

Лекция 12

ПРИВЕДЕНИЕ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

§ 1. Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости

Пусть $\{O, e_1, e_2\}$ — это исходная декартова прямоугольная система координат на ориентированной плоскости, а $\{O', e'_1, e'_2\}$ — это другая прямоугольная декартова система координат. Нужно получить формулы, связывающие координаты одной и той же точки в этих системах координат:

$$M(x, y) \text{ и } M(x', y').$$

Сначала рассмотрим случай $O' = O$. Рассмотрим две системы полярных координат, связанных с системой координат $\{O, e_1, e_2\}$ и «повёрнутой» системой координат $\{O, e'_1, e'_2\}$: Пусть (ρ, φ) — это поляр-

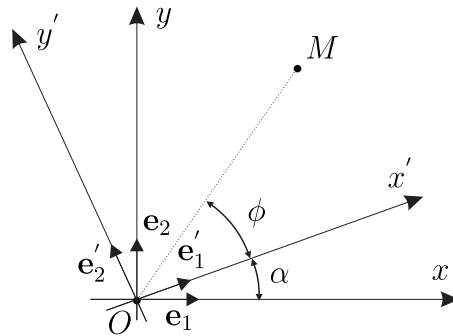


Рис. 1. Системы координат.

ные координаты точки M относительно системы координат $\{O, e'_1, e'_2\}$, т. е. с полярной осью Ox' .¹⁾ Тогда $(\rho, \varphi + \alpha)$ — это полярные координаты

¹⁾ Здесь имеется в виду, что $\varphi \in [0, 2\pi)$ — угол, отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox' до радиус-вектора \vec{OM} .

наты той же точки относительно системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, т. е. с полярной осью Ox . ¹⁾ Тогда имеют место следующие формулы:

$$x = \rho \cos(\varphi + \alpha), \quad y = \rho \sin(\varphi + \alpha), \quad (1.1)$$

$$x' = \rho \cos \varphi, \quad y' = \rho \sin \varphi. \quad (1.2)$$

Справедливы следующие две цепочки равенств:

$$x = \rho \cos(\varphi + \alpha) = \rho \cos \varphi \cos \alpha - \rho \sin \varphi \sin \alpha = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad (1.3)$$

$$y = \rho \sin(\varphi + \alpha) = \rho \sin \varphi \cos \alpha + \rho \cos \varphi \sin \alpha = y' \cos \alpha + x' \sin \alpha. \quad (1.4)$$

Итоговые формулы (1.3) и (1.4) можно записать в следующем компактном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Теперь опять в случае $O' = O$ нужно получить формулы, связывающие базисы $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$: По правилу треугольника имеем

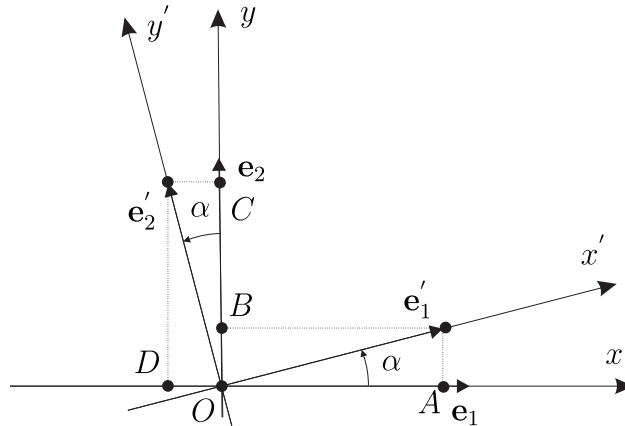


Рис. 2. Базисные векторы.

$$\mathbf{e}'_1 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OA} = OA \cdot \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{OB} = OB \cdot \mathbf{e}_2. \quad (1.6)$$

Справедливы следующие равенства:

$$OA = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_1) = |\mathbf{e}'_1| |\mathbf{e}_1| \cos \alpha = \cos \alpha, \quad (1.7)$$

$$OB = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}'_1| |\mathbf{e}_2| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha, \quad (1.8)$$

¹⁾ Угол $\alpha \in [0, 2\pi)$ и отсчитывается от оси Ox до оси Ox' против часовой стрелки.

1. Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости 3

где угол $\alpha \in [0, 2\pi)$ — угол между осью Ox и осью Ox' , отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox . Следовательно, из равенств (1.6)–(1.8) получаем равенство

$$\mathbf{e}'_1 = \cos \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \cdot \mathbf{e}_2. \quad (1.9)$$

Для вектора \mathbf{e}'_2 справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{e}'_2 = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}. \quad (1.10)$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{OC} = OC \cdot \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{OD} = OD \cdot \mathbf{e}_1, \quad (1.11)$$

$$OC = (\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}'_2| |\mathbf{e}_2| \cos \alpha, \quad (1.12)$$

$$OD = (\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_1) = |\mathbf{e}'_2| |\mathbf{e}_1| \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right). \quad (1.13)$$

Итак, из равенств (1.10)–(1.13) вытекает искомое выражение

$$\mathbf{e}'_2 = -\sin \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \cdot \mathbf{e}_2. \quad (1.14)$$

Равенства (1.9) и (1.14) можно переписать в компактной форме с учётом правила умножения строчки на матрицу:

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

□ Действительно, согласно правилу «строчка на столбец» получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} &= \\ &= (\mathbf{e}_1 \cdot \cos \alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \sin \alpha, -\mathbf{e}_1 \cdot \sin \alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \cos \alpha), \end{aligned} \quad (1.16)$$

а из равенства строчек

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{e}_1 \cdot \cos \alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \sin \alpha, -\mathbf{e}_1 \cdot \sin \alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \cos \alpha)$$

мы получим равенства (1.9) и (1.14). \square

Теперь мы рассмотрим общую ситуацию: $O' \neq O$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \quad (1.17)$$

Пусть

$$\overrightarrow{OO'} = \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \beta \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

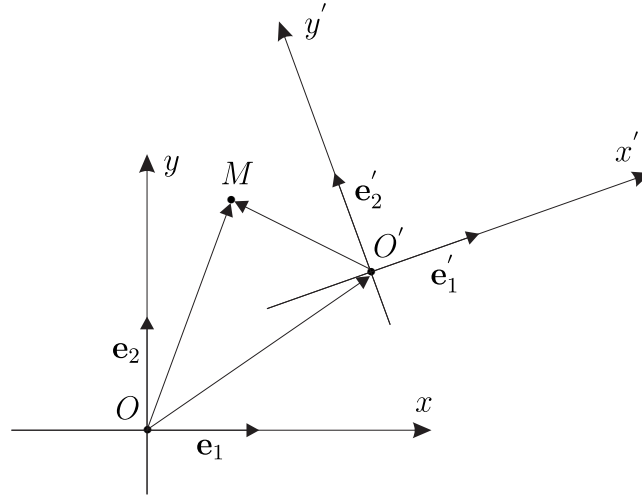


Рис. 3. Поворот и сдвиг системы координат.

$$\overrightarrow{O'M} = x' \cdot \mathbf{e}'_1 + y' \cdot \mathbf{e}'_2 = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Из равенств (1.17)–(1.20) и из выражения (1.15) вытекает следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right]. \quad (1.22)$$

□ Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} &= c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + d_1 \mathbf{e}_1 + d_2 \mathbf{e}_2 = \\ &= (c_1 + d_1) \mathbf{e}_1 + (c_2 + d_2) \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \end{pmatrix} = \\ &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right]. \quad \square \end{aligned}$$

Произведение

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

2. Матричная форма записи преобразований на плоскости в однородных координатах⁵

— это некоторый столбец. Поэтому из равенства (1.21) в силу свойства (1.22) приходим к следующему равенству:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \quad (1.23)$$

где

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Заметим, что согласно правилу умножения «строка на столбец» имеем

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2,$$

а в силу (1.23) мы приходим к следующему равенству:

$$z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \quad (1.25)$$

которое в силу линейной независимости базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ эквивалентно равенствам

$$z_1 = z_2 = 0.$$

Отсюда и из (1.24) получаем искомое равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

или в развёрнутой форме

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \cos \alpha \cdot x' - \sin \alpha \cdot y', \\ y &= y_0 + \sin \alpha \cdot x' + \cos \alpha \cdot y'. \end{aligned}$$

§ 2. Матричная форма записи преобразований на плоскости в однородных координатах

Введём следующие обозначения:

$$R := \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Тогда матричное уравнение (1.26) с учётом обозначений (2.1), (2.2) можно переписать в следующей компактной матричной форме записи:

$$X = X_0 + RX'. \quad (2.3)$$

Отметим, что справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Имеет место равенства $|R| = 1$ и $R^T = R^{-1}$.*

Доказательство.

