Лекция 13

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Канонические уравнения поверхностей второго порядка

Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это правая прямоугольная декартова система координат в пространстве. Дадим определение.

Определение 1. *Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек $M(x, y, z)$, заданных своими координатами в системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, координаты которых удовлетворяют следующему уравнению*:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \quad (1.1)$$

где все коэффициенты уравнения вещественные числа, причём

$$|a_{11}| + |a_{22}| + |a_{33}| + |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{23}| > 0.$$

Определение 2. *Поверхность в пространстве называется связной, если для любых двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ существует непрерывная кривая, целиком лежащая на поверхности и соединяющая эти две точки.*

Определение 3. *Поверхность называется центральной, если существует такая единственная точка M_0, что для любой точки M_1, лежащей на поверхности, то и симметричная относительно M_0 точка M_2 тоже лежит на поверхности.*

Эллипсоид. В <u>канонической</u> прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ уравнение эллипсоида имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,} \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0. \quad (1.2)$$

Свойство 1. Эллипсоид — это связная поверхность.

Свойство 2. Центр эллипсоида — точка $(0, 0, 0)$.

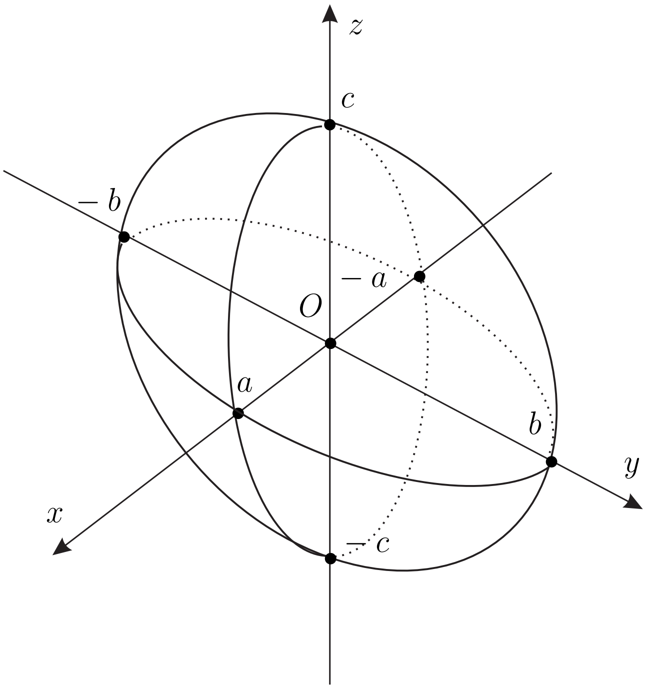

Рис. 1. Эллипсоид.

Свойство 3. В сечении плоскостью $z = h$ при $|h| < c$ располагается эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)} + \frac{x^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)} = 1.$$

Двуполостный гиперболоид. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ двуполостный гиперболоид имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.} \tag{1.3}$$

Двуполостный гиперболоид обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Двуполостный гиперболоид состоит из двух несвязных частей, расположенных при $|z| \geqslant c$, причём каждая из этих двух кусков — это связные поверхности.

□ Действительно, с одной стороны, из уравнения гиперболоида вытекает следующее неравенство:

$$0 \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1 \Rightarrow |z| \geqslant c.$$

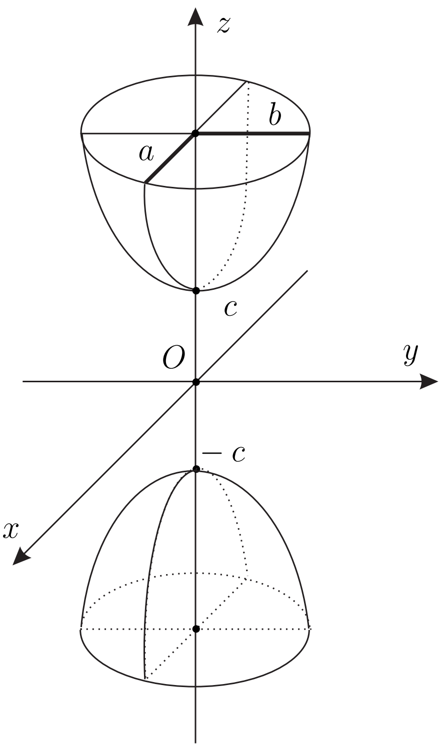

Рис. 2. Двуполостный гиперболоид.

