование сопряженного базиса

Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^{1'}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^{n'}$ — базисы в V^*, сопряженные базисам $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$, C — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$. Найдем матрицу перехода D от базиса $\boldsymbol{\varepsilon}$ к базису $\boldsymbol{\varepsilon}'$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{j'} = d^{j'}_j\boldsymbol{\varepsilon}^j.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \delta^{j'}_{k'} = \boldsymbol{\varepsilon}^{j'}(\mathbf{e}_{k'}) = d^{j'}_j\boldsymbol{\varepsilon}^j(c^k_{k'}\mathbf{e}_k) = \\ = d^{j'}_j c^k_{k'}\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{e}_k)}_{=\delta^j_k} = \\ = d^{j'}_j c^k_{k'}\delta^j_k = d^{j'}_k c^k_{k'} \ \Rightarrow\ d^{j'}_k = c^{j'}_k. \end{aligned}$$

Итак,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{j'} = c^{j'}_j\boldsymbol{\varepsilon}^j, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^j = c^j_{j'}\boldsymbol{\varepsilon}^{j'}. \tag{6}$$

Введем матрицы-столбцы

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}^n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{1'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{n'} \end{pmatrix},$$

состоящие из элементов старого и нового сопряженных базисов. Тогда

$$\mathcal{E}' = C^{-1}\mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = C\mathcal{E}'.$$

Задача. Докажите.

4. Преобразование координат ЛФ

Пусть $\boldsymbol{\xi} \in V^*$. Разложим **ЛФ** $\boldsymbol{\xi}$ по старому и новому сопряженным базисам:

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_k \boldsymbol{\varepsilon}^k = \xi_{k'} \boldsymbol{\varepsilon}^{k'}.$$

Координаты ξ^k и $\xi^{k'}$ связаны соотношениями

$$\xi_k = c_k^{k'} \xi_{k'}, \quad \xi_{k'} = c_{k'}^k \xi_k. \tag{7}$$

Задача. Докажите эти формулы.

Введем матрицы-строки

$$\Xi_{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\xi_1, \ \ldots, \ \xi_n), \quad \Xi_{\boldsymbol{\varepsilon}'} = (\xi_{1'}, \ \ldots, \ \xi_{n'}).$$

Тогда формулы (7) можно переписать в виде

$$\Xi_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \Xi_{\boldsymbol{\varepsilon}'} C^{-1}, \quad \Xi_{\boldsymbol{\varepsilon}'} = \Xi_{\boldsymbol{\varepsilon}} C.$$

5. Градиент функции

Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$. Зафиксировав базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в $\mathbb{R}^n$ и разложив вектор $\mathbf{x}$ по этому базису,

$$\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k,$$

можно считать, что задана функция

$$y = f(x^1, \ldots, x^n)$$

n аргументов $x^1, \ldots, x^n$. *Градиентом* этой функции в точке $\mathring{\mathbf{x}} = (\mathring{x}^1, \ldots, \mathring{x}^n)$ называется «вектор»

$$\operatorname{grad} f(\mathring{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(\mathring{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_k.$$

Получим закон преобразования координат $\dfrac{\partial f}{\partial x^k}$ этого «вектора» при замене базиса в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ — новый базис в $\mathbb{R}^n$, связанный с исходным базисом $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ матрицей перехода $C = (c_{k'}^k)$:

$$\mathbf{e}_{k'} = c_{k'}^k \mathbf{e}_k.$$

Координаты точки $\mathbf{x}$ относительно старого и нового базисов связаны соотношением

$$x^{k'} = c_k^{k'} x^k,$$

в которое входят элементы $c_k^{k'}$ обратной матрицы перехода. Эквивалентная формула:

$$x^k = c_{k'}^k x^{k'}. \tag{8}$$

Вычислим компоненты градиента относительно нового базиса при помощи теоремы о производной сложной функции, считая старые координаты $x^1, \ldots, x^n$ функциями новых координат $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$, заданными соотношением (8):

$$\frac{\partial f}{\partial x^{k'}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = \sum_{k=1}^n c_{k'}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Таким образом, компоненты градиента преобразуются не как компоненты вектора, а как компоненты линейного функционала.

6. Определение тензора

Пусть $V(\mathbb{R})$ — **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{R}$. Тензором типа (p, q) (p раз ковариантным и q раз контравариантным) в **ЛП** V называется геометрический объект, который в каждом базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ **ЛП** V задается n^{p+q} координатами $A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$ (индексы $j_1, \ldots, j_p$, $k_1, \ldots, k_q$ независимо принимают значения $1, 2, \ldots, n$), причем при переходе к новому базису $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ эти координаты преобразуются по формуле

$$A_{j'_1 \ldots j'_p}^{k'_1 \ldots k'_q} = \underbrace{c_{j'_1}^{j_1} \ \ldots \ c_{j'_p}^{j_p}}_{\text{МП}} \underbrace{c_{k_1}^{k'_1} \ \ldots \ c_{k_q}^{k'_q}}_{\text{ОМП}} A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q};$$

по всем повторяющимся индексам производится суммирование. Часто тензор отождествляют с набором его координат.