Первое утверждение тривиально. Для доказательства второго нужно заметить, что преобразование R — преобразование поворота на угол $\alpha \in [0, 2\pi)$, а обратное преобразование — поворот на угол $-\alpha$. Следовательно,

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = R^T.$$

Хотя, можно проверить и непосредственно. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} R^T R &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ R R^T &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

С учётом результата этой леммы справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} X - X_0 = R X' &\Leftrightarrow X' = R^{-1}(X - X_0) = R^T(X - X_0) = \\ &= -R^T X_0 + R^T X \Leftrightarrow X' = X'_0 + R^T X, \quad X'_0 = -R^T X_0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Запись преобразований плоскости в однородных координатах. Выпишем следующие столбцы:

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\|, \quad Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c} X' \\ 1 \end{array} \right\|. \quad (2.5)$$

Введём теперь расширенную матрицу преобразования

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & x_0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|. \quad (2.6)$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. Матрица P обратима и обратная имеет следующий вид:

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & \sin \alpha & x'_0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & y'_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|. \quad (2.7)$$

Доказательство.

Используя правило перемножения блочных матриц, получим следующую цепочку равенств:

$$P^{-1} \cdot P = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} R^T R & R^T X_0 - R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P \cdot P^{-1} &= \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{c|c} RR^T & -RR^T X_0 + X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Справедливы следующие равенства:

$$Z = PZ', \quad Z' = P^{-1}Z.$$

Доказательство.

$$PZ' = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X' \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} R \cdot X' + X_0 \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| = Z;$$

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot Z &= \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} R^T \cdot X - R^T \cdot X_0 \\ 1 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{c} R^T \cdot (X - X_0) \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} X' \\ 1 \end{array} \right\| = Z'. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Справедливо равенство

$$P^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|c} \cos \alpha & \sin \alpha & x'_0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & y'_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

где

$$X'_0 = -R^T X_0,$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} x'_0 = -x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha, \\ y'_0 = x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha. \end{cases}$$

§ 3. Уравнения квадрики на плоскости

Пусть на ориентированной плоскости задана декартова прямоугольная система координат $\{O, e_1, e_2\}$.

Определение 1. Линия на плоскости, координаты точек $M(x, y)$ которой и только они являются решениями уравнения

$$F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \quad (3.1)$$

причём коэффициенты этого уравнения вещественные числа и

$$|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| > 0$$

называется уравнением линии второго порядка или квадратикой.

Введём следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad B = (b_1, b_2), \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.1) квадратки можно записать в следующем виде:

$$X^T A X + 2B X + c = 0. \quad (3.2)$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$X^T A X = (x, y) \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{12}x + a_{22}y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{12}yx + a_{22}y^2. \quad (3.3)$$

⊠

Уравнение квадратки в однородных координатах. Рассмотрим следующие блочные матрицы:

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\|, \quad Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\|. \quad (3.4)$$

Тогда уравнение квадратки (3.2) можно записать в следующем виде:

$$Z^T D Z = 0. \quad (3.5)$$

□ Действительно,

$$\begin{aligned} \| X^T | 1 \| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| &= \\ &= \left\| X^T A + B | X^T B^T + c \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| = \\ &= X^T A X + B X + X^T B^T + c = X^T A X + 2B X + c, \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством $BX = (BX)^T = X^T B^T$, которое справедливо, поскольку произведение BX — число. ⊠

§ 4. Ортогональные преобразования уравнения квадрики

Рассмотрим на плоскости помимо $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ещё одну декартову прямоугольную систему координат $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, полученную из $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ параллельным переносом и поворотом. Напомним, что однородные координаты в этих системах координат связаны соотношением

$$Z = PZ', \quad P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & x_0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad (4.1)$$

где

$$Z = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ 1 \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\|, \quad Z' = \left(\begin{array}{c} x' \\ y' \\ 1 \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c} X' \\ 1 \end{array} \right\|.$$