Поэтому в полосе $-c < z < c$ нет точек поверхности (1.3). С другой стороны, если $M(x, y, z)$ — это точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (1.3), то координаты точки $M(x, y, -z)$ тоже удовлетворяют уравнению (1.3). Соединим эти две точки произвольной кривой. Ясно, что эта кривая пересечёт полосу $-c < z < c$. Таким образом, поверхность (1.3) состоит из двух симметричных относительно плоскости Oxy не связанных кусков.

Свойство 2. Центр — точка $O(0, 0, 0)$.

Свойство 3. Сечение плоскостью $z = h$ при $|h| > c$ представляет собою эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1.$$

С в о й с т в о 4. Сечение плоскостью $y = h$ представляет собою гиперболу

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\dfrac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1.$$

О д н о п о л о с т н ы й г и п е р б о л о и д. В каноническай прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ однополостный гиперболоид имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,} \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0. \tag{1.4}$$

Однополостный гиперболоид обладает следующими свойствами:

С в о й с т в о 1. Однополостный гиперболоид представляет собою связную поверхность.

С в о й с т в о 2. Сечение плоскостью $z = h$ представляет собою эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

С в о й с т в о 3. Сечение плоскостью $y = h$ при $|h| < b$ представляет собою гиперболу

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1.$$

С в о й с т в о 4. Сечение плоскостью $y = h$ при $|h| = b$ представляет собою пару пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

С в о й с т в о 5. Сечение плоскостью $y = h$ при $|h| > b$ представляет собою гиперболу

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2}-1}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2}-1}\right)^2} = 1.$$

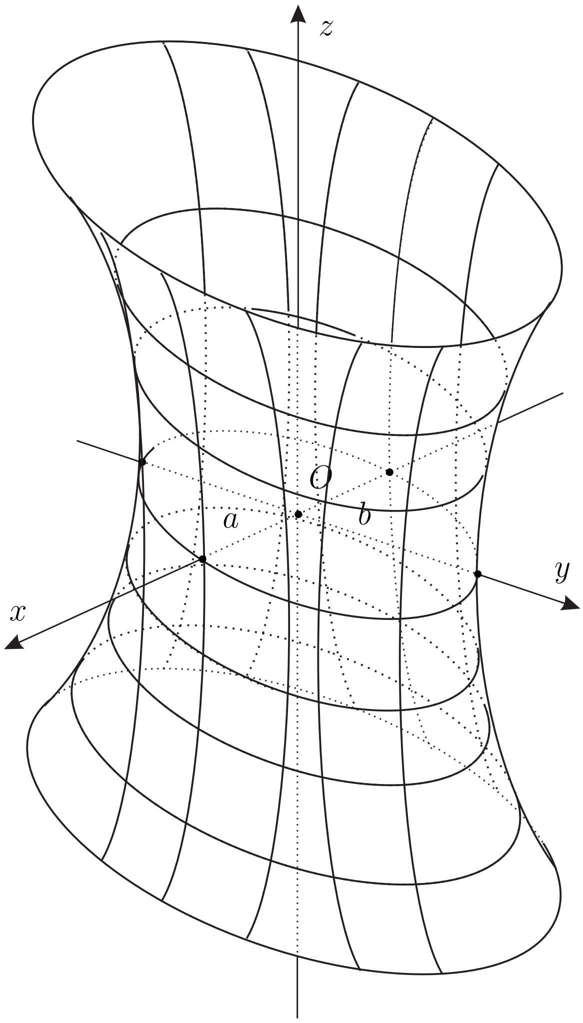

Рис. 3. Однополостный гиперболоид.

Конус. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ уравнение конуса имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,} \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Конус обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Конус — это связная поверхность.

Свойство 2. Центр конуса — точка $O(0, 0, 0)$.