Примеры тензоров

1. Инвариант (скаляр) — тензор типа $(0, 0)$, имеющий одну (n^0) координату, не преобразующуюся при замене базиса.

2. Контравариантный тензор (тензор типа $(0, 1)$) имеет n координат, преобразующихся по закону

$$A^{k'} = c_k^{k'} \ A^k.$$

Это — набор координат вектора.

3. Ковариантный тензор (тензор типа $(1, 0)$, ковектор) имеет n координат, преобразующихся по закону

$$A_{k'} = c_{k'}^k \ A_k.$$

Это — набор координат линейного функционала.

7. Сложение тензоров и умножение на число

Пусть $A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$ и $B_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$ — тензоры типа (p, q). Их суммой называется объект $D_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$, определяемый в каждом базисе набором n^{p+q} чисел

$$D_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} = A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} + B_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}.$$

Теорема. *Сумма двух тензоров типа (p, q) является тензором типа (p, q).*

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}
D_{j'_1 \ldots j'_p}^{k'_1 \ldots k'_q} &= A_{j'_1 \ldots j'_p}^{k'_1 \ldots k'_q} + B_{j'_1 \ldots j'_p}^{k'_1 \ldots k'_q} = \\
&= c_{j'_1}^{j_1} \ \ldots \ c_{j'_p}^{j_p} \ c_{k_1}^{k'_1} \ \ldots \ c_{k_q}^{k'_q} \ A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} + \\
&+ c_{j'_1}^{j_1} \ \ldots \ c_{j'_p}^{j_p} \ c_{k_1}^{k'_1} \ \ldots \ c_{k_q}^{k'_q} \ B_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} = \\
&= c_{j'_1}^{j_1} \ \ldots \ c_{j'_p}^{j_p} \ c_{k_1}^{k'_1} \ \ldots \ c_{k_q}^{k'_q} \left(A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} + B_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} \right) = \\
&= c_{j'_1}^{j_1} \ \ldots \ c_{j'_p}^{j_p} \ c_{k_1}^{k'_1} \ \ldots \ c_{k_q}^{k'_q} \ D_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}.
\end{aligned}$$

$\square$

Произведением тензора $A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$ типа (p, q) на число α называется объект, который в каждом базисе задается набором n^{p+q} чисел

$$F_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} = \alpha \cdot A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}.$$

Теорема. *Произведение тензора типа (p, q) на число является тензором типа (p, q).*

Задача. Докажите самостоятельно.

8. Произведение тензоров

Пусть $A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}$ и $B^{i_1\dots i_s}_{l_1\dots l_r}$ — тензоры типа (p,q) и (r,s) соответственно. Их произведением называется объект $D^{k_1\dots k_q\ i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_p\ l_1\dots l_r}$, определяемый в каждом базисе набором $n^{p+q+r+s}$ чисел

$$D^{k_1\dots k_q\ i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_p\ l_1\dots l_r} = A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p} \cdot B^{i_1\dots i_s}_{l_1\dots l_r}.$$

Обозначение: $D = A \otimes B$.

Теорема. *Произведение двух тензоров типов (p,q) и (r,s) является тензором типа $(p+r, q+s)$.*

Задача. Докажите самостоятельно.

Пример. Рассмотрим произведение двух 1-контравариантных тензоров A^j и B^k. Рассмотрим произведения $D = A \otimes B$ и $F = B \otimes A$. Компоненты этих тензоров равны

$$D^{jk} = A^j \cdot B^k, \quad F^{jk} = B^j \cdot A^k;$$

эти компоненты удобно расположить в виде матриц

$$D = (D^{jk}) = \begin{pmatrix} D^{11} & D^{12} & \dots \\ D^{21} & D^{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1B^1 & A^1B^2 & \dots \\ A^2B^1 & A^2B^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

$$F = (F^{jk}) = \begin{pmatrix} F^{11} & F^{12} & \dots \\ F^{21} & F^{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1A^1 & B^1A^2 & \dots \\ B^2A^1 & B^2A^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Видно, что матрицы D и F не равны (в данном частном случае они являются взаимно транспонированными). Этот пример показывает, что, вообще говоря,

$$A \otimes B \neq B \otimes A.$$

9. Свертка тензора

Пусть A — тензор типа (p,q), где $p \geq 1$, $q \geq 1$ (т.е. у тензора имеется хотя бы один нижний индекс и хотя бы один верхний индекс):

$$A^{k_1 k_2 \dots k_q}_{j_1 j_2 \dots j_p}.$$

Выберем у этого индекса один нижний и один верхний индекс (например, пусть это будут j_1 и k_1) и рассмотрим сумму компонент

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A^{\alpha k_2 \dots k_q}_{\alpha j_2 \dots j_p} = B^{k_2 \dots k_q}_{j_2 \dots j_p}.$$

Объект B называется *сверткой* тензора A по выбранной паре индексов.