После подстановки в уравнение (3.5) преобразования (4.1) получим следующую цепочку равенств:

$$0 = Z^T D Z = Z'^T P^T D P Z' = Z'^T D' Z',$$

где

$$D' = P^T D P, \quad D' = \left\| \begin{array}{c|c} A' & B'^T \\ \hline B' & c' \end{array} \right\|. \quad (4.2)$$

$$\square \quad P^T \cdot D = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & O \\ \hline X_0^T & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} R^T A & R^T B^T \\ \hline X_0^T A + B & X_0^T B^T + c \end{array} \right\|,$$

$$\begin{aligned} (P^T \cdot D) \cdot P &= \left\| \begin{array}{c|c} R^T A & R^T B^T \\ \hline X_0^T A + B & X_0^T B^T + c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{c|c} R^T A R & R^T A X_0 + R^T B^T \\ \hline X_0^T A R + B R & X_0^T A X_0 + B X_0 + X_0^T B^T + c \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{c|c} R^T A R & R^T (A X_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T A + B) R & X_0^T A X_0 + 2 B X_0 + c \end{array} \right\|, \quad (4.3) \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством $X_0^T B^T = B X_0$, поскольку это матрица размера 1×1 — число, а также тем, что $A^T = A$. Сравнивая формулы (4.2) и (4.3) мы получим равенства

$$A' = R^T A R, \quad B' = (X_0^T A + B) R, \quad c' = X_0^T A X_0 + 2 B X_0 + c, \quad (4.4)$$

а уравнение квадрики в новой системе координат примет следующий вид:

$$X'^T A' X' + 2 B' X' + c' = 0. \quad \square \quad (4.5)$$

Наблюдение 1. Матрица A меняется только при повороте.

Наблюдение 2. Матрица B меняется и при повороте и при параллельном переносе.

Наблюдение 3. Свободный член c меняется только при параллельном переносе.

Ортогональные инварианты уравнения квадрики.

Теорема 1. При ортогональных преобразованиях декартовой прямоугольной системы координат величины

$$S := \operatorname{tr} A, \quad \delta := \det A, \quad \Delta := \det D \quad (4.6)$$

не изменяются.

Доказательство.

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}(R^T AR) = \operatorname{tr}(ARR^T) = \operatorname{tr}(ARR^{-1}) = \operatorname{tr} A;$$

$$\det A' = \det(R^T AR) = \det R^T \det A \det R = \det A, \quad \det R = 1;$$

$$\det D' = \det(P^T DP) = \det P^T \det D \det P = \det D, \quad \det P = 1.$$

Теорема доказана.

Определение 2. Величины (4.6) называются ортогональными инвариантами.

§ 5. Уничтожение слагаемого $2a_{12}xy$ при помощи поворота на угол α

Задача заключается в том, чтобы найти поворот на такой угол α , при котором справедливо равенство

$$A' = R^T AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Лемма 4. При наличии в уравнении квадрики (3.1) слагаемого $2a_{12}xy$ необходимо выполняется условие $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ¹⁾.

Доказательство.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда

$$A = (R^T)^{-1} A' R^{-1} = RA'R^{-1} = R(\lambda \mathbb{I})R^{-1} = \lambda RR^{-1} = \lambda \mathbb{I}.$$

Лемма доказана.

Замечание 2. Числа λ_1 и λ_2 могут быть найдены с помощью ортогональных инвариантов.

□ Действительно, имеем

$$S = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \delta = \det A = \det A' = \lambda_1 \lambda_2.$$

¹⁾ Отметим, что это утверждение имеет место только в прямоугольных декартовых системах координат.