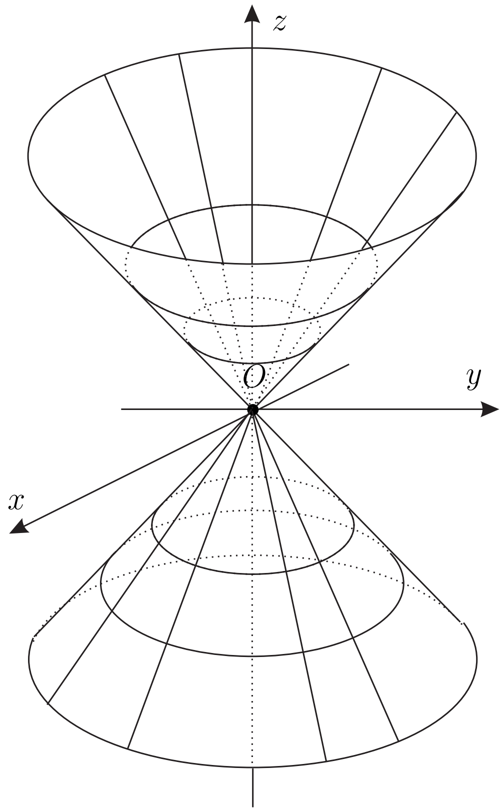

Рис. 4. Конус.

Свойство 3. Сечение конуса плоскостью $z = h \neq 0$ представляет собою эллипс

$$\frac{x^2}{a^2h^2/c^2} + \frac{y^2}{b^2h^2/c^2} = 1.$$

Свойство 4. Сечение конуса плоскостью $y = h \neq 0$ представляет собою гиперболу

$$\frac{z^2}{c^2h^2/b^2} - \frac{x^2}{a^2h^2/b^2} = 1.$$

Свойство 5. Сечение плоскостью $y = 0$ — это пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Свойство 6. Одним из конических сечений является парабола.

Эллиптический параболоид. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ уравнение эллиптического параболоида имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.}$$

Эллиптический параболоид обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Эллиптический параболоид — это связная поверхность.

Свойство 2. Эллиптический параболоид расположен полупространстве $z \geqslant 0$.

Свойство 3. Сечение плоскостью $z=h>0$ пересекает эллиптический параболоид по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2 2h}+\frac{y^2}{b^2 2h}=1.$$

Свойство 4. Плоскости $y=h$ и $x=h$ пересекает эллиптический параболоид по параболам.

Гиперболический параболоид. В <u>канонической</u> прямоугольной декартовой системе координат $\{O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ уравнение гиперболического параболоида имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,} \quad a>0, \quad b>0.$$

Свойство 1. Гиперболический параболоид — это связная поверхность.

Свойство 2. Сечение плоскостью $z=h<0$ пересекает гиперболический параболоид по гиперболе

$$\frac{y^2}{-2hb^2}-\frac{x^2}{-2ha^2}=1.$$

Свойство 3. Сечение плоскостью $z=h>0$ пересекает гиперболический параболоид по гиперболе

$$\frac{x^2}{2ha^2}-\frac{y^2}{2hb^2}=1.$$

Свойство 4. Плоскость $z=0$ пересекает гиперболический параболоид по двум прямым

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Свойство 5. Сечения плоскостями $x=h$ или $y=h$ пересекают гиперболический параболоид по параболам.