Теорема. *Свертка тензора типа (p,q) по паре индексов представляет собой тензор типа $(p-1, q-1)$.*

Доказательство. Докажем теорему для случая тензора A^l_{jk} типа $(2,1)$. Рассмотрим свертку $B_j = A^k_{jk}$ и получим закон преобразования для чисел B_j. Имеем:

$$B_{j'} = A^{k'}_{j'k'} = \delta^{k'}_{l'} A^{l'}_{j'k'} = \underline{\delta^{k'}_{l'}}\ c^j_{j'}\ c^k_{k'}\ \underline{c^{l'}_l}\ A^l_{jk} =$$
$$= c^j_{j'}\ \underbrace{c^k_{k'}\ c^{k'}_l}_{=\delta^k_l}\ A^l_{jk} = c^j_{j'}\ \delta^k_l A^l_{jk} = c^j_{j'}\ A^k_{jk} = c^j_{j'}\ B_j.$$

□

Примеры. Рассмотрим тензор типа $(1,1)$: A^k_j. Его сверткой по (единственной имеющейся у него) паре индексов j, k является

$$B = A^1_1 + A^2_2 + \dots + A^n_n = \sum_{\alpha=1}^{n} A^\alpha_\alpha = A^j_j.$$

B — тензор типа $(0,0)$, т.е. инвариант; его единственная компонента не меняется при замене базиса.

Для тензора A^l_{jk} типа $(2,1)$ можно образовать две различные свертки:

$$B_j = A^1_{j1} + A^2_{j2} + \dots + A^n_{jn} = \sum_{\alpha=1}^{n} A^\alpha_{j\alpha} = A^k_{jk},$$

$$D_k = A^1_{1k} + A^2_{2k} + \dots + A^n_{nk} = \sum_{\alpha=1}^{n} A^\alpha_{\alpha k} = A^j_{jk}.$$

Оба тензора B_j, D_k являются 1-ковариантными.

Часто встречается операция свертки произведения двух тензоров по паре индексов, первый из которых принадлежит одному из перемножаемых тензоров, а второй — другому. Например, из тензоров A_{jk} и B^l можно образовать произведение $D = A \otimes B$ с компонентами $D^l_{jk} = A^l_{jk}$, а затем рассмотреть свертку

$$A_{jk} B^k.$$

Задача. Пусть X_j, Y_k — два 1-ковариантных тензора. Рассмотрим величины $A_{jk} = X_j + Y_k$. Образуют ли они тензор? Оценить ранг матрицы $A = (A_{jk})$.

10. Билинейный функционал

Пусть $V(\mathbb{R})$ — вещественное **ЛП**.

Билинейный функционал (**БФ**) на **ЛП** V — это функция $\mathbf{B} : V \times V \to \mathbb{R}$ пары векторных аргументов, обладающая следующими свойствами:

1) $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in V$:
$\mathbf{B}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$,
2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\mathbf{B}(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,
3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$:
$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$,
4) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Введем операции сложения **БФ** и умножения **БФ** на число по правилам

$$(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{B}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$
$$(\alpha\mathbf{B})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Множество всех **БФ** на **ЛП** V является **ЛП**.*

Задача. Докажите.

11. Матрица билинейного функционала

Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис в V. Разложим векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ по этому базису:

$$\mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{y} = y^k \mathbf{e}_k,$$

и вычислим значение **БФ** на этой паре векторов:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{B}(x^j \mathbf{e}_j, y^k \mathbf{e}_k) = x^j y^k \mathbf{B}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k).$$

Введем обозначение

$$b_{jk} = \mathbf{B}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k).$$

Матрица $B_e = (b_{jk})$ называется *матрицей* **БФ** $\mathbf{B}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Значение **БФ** $\mathbf{B}$ на паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b_{jk} x^j y^k.$$

Таким образом, координатной записью билинейного функционала является однородный многочлен второй степени от переменных x^j, y^k, называемый *билинейной формой*.

Введя в рассмотрение столбцы координат:

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y_e = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

можно записать предыдущую формулу в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X_e^T B_e Y_e.$$

Задача. Докажите.

12. БФ как тензор

Теорема. ***БФ*** *является тензором типа* $(2,0)$.