Поэтому по теореме Виета числа λ_1 и λ_2 являются решениями следующего квадратного уравнения:

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \quad \square \quad (5.2)$$

Характеристический многочлен. Итак, при ортогональном преобразовании R ($R^T = R^{-1}$) матрица A квадратики преобразуется по следующему закону:

$$A' = R^T A R \Leftrightarrow R A' = A R, \quad (5.3)$$

поскольку $R^T = R^{-1}$. Нам нужно найти такой новый базис e'_1, e'_2 , в котором матрица A' имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся равенством (5.3) и получим следующее выражение:

$$A \|R_1, R_2\| = \|R_1, R_2\| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \|\lambda_1 R_1, \lambda_2 R_2\|. \quad (5.4)$$

Заметим теперь, что согласно формуле произведения матрицы A на матрицу $R = \|R_1, R_2\|$ имеет место равенство

$$A R = A \|R_1, R_2\| = \|A R_1, A R_2\|. \quad (5.5)$$

Из равенств (5.4) и (5.5) мы приходим к равенствам

$$\|A R_1, A R_2\| = \|\lambda_1 R_1, \lambda_2 R_2\| \Leftrightarrow A R_k = \lambda_k R_k \quad \text{при } k = 1, 2. \quad (5.6)$$

Уравнения (5.6) можно переписать в следующем виде:

$$(A - \lambda_k \mathbb{I}) R_k = O \quad \text{при } k = 1, 2. \quad (5.7)$$

Нетривиальные решения систем уравнений (5.7) существуют тогда и только тогда, когда λ_1 и λ_2 являются решениями следующего уравнения:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0. \quad (5.8)$$

Определение 3. Уравнение (5.8) называется характеристическим уравнением или характеристическим многочленом.

Вычисление определителя в характеристическом уравнении.

$$\begin{aligned} \square \quad \det(A - \lambda \mathbb{I}) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \\ &= \lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \quad \square \quad (5.9) \end{aligned}$$

Таким образом, мы установили, что числа λ_1 и λ_2 являются решениями уравнения (5.8) и только они.

Определение 4. Корни λ_1 и λ_2 характеристического многочлена (5.8) называются собственными значениями матрицы A , а ненулевые решения R_1 и R_2 уравнения

$$(A - \lambda \mathbb{I}) X = O$$

называются собственными векторами.

Поэтому, например,

$$\begin{aligned} AR_2 = \lambda_2 R_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a_{11} \sin \alpha + a_{12} \cos \alpha = -\lambda_2 \sin \alpha, \\ -a_{12} \sin \alpha + a_{22} \cos \alpha = \lambda_2 \cos \alpha, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} -a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + a_{12} \cos^2 \alpha &= \\ &= a_{12} \sin^2 \alpha - a_{22} \sin \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_{12} \cos(2\alpha) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2} \sin(2\alpha), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\cot 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \quad (5.12)$$

§ 6. Уничтожение линейных слагаемых $2b_1x + 2b_2y$

Из полученных ранее формул (4.4) вытекает, что при общем ортогональном преобразовании матрица-строка $B = (b_1, b_2)$ преобразуется по следующему закону:

$$B' = (X_0^T A + B)R. \quad (6.1)$$

Для уничтожения в уравнении квадратики (3.2) линейного слагаемого

$$2BX$$

необходимо и достаточно потребовать, чтобы $B' = O$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$B' = O \Leftrightarrow (X_0^T A + B)R = O \Leftrightarrow X_0^T A + B = O \Leftrightarrow A^T X_0 = -B^T. \quad (6.2)$$

Поскольку $A^T = A$, то мы приходим к искомому уравнению

$$AX_0 = -B^T, \quad B \neq O. \quad (6.3)$$

Ясно, что эта квадратная неоднородная система линейных уравнений разрешима тогда и только тогда, когда $\delta = \det A \neq 0$.

Случай центральных квадрик. Рассмотрим сначала случай $\delta \neq 0$. В этом случае имеет место равенство

$$X_0 = -A^{-1}B^T,$$

из которого вытекает явный вид искомого преобразования

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} R & -A^{-1}B^T \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

В новых координатах $X' = (x', y')$ после этого преобразования уравнение квадрики примет следующий вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0, \quad c' = X_0^T A X_0 + 2B X_0 + c. \quad (6.4)$$

Матрица D' при этом имеет следующий вид:

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c' \end{array} \right), \quad (6.5)$$

где выражение для c' можно упростить.

$$\square \quad c' = X_0^T A X_0 + 2B X_0 + c = -X_0^T B^T + 2B X_0 + c = B X_0 + c. \quad \square$$

Кроме того, из выражения (6.5) имеют место следующие равенства:

$$\Delta = \det D' = \lambda_1 \lambda_2 c' = \delta c' \Rightarrow c' = \frac{\Delta}{\delta}. \quad (6.6)$$

Следовательно, уравнение (6.4) с учётом (6.6) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \quad (6.7)$$

Определение 5. Алгебраическая линия второго порядка называется центральной, если $\det A \neq 0$.