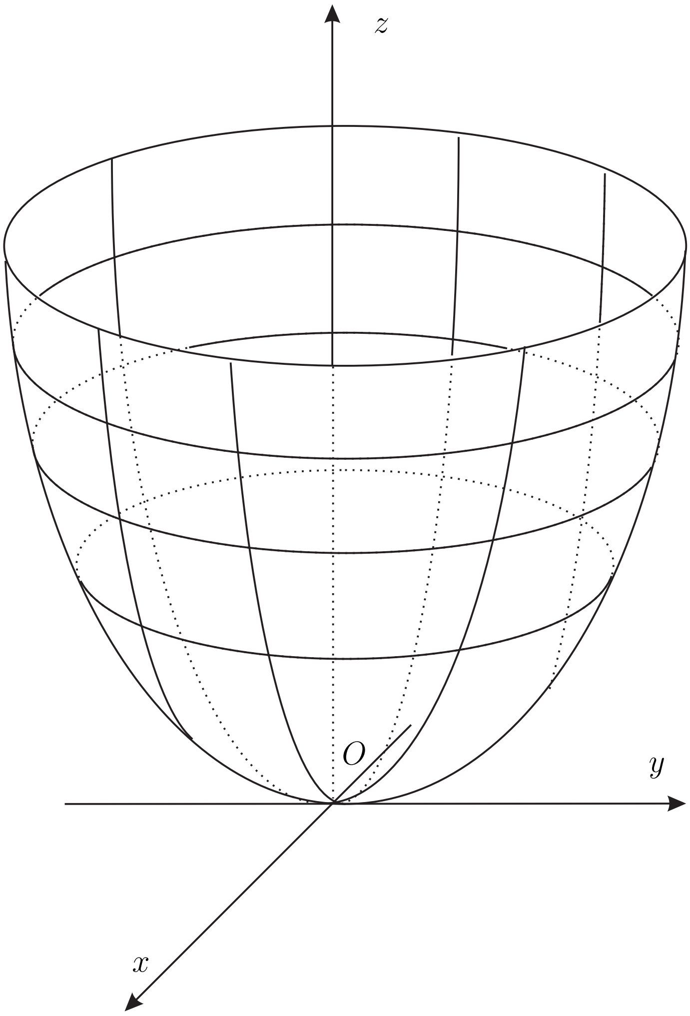

Рис. 5. Эллиптический параболоид.

Эллиптический цилиндр. В каноничeской прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ гиперболический параболоид уравнение эллиптического цилиндра имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,} \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Гиперболический цилиндр. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ уравнение гиперболиче-

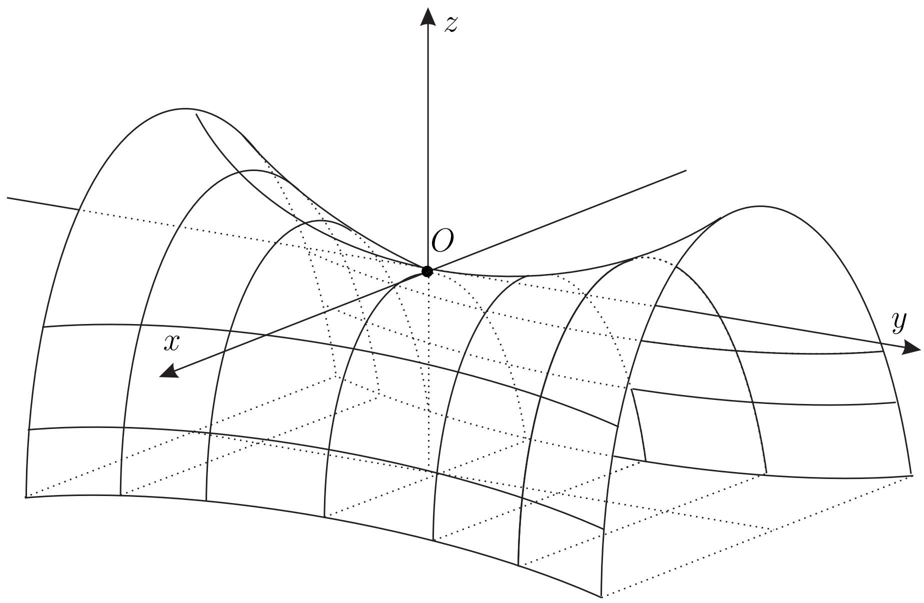

Рис. 6. Гиперболический параболоид.

ского цилиндра имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \quad a > 0, \quad b > 0.$$

П а р а б о л и ч е с к и й ц и л и н д р. В каноническое прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ уравнение параболического цилиндра имеет следующий вид:

$$\boxed{y^2 = 2px.}$$

§ 2. Линейчатые поверхности

Дадим определение цилиндрической поверхности с образующей параллельной оси Oz.

О п р е д е л е н и е 4. *Поверхность S называется цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямая линия, проходящая через эту точку и параллельная оси Oz, целиком лежит на S.*

Л е м м а 1. *Всякое алгебраическое уравнение линии второго порядка вида $F(x, y) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz.*