Доказательство. Необходимо проверить, что элементы матрицы **БФ** преобразуются при переходе к новому базису по закону

$$\boxed{b_{j'k'} = c^j_{j'} c^k_{k'} b_{jk},} \tag{9}$$

где $c^j_{j'}$ — элементы матрицы перехода:

$$\mathbf{e}_{j'} = c^j_{j'} \mathbf{e}_j.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} b_{j'k'} &= \mathbf{B}(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{k'}) = \mathbf{B}(c^j_{j'}\mathbf{e}_j,\ c^k_{k'}\mathbf{e}_k) = \\ &= c^j_{j'}\ c^k_{k'}\ \mathbf{B}(\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k) = c^j_{j'}\ c^k_{k'}\ b_{jk}. \end{aligned}$$

Проведем доказательство в матричной форме. Имеем:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X_e^T B_e Y_e = X_{e'}^T B_{e'} Y_{e'}.$$

Напомним, что столбцы координат вектора относительно нового и старого базисов связаны соотношениями

$$X_e = C X_{e'}, \quad X_{e'} = C^{-1} X_e.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} X_{e'}^T B_{e'} Y_{e'} &= X_e^T B_e Y_e = \\ &= (C X_{e'})^T B_e (C Y_{e'}) = X_{e'}^T C^T B_e C Y'_e, \end{aligned}$$

откуда

$$X_{e'}^T (C^T B_e C - B_{e'}) Y'_e = 0.$$

В левой части этого равенства стоит многочлен от $x^{j'}$, $y^{k'}$, тождественное обращение которого в нуль возможно лишь при условии, что все его коэффициенты равны нулю; отсюда получаем

$$\boxed{B_{e'} = C^T B_e C.} \tag{10}$$

□

Задача. Докажите эквивалентность формул (9) и (10).
Теорема. ***ЛП*** *всех* ***БФ*** *в* ***ЛП*** $V(\mathbb{R})$ *изоморфно* $\mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{R})$.
Задача. Докажите эту теорему и найдите размерность **ЛП** всех **БФ** на **ЛП** V.

13. Инварианты БФ

Теорема. *Пусть* B_e — *матрица* ***БФ*** $\mathbf{B}$ *в каком-либо базисе* ***ЛП*** V. *Ранг матрицы* B_e *и знак ее определителя не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами* ***БФ***.

Ранг матрицы **БФ** называется рангом **БФ**; обозначение $\operatorname{rk}\mathbf{B}$.

Доказательство. Имеем:

$$\begin{gathered} B_{e'} = C^T B_e C \quad \Rightarrow \\ B_e = (C^T)^{-1} B_{e'} C^{-1} = (C^{-1})^T B_{e'} C^{-1}. \end{gathered}$$

Поэтому

$$\begin{matrix} \operatorname{rk} B_{e'} \le \operatorname{rk} B_e, \\ \operatorname{rk} B_e \le \operatorname{rk} B_{e'} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rk} B_e = \operatorname{rk} B_{e'}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \det B_{e'} &= \det(C^T B_e C) = \det C^T \cdot \det B_e \cdot \det C = \\ &= (\det C)^2 \cdot \det B_e, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что знаки $\det B_{e'}$ и $\det B_e$ совпадают. □

14. Симметричные и кососимметричные БФ

БФ $\mathbf{B}$ называется *симметричным*, если

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V: \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

и кососимметричным, если

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V: \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

Теорема. *Для того чтобы* ***БФ*** $\mathbf{B}$ *был симметричным (кососимметричным), необходимо и достаточно, чтобы его матрица в каком-либо базисе была симметричной (кососимметричной). Если матрица* ***БФ*** *симметрична (кососимметрична) в каком-либо базисе, то она является таковой и в любом другом базисе.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть **БФ** симметричен. Имеем:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T B Y = \mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = Y^T B X.$$

Поскольку $Y^T B X$ — число, $(Y^T B X)^T = Y^T B X$, так что

$$\begin{gathered} X^T B Y = Y^T B X = (Y^T B X)^T = X^T B^T Y \\ \Rightarrow \quad B = B^T. \end{gathered}$$

2. Достаточность. Если матрица B **БФ** $\mathbf{B}$ симметрична, т.е. $B^T = B$, то имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= X^T B Y = (X^T B Y)^T = \\ &= Y^T B^T X = Y^T B X = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

3. Пусть матрица B_e **БФ** $\mathbf{B}$ в базисе $\mathbf{e}$ симметрична. В другом базисе имеем:

$$\begin{aligned} B_{e'} &= C^T B_e C = C^T B_e^T C = \\ &= C^T B_e^T (C^T)^T = (C^T B_e C)^T = B_{e'}^T. \end{aligned}$$

□

Теорема. *Любой* ***БФ*** *можно единственным образом представить в виде суммы симметричного и кососимметричного* ***БФ***.