§ 7. Уравнения эллиптического типа

Рассмотрим случай $\delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$. В этом случае, очевидно, числа λ_1 и λ_2 одного знака.

1. Вещественный эллипс. Пусть c' и $\lambda_{1,2}$ имеют разные знаки. Тогда уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = -\frac{c'}{\lambda_1} = -\frac{\Delta}{\delta \lambda_1} > 0, \quad b^2 = -\frac{c'}{\lambda_2} = -\frac{\Delta}{\delta \lambda_2} > 0. \quad (7.1)$$

2. Мнимый эллипс. Пусть c' и $\lambda_{1,2}$ одного знака. Тогда уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1, \quad a^2 = \frac{c'}{\lambda_1} = \frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = \frac{c'}{\lambda_2} = \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0. \quad (7.2)$$

3. Пара мнимых прямых. Пусть $c' = 0$ и уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$a^2 x'^2 + b^2 y'^2 = 0, \quad a = \sqrt{|\lambda_1|}, \quad b = \sqrt{|\lambda_2|}. \quad (7.3)$$

§ 8. Уравнения гиперболического типа

Рассмотрим теперь случай $\delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2 < 0$. Это случай, когда числа λ_1 и λ_2 разных знаков.

4. Гипербола. Предположим, что $\Delta = c' \delta \neq 0$. Тогда $c' \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что знаки чисел c' и λ_1 разные, а знаки чисел c' и λ_2 одинаковые. Поэтому уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = -\frac{c'}{\lambda_1} = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = \frac{c'}{\lambda_2} = \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0. \quad (8.1)$$

5. Пара пересекающихся прямых. Предположим, что $\Delta = c' \delta = 0 \Rightarrow c' = 0$. Это вырожденный случай. Тогда уравнение (6.7) можно привести к следующему виду:

$$a^2 x'^2 - b^2 y'^2 = 0, \quad a^2 = |\lambda_1|, \quad b^2 = |\lambda_2|. \quad (8.2)$$

§ 9. Уравнения параболического типа

Рассмотрим теперь вырожденный случай $\delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0$. Поскольку мы рассматриваем алгебраические уравнения второго порядка, то это означает, что только одно из чисел λ_1 и λ_2 равно нулю. Пусть, например, $\lambda_1 = 0$. Тогда

$$S = \operatorname{tr} A = \lambda_2, \quad D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & S & b'_2 \\ \hline b'_1 & b'_2 & c' \end{array} \right), \quad \Delta = \det D' = -\left(b'_1\right)^2 S. \quad (9.1)$$

Поскольку рассматривается случай $\det A = 0$, то система уравнений $Ax_0 = -B^T$ может либо быть несовместной, либо иметь бесконечное множество решений. Это случай *нецентральных кривых на плоскости*. Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 5. Коэффициент b'_1 выражается формулой

$$b'_1 = \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{S}} \quad (9.2)$$

и его абсолютная величина $|b'_1|$ является инвариантом относительно сдвигов.

Доказательство.

Если мы используем только преобразование параллельного переноса системы координат, то при этом матрица D' после преобразования вида (формально при $\alpha = 0$)

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

преобразуется только к матрице аналогичного вида:

$$D'' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b''_1 \\ 0 & S & b''_2 \\ b''_1 & b''_2 & c'' \end{array} \right).$$

При этом имеем

$$\Delta = \det D'' = -(b''_1)^2 S, \quad \Delta = \det D' = -(b'_1)^2 S \Rightarrow |b''_1| = |b'_1|.$$

Лемма доказана.