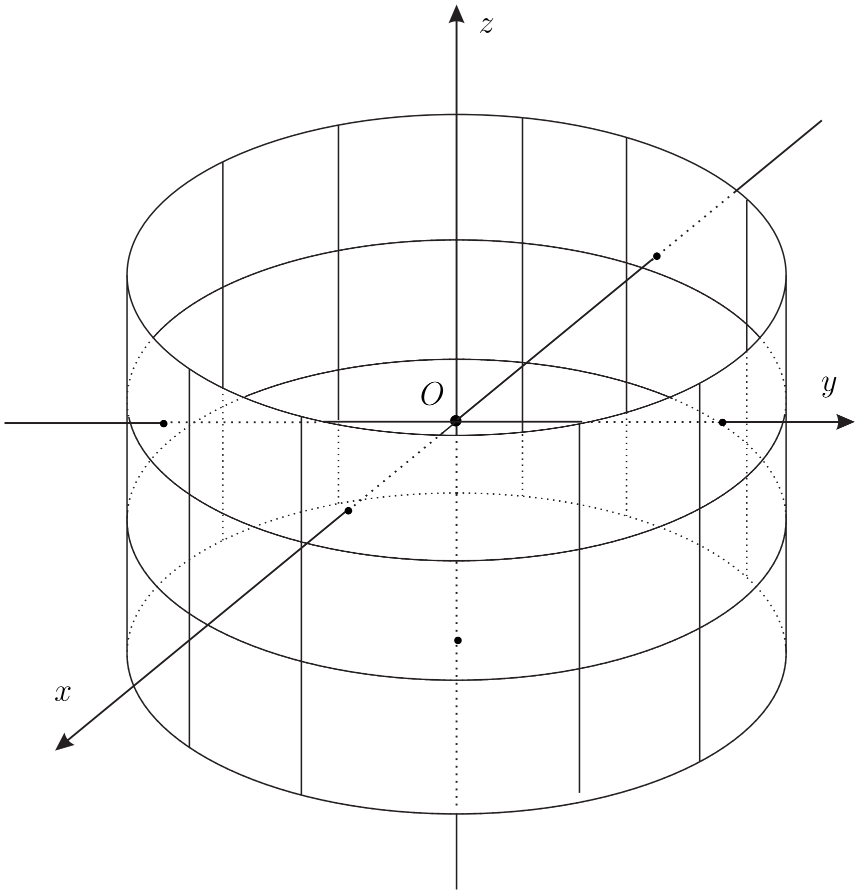

Рис. 7. Эллиптический цилиндр.

Доказательство.

Всякая точка $M_0(x_0, y_0, z)$, для которой имеет место равенство $F(x_0, y_0) = 0$, лежит на поверхности $F(x, y) = 0$. Согласно определению 2 — это поверхность цилиндра.

Лемма доказана.

Определение 5. *Поверхность S называется конической или конусом с вершиной в начале координат O, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности и отличная от начала координат точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямая линия, проходящая через точку M_0 и начало координат O, целиком лежит на поверхности S.*

Пусть $F(x, y, z) = 0$ — это уравнение поверхности второго порядка, причём $F(0, 0, 0) = 0$.

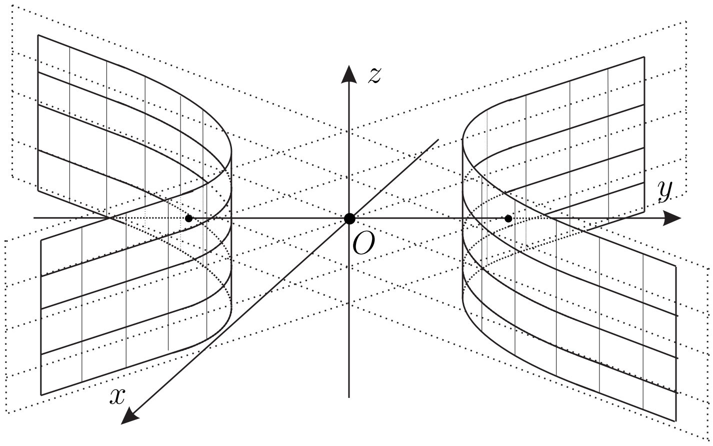

Рис. 8. Гиперболический цилиндр.

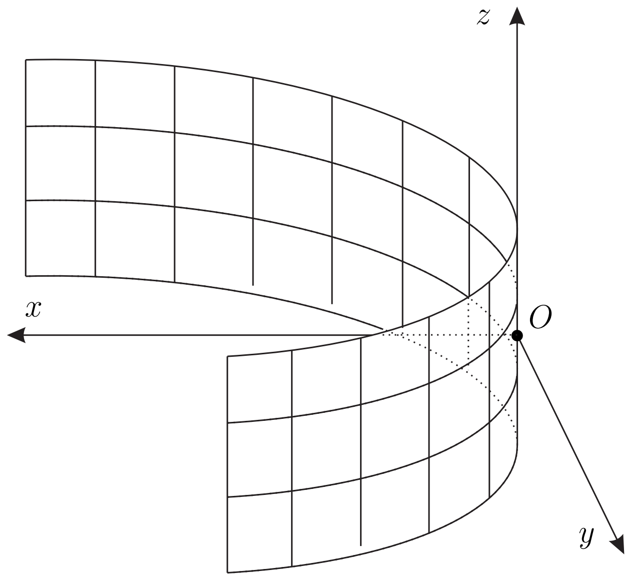

Рис. 9. Параболический цилиндр.