Доказательство. Запишем **БФ** $\mathbf{B}$ в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathbf{B}(\mathbf{y},\mathbf{x})\Big) + \frac{1}{2}\Big(\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathbf{B}(\mathbf{y},\mathbf{x})\Big).$$

Первое слагаемое представляет собой симметричный, а второе — кососимметричный **БФ**. Обозначим их

$$\mathbf{B}_S(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathbf{B}(\mathbf{y},\mathbf{x})\Big),$$
$$\mathbf{B}_A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathbf{B}(\mathbf{y},\mathbf{x})\Big)$$

и назовем *симметричной* и *кососимметричной* частями данного **БФ** $\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})$. □

Матрицы B_S, B_A **БФ** $\mathbf{B}_S$ и $\mathbf{B}_A$ получаются из матрицы B **БФ** $\mathbf{B}$ по формулам

$$B_S = \frac{1}{2}\Big(B + B^T\Big), \quad B_A = \frac{1}{2}\Big(B - B^T\Big)$$

или, эквивалентно,

$$\overset{S}{b}_{jk} = \frac{1}{2}\Big(b_{jk} + b_{kj}\Big), \quad \overset{A}{b}_{jk} = \frac{1}{2}\Big(b_{jk} - b_{kj}\Big).$$

Матрицы B_S, B_A, будучи матрицами **БФ**, образуют тензоры типа $(2,0)$. Говорят, что тензоры B_S, B_A получены из тензора B с помощью операций *симметрирования* и *альтернирования* соответственно. Обозначения:

$$\overset{S}{b}_{jk} = \frac{1}{2}\Big(b_{jk} + b_{kj}\Big) = b_{(jk)}$$
$$\overset{A}{b}_{jk} = \frac{1}{2}\Big(b_{jk} - b_{kj}\Big) = b_{[jk]}.$$

15. Квадратичные функционалы

Пусть $\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — **БФ** в вещественном **ЛП** V. Положив $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, получим из **БФ** *квадратичный функционал* (**КФ**):

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

Если в **ЛП** V выбран базис $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$, B — матрица **БФ** $\mathbf{B}$ относительно этого базиса, $x^1,\dots,x^n$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ относительно этого базиса, то **КФ** записывается в виде

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = X^T B X = b_{jk}x^j x^k;$$

координатная запись **КФ** называется *квадратичной формой*.

Пусть B_S, B_A — симметричная и косисимметричная части тензора B. Имеем:

$$X^T B X = X^T(B_S + B_A)X = X^T B_S X + X^T B_A X.$$

Матрица B_A кососимметрична, поэтому

$$X^T B_A X = (X^T B_A X)^T = X^T B_A^T X = -X^T B_A X,$$

откуда

$$2X^T B_A X = 0 \quad \Rightarrow \quad X^T B_A X = 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbf{B}_S(\mathbf{x},\mathbf{x}) = X^T B X = X^T B_S X.$$

Матрицей квадратичной формы называется симметричная часть матрицы соответствующей билинейной формы. Таким образом, согласно определению, матрица квадратичной формы всегда симметрична.

Замечание. По каждому **БФ** можно единственным образом построить **КФ**; матрица этого **КФ** получается из матрицы **БФ** операцией симметрирования.

По каждому **КФ** можно единственным образом построить *симметричный* **БФ**; матрица этого **БФ** совпадает с матрицей **КФ**.

Ранг матрицы и знак определителя матрицы **КФ** не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами данного **КФ**.

16. Канонический вид квадратичной формы

Пусть $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ — **КФ** в **ЛП** V, $X^T Q_e X = q_{jk}x^j x^k$ — соответствующая квадратичная форма в базисе $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$. Базис $\mathbf{e}_{1'},\dots,\mathbf{e}_{n'}$ пространства V называется *каноническим* для **КФ** $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, если матрица $Q_{e'}$ **КФ** в этом базисе диагональна, причем на диагонали расположены числа 1, -1, 0. В каноническом базисе **КФ** представляет собой выражение вида

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \sum_{j'=1}^{n} \lambda_{j'}(x^{j'})^2, \qquad \lambda_{j'} = \pm 1, 0.$$

Квадратичную форму можно рассматривать как функцию переменных $x^1,\dots,x^n$ или $x^{1'},\dots,x^{n'}$. Переменные $x^{1'},\dots,x^{n'}$ и коэффициенты $\lambda_{j'}$ называются каноническими переменными и коэффициентами соответственно.

Теорема. *Для любого **КФ** в вещественном **ЛП** существует канонический базис. Иными словами, квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду посредством невырожденного преобразования координат.*

Доказательство. Доказательство теоремы проведем с помощью индукции по числу переменных квадратичной формы. Процесс построения канонического базиса, описанный в доказательстве, называется методом Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

1. **База индукции:** При $n = 1$ квадратичная форма имеет вид

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = q_{11}(x^1)^2, \quad q_{11} \neq 0,$$

и приводится к каноническому виду преобразованием переменных

$$x^{1'} = \sqrt{|q_{11}|}x^1.$$

Канонический вид:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \operatorname{sign} q_{11} \cdot (x^{1'})^2.$$

Матрица перехода к каноническому базису имеет вид

$$C = (c^1_{1'}), \quad c^1_{1'} = \frac{1}{\sqrt{|q_{11}|}}.$$

Индуктивное предположение: Предположим, что квадратичная форма от $n-1$ переменных может быть приведена к каноническому виду. Матрица перехода к каноническому базису есть P; новые канонические переменные выражаются через старые с помощью матрицы P^{-1}. Отметим, что $\det P \neq 0$.