6. Параболический тип. Предположим, что $\Delta \neq 0$. Поэтому согласно лемме 5 какие бы мы в дальнейшем не делали бы параллельный перенос системы координат (сдвиг) коэффициент $b'_1 \neq 0$ преобразуется в коэффициент $b''_1 = \pm b'_1 \neq 0$. Пусть мы сделали уже поворот на найденный угол α и уничтожили слагаемое $2a_{12}xy$. В однородных координатах чистый поворот имеет следующий вид:

$$D' = P_1^T D P_1, \quad P_1 = \left\| \begin{array}{c|c} R & O \\ \hline O & I \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

При этом в однородных координатах мы пришли к матрице

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & S & b'_2 \\ b'_1 & b'_2 & c' \end{array} \right), \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad B' = (b'_1, b'_2), \quad b'_1 \neq 0.$$

Тогда уравнение для центра примет следующий вид:

$$A' X_0 = -B'^T = - \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\text{rang } A' = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} < \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b'_1 \\ 0 & S & -b'_2 \end{pmatrix}, \quad \text{если } b'_1 \neq 0.$$

Итак, уравнение центра не имеет решений. После поворота R (пока без сдвига) уравнение квадрики примет следующий вид:

$$S y'^2 + 2b'_1 x' + 2b'_2 y' + c = 0, \quad b'_1 \neq 0. \quad (9.3)$$

Это уравнение после выделения полного квадрата примет следующий вид:

$$S \left(y' + \frac{b'_2}{S} \right)^2 + 2b'_1 \left(x' + \frac{c}{2b'_1} - \frac{b'_2{}^2}{2b'_1 S} \right) = 0.$$

Вводя новые переменные

$$\begin{cases} x'' = \pm \left(x' + \frac{c}{2b'_1} - \frac{b'_2{}^2}{2b'_1 S} \right), \\ y'' = y' + \frac{b'_2}{S}, \end{cases} \quad (9.4)$$

получим уравнение

$$S y''^2 + 2b'_1 x'' = 0, \quad (9.5)$$

а затем выбираем знак \pm так, чтобы получилось каноническое уравнение параболы

$$y''^2 = 2px'', \quad p = \left| \frac{b'_1}{S} \right|. \quad (9.6)$$

З а м е ч а н и е 3. Заметим, что после преобразования (9.4) матрица квадрики в системе координат $Ox''y''$ примет следующий вид:

$$D'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & S & 0 \\ b'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вырожденный параболический тип. Пусть $\Delta = \det D = 0$. Следовательно, система уравнений центра

$$AX_0 = -B^T \quad (9.7)$$

имеет бесконечно много решений. Выберем какое-либо из них X_0 . Поэтому после поворота и сдвига, определяемого матрицей

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad D' = P^T D P.$$

получим уравнение кривой второго порядка следующего вида:

$$S y'^2 + c' = 0, \quad (9.8)$$

с матрицей D' в однородных координатах следующего вида:

$$D' = P^T D P = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{array} \right). \quad (9.9)$$

Отметим, что

$$c' = X_0^T A X_0 + 2B X_0 + c. \quad (9.10)$$

Отсюда с учётом уравнения (9.7) получим равенство

$$c' = -X_0^T B^T + 2B X_0 + c = B X_0 + c, \quad (9.11)$$

где $X_0^T B^T = (B X_0)^T = B X_0$, поскольку произведение $B X_0$ — число. Из вида выражения (9.11) может сложиться впечатление, что c' зависит от выбора X_0 . Однако, это не так. Пусть X_1 — другое решение уравнения (9.7):

$$A X_1 = -B^T \Rightarrow c'' = B X_1 + c. \quad (9.12)$$

Из уравнений (9.7) и (9.11) вытекают соотношения:

$$\begin{aligned} X_1^T A X_0 = -X_1^T B^T &\Leftrightarrow X_1^T A^T X_0 = -X_1^T B^T \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -B X_0 = -X_1^T B^T = -B X_1 \Leftrightarrow B X_0 = B X_1 \Rightarrow c'' = c'. \end{aligned} \quad (9.13)$$

7. Вырожденный тип. Две параллельные прямые. Числа S и c' имеют разные знаки, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y'^2 - a^2 = 0, \quad a^2 = \left| \frac{c'}{S} \right|. \quad (9.14)$$

8. Вырожденный тип. Две мнимые параллельные прямые. Числа S и c' имеют одинаковые знаки, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y'^2 + a^2 = 0, \quad a^2 = \frac{c'}{S}. \quad (9.15)$$

9. Вырожденный тип. Две совпадающие прямые. Если $c' = 0$, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y'^2 = 0. \quad (9.16)$$