Л е м м а 2. *Если* $F(tx, ty, tz) = t^2 F(x, y, z)$, *то уравнение*

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2.1}$$

описывает конус.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — это точка на поверхности S, определяемой уравнением (2.1), и отличная от точки $O(0, 0, 0)$. Тогда прямая

$$x = x_0 t, \quad y = y_0 t, \quad z = z_0 t \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}$$

целиком лежит на этой поверхности S и, очевидно, проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $O(0, 0, 0)$.

Лемма доказана.

Определение 6. *Поверхность S называется l–кратно линейчатой, если через каждую её точку проходит ровно $l \in \mathbb{N}$ различных прямых, лежащих на этой поверхности, называемых прямолинейными образующими.*

ПРИМЕР 1. Все цилиндры (эллиптический, гиперболический и параболический) являются 1–линейчатыми поверхностями. Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

не является 1–линейчатой поверхностью, поскольку через точку $(0, 0, 0)$ проходит не одна прямая, а бесконечно много прямых.

ПРИМЕР 2. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

является дважды линейчатой поверхностью.

□ Действительно, запишем уравнение однополостного гиперболоида в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на гиперболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \delta\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \gamma\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases}$$

Заметим, что эти две системы относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ) имеют нетривиальные решения $(\alpha_0, \beta_0) \neq (0, 0)$ и $(\gamma_0, \delta_0) \neq (0, 0)$, поскольку определители систем равны нулю. Например, для первой

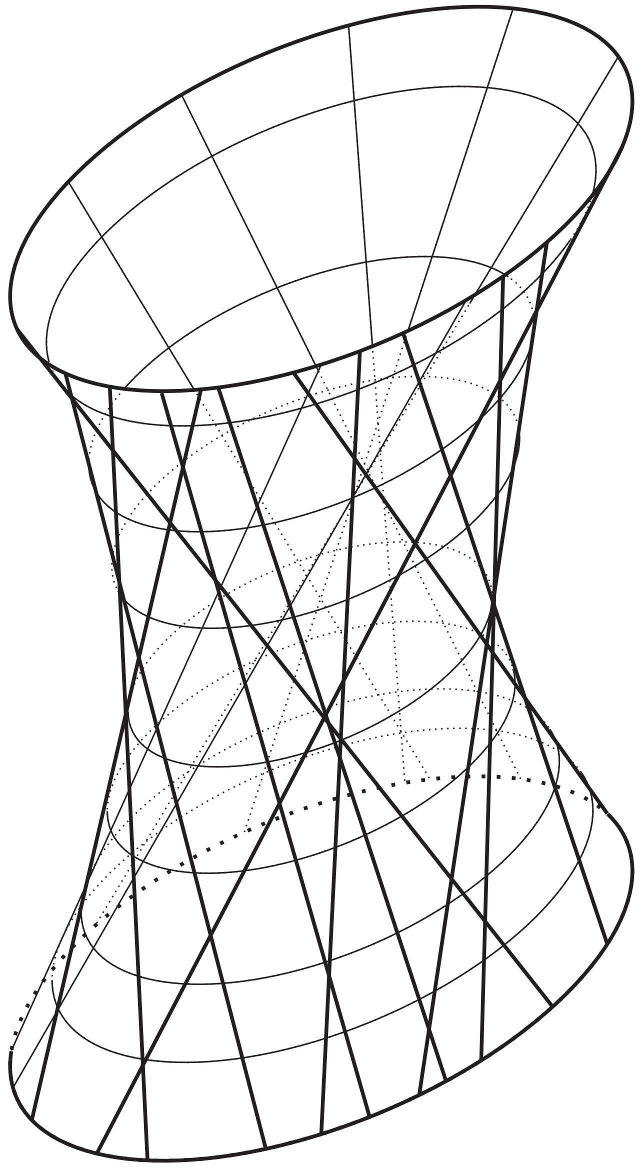

Рис. 10. Дважды линейчатая поверхность однополостного гиперболоида.