Шаг индукции: Докажем, что в таком случае форма от n переменных,

$$Q(x^1,\dots,x^n) = q_{jk}x^j x^k$$

также может быть приведена к каноническому виду.

Случай 1. Предположим, что $q_{11} \neq 0$. Сгруппируем все слагаемые, содержащие x^1:

$$\begin{aligned} &Q(x^1,\dots,x^n) = \\ &= q_{11}(x^1)^1 + 2q_{12}x^1x^2 + \dots + 2q_{1n}x^1x^n + \\ &+ Q'(x_2,\dots,x_2). \end{aligned}$$

Очевидно, $Q'(x_2,\dots,x_2)$ — квадратичная форма от $n-1$ переменных. Преобразуем выделенные слагаемые:

$$q_{11}(x^1)^1 + 2q_{12}x^1x^2 + \dots + 2q_{1n}x^1x^n =$$
$$= q_{11}\left((x^1)^1 + 2\frac{q_{12}}{q_{11}}x^1x^2 + \dots + 2\frac{q_{1n}}{q_{11}}x^1x^n\right).$$

Дополним слагаемые в скобках до полного квадрата слагаемыми

$$Q''(x^2,\dots,x^n) = \left(\frac{q_{12}}{q_{11}}x^2\right) + \dots + \left(\frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n\right) +$$
$$+2\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{q_{1j}}{q_{11}}\ x^j\ \frac{q_{1k}}{q_{11}}\ x^k;$$

эти слагаемые, очевидно, образуют квадратичную форму от $x^2,\dots,x^n$. В результате получим

$$Q(x^1,\dots,x^n) =$$
$$= q_{11}\left(x^1 + \frac{q_{12}}{q_{11}}x^2 + \dots + \frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n\right)^2 -$$
$$-Q''(x^2,\dots,x^n) + Q'(x^2,\dots,x^n).$$

Ясно, что последние два слагаемые образуют квадратичную форму $Q^*(x^2,\dots,x^n)$ от $n-1$ переменных.

Введем новую переменную $x^{1'}$:

$$x^{1'} = \sqrt{|q_{11}|}\cdot\left(x^1 + \frac{q_{12}}{q_{11}}x^2 + \dots + \frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n\right);$$

тогда

$$Q(x^2,\dots,x^n) = \operatorname{sign} q_{11}\cdot(x^{1'})^2 + Q^*(x^2,\dots,x^n).$$

Согласно предположению индукции, форма Q^* может быть приведена к каноническому виду; если P — матрица перехода к каноническому базису для формы Q^*, $x^{2'},\dots,x^{n'}$ — канонические переменные для Q^*, то можно записать

$$\begin{pmatrix} x^{2'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix} = P^{-1}\cdot\begin{pmatrix} x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Ясно, что матрица

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{q_{12}}{q_{11}} & \dots & \frac{q_{1n}}{q_{11}} \\ 0 & & & \\ 0 & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода к каноническим переменным для формы Q. Вычислим ее определитель, используя разложение по первому столбцу:

$$\det C^{-1} = 1\cdot\det P^{-1} \neq 0.$$

Таким образом, матрица перехода к каноническому базису может быть получена обращением найденной матрицы C^{-1}.

Случай 2. Если в исходной форме $q_{11} = 0$, но $q_{12} \neq 0$, сделаем предварительно преобразование переменных

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}.$$

После этого преобразования слагаемое $q_{12}x^1x^2$ превратится в

$$q_{12}x^1x^2 = q_{12}(x^{1'} + x^{2'})(x^{1'} - x^{2'}) =$$
$$= q_{12}(x^{1'})2 - q_{12}(x^{2'})^2,$$

т.е. в форме появляется слагаемое $q_{12}(x^{1'})$, и можно воспользоваться алгоритмом, описанным для случая 1. Очевидно, предварительное преобразование невырождено.

Задача. Найдите определитель матрицы предварительного преобразования и обратную матрицу.

Теорема доказана. □

17. Пример

Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$Q(X,Y,Z) = Y^2 + Z^2 + XY + XZ + 2YZ.$$

Матрица этой формы в исходном базисе

$$Q_e = \begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & 1 & 1 \\ \frac12 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в форме отсутствует x^2, проведем преобразование к промежуточному базису

$$\begin{aligned} X &= x + y, \\ Y &= x - y, \\ Z &= z. \end{aligned}\qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В промежуточном базисе форма примет вид

$$Q(x,y,z) = (x-y)^2 + z^2 + (x+y)(x-y) +$$
$$+(x+y)z + 2(x-y)z =$$
$$= \underline{2x^2} - \underline{2xy} + \underline{3xz} + z^2 - yz.$$

Выделенные слагаемые (и только они) содержат переменные x; достраиваем полный квадрат:

$$Q(x,y,z) = 2\Big(x^2 + 2x\Big(-\frac12 y\Big) + 2x\Big(\frac34 y\Big) +$$
$$+\frac14 y^2 + \frac{9}{16}z^2 + 2\Big(-\frac12 y\Big)\Big(\frac34 z\Big)\Big) -$$
$$-\frac12 y^2 - \frac98 z^2 + \frac32 yz - yz + z^2 =$$
$$= 2\Big(x - \frac12 y + \frac34 z\Big)^2 - \underline{\frac12 y^2} + \underline{\frac12 yz} - \frac18 z^2.$$

Выделенные слагаемые (и только они) содержат y; достраиваем полный квадрат:

$$Q(x,y,z) = 2\Big(x - \frac12 y + \frac34 z\Big)^2 - \frac12 y^2 + \frac12 yz - \frac18 z^2 =$$
$$= 2\Big(x - \frac12 y + \frac34 z\Big)^2 - \frac12\Big(y^2 + 2y\Big(-\frac12 z\Big) + \frac14 z^2\Big) +$$
$$+\frac18 z^2 - \frac18 z^2.$$

Теперь форма принимает вид

$$Q(x,y,z) = 2\Big(x - \frac12 y + \frac34 z\Big)^2 - \frac12\Big(y - \frac12 z\Big)^2.$$

Введем новые переменные

$$\xi = \sqrt{2}\Big(x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z\Big),$$
$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(y - \frac{1}{2}z\Big),$$
$$\zeta = \frac{3}{4}z,$$

в которых форма примет вид

$$Q(\xi,\eta,\zeta) = \xi^2 - \eta^2.$$

Матрица перехода к новым координатам

$$C_2^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

является обратной по отношению к матрице перехода от промежуточного базиса к каноническому;

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от исходного базиса к каноническому

$$C = C_1C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$Q_{e'} = C^TQ_eC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. Канонический вид **БФ**

Пусть $\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — **БФ** в **ЛП** V, $X^TQ_eY = q_{jk}x^jy^k$ — соответствующая билинейная форма в базисе $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$. Базис $\mathbf{e}_{1'},\dots,\mathbf{e}_{n'}$ пространства V называется *каноническим* для **БФ** $\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, если матрица $B_{e'}$ **КФ** в этом базисе диагональна, причем на диагонали расположены числа 1, -1, 0. В каноническом базисе **КФ** представляет собой выражение вида

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j'=1}^{n} \lambda_{j'}x^{j'}y^{j'}, \qquad \lambda_{j'} = \pm 1, 0.$$

В отличие от квадратичных форм, билинейная форма не всегда может быть приведена к каноническому виду.

Задача. Докажите, что билинейную форму x^1y^2 в $\mathbb{R}^2$ невозможно привести к каноническому виду.

Теорема. *Для любого симметричного **БФ** в вещественном **ЛП** всегда существует канонический базис, т.е. симметричная билинейная форма может быть приведена к каноническому виду посредством невырожденного преобразования координат.*

Задача. Докажите самостоятельно.

19. Закон инерции квадратичных форм

Канонический базис для данной квадратичной формы, очевидно, не единствен. Однако количества положительных, отрицательных и нулевых канонических коэффициентов являются инвариантами квадратичной формы, т.е. не зависят от способа приведения формы к каноническому виду.

Теорема. *Пусть $r = \operatorname{rk} Q$ — ранг матрицы **КФ** $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$. Тогда среди канонических коэффициентов этого **КФ** ровно r ненулевых и $n-r$ нулевых ($n = \dim V$).*

Задача. Докажите самостоятельно.

Таким образом, канонический вид **КФ** таков:

$$Q(x^1,\dots,x^n) = \lambda_1(x^1)^2 + \dots + \lambda_r(x^r)^2.$$

Теорема. *Пусть $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_n$ — два канонических базиса для **КФ** $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, в которых этот **КФ** записывается в виде квадратичных форм*

$$Q(x^1,\dots,x^n) = (x^1)^2 + \dots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \dots - (x^r)^2,$$
$$Q(y^1,\dots,y^n) = (y^1)^2 + \dots + (y^q)^2 - (y^{q+1})^2 - \dots - (y^r)^2.$$

Тогда $p = q$.