системы

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c} & -\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right) \\ -\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right) & \dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c} \end{vmatrix} = \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right) - \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0.$$

Теперь рассмотрим следующие две системы уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_0\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\beta_0\left(1-\frac{y}{b}\right);\\ &\beta_0\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\alpha_0\left(1+\frac{y}{b}\right);\end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma_0\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\delta_0\left(1+\frac{y}{b}\right);\\ &\delta_0\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\gamma_0\left(1-\frac{y}{b}\right).\end{aligned}\right. \tag{2.3}$$

Это и есть уравнения двух прямых, лежащих на поверхности однополостного гиперболоида и проходящих через точку (x_0, y_0, z_0). Однако, осталось доказать, что любые две прямые из семейства (2.2) не пересекаются и любые две прямые из семейства (2.3) не пересекаются. Докажем это, например, для семейства (2.2).

□ Пусть прямые пересекаются в точке $M_1(x_1, y_1 z_1)$ однополостного гиперболоида, тогда определено число

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0}=\frac{\dfrac{x_1}{a}-\dfrac{z_1}{c}}{1-\dfrac{y_1}{b}}, \quad \frac{\beta_0}{\alpha_0}=\frac{1+\dfrac{y_1}{b}}{\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{z_1}{c}},$$

поскольку

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}=1 \Rightarrow \frac{\dfrac{x_1}{a}-\dfrac{z_1}{c}}{1-\dfrac{y_1}{b}}=\frac{1+\dfrac{y_1}{b}}{\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{z_1}{c}}.$$

Поэтому если предположить, что две прямые семейства (2.2) пересекаются в некоторой точке $M_0(x_1, y_1, z_1)$, то эти прямые просто совпадают, поскольку этим двум прямым соответствует одно и тоже соотношение

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0},$$

а, значит, их уравнения совпадают. ⊠

П Р И М Е Р 3. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

является дважды линейчатой поверхностью.

□ Действительно, запишем уравнение гиперболического параболоида в следующем виде:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z.$$

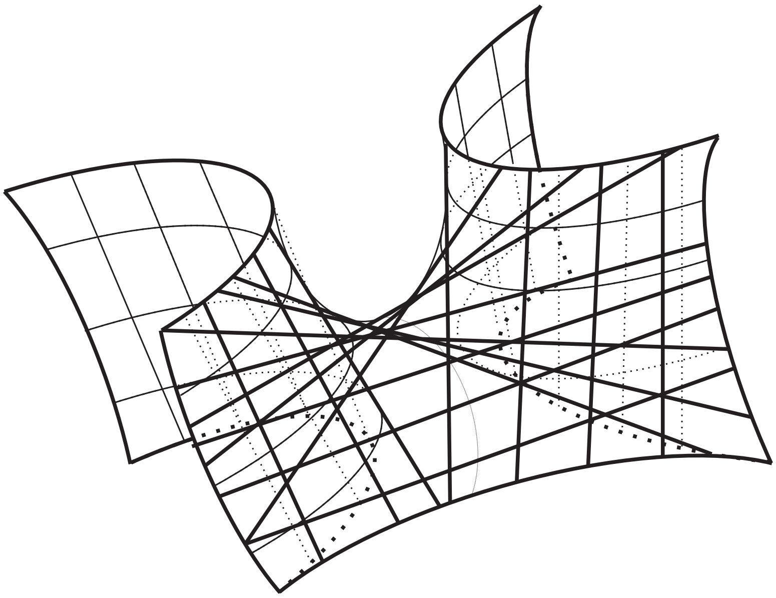

Рис. 11. Дважды линейчатая поверхность гиперболического параболоида.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на гиперболическом параболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\right) = \beta, \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right) = 2\alpha z_0, \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right) = \delta, \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\right) = 2\gamma z_0, \end{array} \right.$$

Определители этих систем равны нулю! Поэтому существуют нетривиальные их решения (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0). Тогда следующие системы уравнений описывают искомые прямые:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \beta_0, \\ \beta_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 2\alpha_0 z, \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \delta_0, \\ \delta_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 2\gamma_0 z. \end{array} \right.$$