Доказательство. Рассмотрим в **ЛП** V подпространства

$$P = L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p), \quad Q = L(\mathbf{f}_{q+1},\dots,\mathbf{f}_n).$$

Ясно, что $\forall \mathbf{x} \in P$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, имеем

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (x^1)^2 + \dots + (x^p)^2 > 0.$$

Аналогично, $\forall \mathbf{y} \in Q$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{y}) = -(y^{q+1})^2 - \dots - (y^r)^2 \le 0.$$

Поэтому $P \cap Q = \mathbf{0}$. Можем записать

$$\dim P + \dim Q = \dim(P+Q) \le \dim V = n,$$
$$p + (n-q) \le n \quad \Rightarrow \quad p \le q.$$

Аналогично доказывается, что $q \le p$. Следовательно, $p = q$. □

Число положительных (отрицательных) канонических коэффициентов **КФ** называется положительным (отрицательным) индексом инерции этого **КФ**.

Теорема. *Сумма положительного и отрицательного индексов инерции **КФ** равна рангу этого **КФ**.*

Задача. Докажите самостоятельно.

20. Знакоопределенные **КФ**

КФ $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ (и соответствующая квадратичная форма) называется *положительно определенным* (**ПО**), если

$$\forall \mathbf{x} \in V,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) > 0.$$

Пример: $Q(x^1,x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2$.

КФ $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ называется *отрицательно определенным*, если

$$\forall \mathbf{x} \in V,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) < 0.$$

Пример: $Q(x^1,x^2) = -(x^1)^2 - (x^2)^2$.

КФ $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ называется *неопределенным*, если

$$\exists \mathbf{x} \in V: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) > 0,$$
$$\exists \mathbf{y} \in V: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{y}) < 0.$$

Пример: $Q(x^1,x^2) = (x^1)^2 - (x^2)^2$.

КФ $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ называется *положительно полуопределенным*, если

$$\forall \mathbf{x} \in V: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq 0,$$
$$\exists \mathbf{y} \in V,\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0}: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{y}) = 0.$$

Пример: $Q(x^1, x^2) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + (x^2)^2 \equiv (x^1 - x^2)^2$.

КФ $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ называется *отрицательно полуопределенным*, если

$$\forall \mathbf{x} \in V: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \leq 0,$$
$$\exists \mathbf{y} \in V,\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0}: \quad \mathbf{Q}(\mathbf{y}) = 0.$$

Матрица Q называется **ПО**, если она является матрицей **ПО КФ** $\mathbf{Q}$ в некотором базисе.

Теорема. ***КФ*** *является* ***ПО*** *тогда и только тогда, когда его ранг r и положительный индекс инерции p равны размерности пространства: $r = p = n$.*

Доказательство. Если $p = r = n$, то в каноническом базисе

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2,$$

так что $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in V$, причем $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $x^1 = \cdots = x^n = 0$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Пусть $p < n$ или $r < n$. Тогда в каноническом базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ функционал $\mathbf{Q}$ выражается формой вида

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = Q'(x^1, \ldots, x^{n-1}) + \lambda_n (x^n)^2,$$

где $\lambda_n \leq 0$. Тогда $\mathbf{Q}(\mathbf{e}_n) = \lambda_n \leq 0$, т.е. **КФ** $\mathbf{Q}$ не является **ПО**. □

21. Критерий Сильвестра

Главным минором порядка k матрицы A размера $n \times n$ называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием последних $n - k$ строк и столбцов.

Теорема. *Матрица Q является* ***ПО*** *тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны:*

$$q_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \det Q > 0.$$

Доказательство. Воспользумся методом математической индукции. Для матрицы размера 1×1 утверждение очевидно:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = q_{11}(x^1)^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q_{11} > 0.$$

1. Необходимость.

Индуктивное предположение: Матрица $Q \in \mathbb{R}^{k \times k}$ **ПО** $\Rightarrow$ все ее главные миноры положительны.

Шаг индукции: Пусть матрица $Q \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}$ **ПО**. Докажем, что все ее главные миноры положительны. Рассмотрим **ПО** квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^{k+1} q_{ij} x^i x^j;$$

все ее главные миноры до порядка k включительно положительны по предположению индукции. Но и $\det Q > 0$, так как в каноническом базисе он равен 1 и является инвариантом.

2. Достаточность.

Индуктивное предположение: Все главные миноры матрицы $Q \in \mathbb{R}^{k \times k}$ положительны $\Rightarrow$ матрица Q **ПО**.

Шаг индукции: Рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^{k+1} q_{ij} x^i x^j.$$

По предположению индукции, эта форма **ПО** для векторов из **ЛПП** $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$, поэтому ее положительный индекс инерции не меньше k. Если он равен k, то в каноническом (а значит, и в любом) базисе $\det Q \leq 1$; противоречие. Следовательно, положительный индекс инерции матрицы Q равен $k + 1$. □