0.5 setgray0 0.5 setgray1

Консультация 5

ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

ЗАДАЧА 1. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC точками P, Q, R разделены в отношениях

$$\frac{BP}{PC} = \lambda, \quad \frac{CQ}{QA} = \mu, \quad \frac{AR}{RB} = \nu.$$

Найти отношение площади треугольника PQR к площади треугольника ABC.

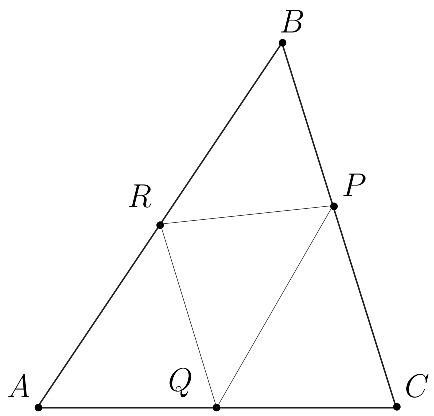

Рис. 1. К задаче 171.

Решение. Введём векторы

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{AC}.$$

Тогда согласно условиям задачи имеем

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{1+\lambda}, \quad \overrightarrow{AR} = \frac{\nu}{1+\nu}\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{1+\mu}\mathbf{b}.$$

При этом

$$\overrightarrow{S}_{PQR} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}] = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AR}] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1+\nu\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\nu)(1+\mu)}[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \frac{1+\nu\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\nu)(1+\mu)}\overrightarrow{S}_{ABC}.$$

Итак,

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{1+\nu\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\nu)(1+\mu)}.$$

ЗАДАЧА 2. Даны две упорядоченные тройки векторов (первая тройка векторов не компланарная)

$$\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\} \quad \text{и} \quad \left\{\mathbf{a}^1,\mathbf{a}^2,\mathbf{a}^3\right\},$$

в которых векторы с одинаковыми номерами образуют острый угол, а векторы с разными номерами перпендикулярны друг к другу. Установить, имеют ли эти тройки векторов одинаковую или противоположную ориентацию.

Решение. Поскольку тройка $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ является не компланарной, то справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{a}^1 = \lambda_1[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3], \quad \mathbf{a}^2 = \lambda_2[\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1], \quad \mathbf{a}^3 = \lambda_3[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2]$$

при некоторых λ_1, λ_2 и λ_3 не равных нулю. По условию задачи имеем

$$(\mathbf{a}_k,\mathbf{a}^k) > 0 \Rightarrow \lambda_k(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3) > 0 \quad \text{при} \quad k \in \overline{1,3}.$$

Отсюда, в частности,

$$\frac{\lambda_3}{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)} > 0.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$[\mathbf{a}^2,\mathbf{a}^3] = \lambda_2\lambda_3[[\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1],[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2]] =$$
$$= \lambda_2\lambda_3\left(\mathbf{a}_1([\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1],\mathbf{a}_2) - \mathbf{a}_2([\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1],\mathbf{a}_1)\right) = \lambda_2\lambda_3\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3),$$

$$(\mathbf{a}^1,[\mathbf{a}^2,\mathbf{a}^3]) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)^2 =$$
$$= \lambda_1\lambda_2(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)^2\frac{\lambda_3}{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3) = \gamma(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3), \quad \gamma > 0.$$

Ориентация одинаковая и вторая тройка тоже некомпланарная.

ЗАДАЧА 3. Решите векторное уравнение $[\mathbf{x},\mathbf{a}] = \mathbf{b}$ (здесь $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b}$ — заданные векторы) и укажите необходимое и достаточное условие существования решения.

Решение. Докажем, что необходимым и достаточным условием разрешимости этого уравнения является условие $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$. Действительно, пусть существует решение $\mathbf{x}_0$ этого уравнения, тогда, очевидно, что

$$0 = (\mathbf{a},[\mathbf{x}_0,\mathbf{a}]) = (\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Необходимость доказана. Докажем достаточность. Пусть выполнено это условие, тогда
$$\mathbf{x}_0 = \frac{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{(\mathbf{a},\mathbf{a})}$$
решение уравнения $[\mathbf{x_0},\mathbf{a}] = \mathbf{b}$. Действительно, имеем
$$[\mathbf{x_0},\mathbf{a}] = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{a},\mathbf{a})}[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{a}] = -\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{a},\mathbf{a})}\left(\mathbf{a}(\mathbf{a},\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{a})\right) = \mathbf{b}.$$

З А Д А Ч А 4. Рассматривается система уравнений
$$[\mathbf{a_1},\mathbf{x}] = \mathbf{b_1}, \quad [\mathbf{a_2},\mathbf{x}] = \mathbf{b_2},$$
где $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ не коллинеарны. Покажите, что условия
$$(\mathbf{a_1},\mathbf{b_1}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{a_2},\mathbf{b_2}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{a_1},\mathbf{b_2}) + (\mathbf{a_2},\mathbf{b_1}) = \mathbf{0}$$
необходимы для разрешимости этой системы. Найдите общее решение этой системы при выполнении этих условий и дополнительного условия $(\mathbf{a_1},\mathbf{b_2}) \neq \mathbf{0}$.

Р е ш е н и е. В силу решения задачи 3 имеем необходимое условие разрешимости каждого из уравнений следующие:
$$(\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1) = 0, \quad (\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_2) = 0.$$
При выполнении этих условий решение каждого из уравнений можно записать в следующем виде:
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_1 t, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_2\tau,$$
где
$$\mathbf{x}_1 = \frac{[\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1]}{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1)}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{[\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_2]}{(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2)}.$$
Если решение системы уравнений существует, то при некоторых t_0 и τ_0 имеем
$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_1 t_0 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_2\tau_0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_2\tau_0 - \mathbf{a}_1 t_0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{x}_1, [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2]) = (\mathbf{x}_2, [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2]);$$
$$(\mathbf{x}_1, [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2]) = \frac{([\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1],[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2])}{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1)} = \frac{(\mathbf{a}_1,[\mathbf{a}_2,[\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1]])}{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1)} = (\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1). \quad (0.1)$$

□ Действительно, имеем
$$[\mathbf{a}_2,[\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1]] = \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1) - \mathbf{b}_1(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1),$$
$$(\mathbf{a}_1,[\mathbf{a}_2,[\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1]]) = (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1) - (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1)(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1) = (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1). \quad ⊠$$
Меняя индексы "$1 \leftrightarrow 2$"получим следующее равенство:
$$(\mathbf{x}_2, [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2]) = -(\mathbf{x}_2, [\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1]) = -(\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_2).$$

Итак, пришли к условию

$$(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) = 0.$$

Пусть $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) \neq 0$, тогда уравнение

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_1 t_0 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_2 \tau_0 \tag{0.2}$$

имеет решение, а значит, имеет решение исходная система уравнений.

□ Действительно, умножим скалярно обе части равенства (0.2) на $\mathbf{b}_2$. Тогда поскольку $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = 0$ получим равенство

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) t_0 = 0,$$

из которого, поскольку $(\mathbf{x}_2, \mathbf{b}_2) = 0$, получим следующее выражение:

$$t_0 = -\frac{(\mathbf{x}_1, \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

Итак, система уравнений имеет следующее решение:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \frac{(\mathbf{x}_1, \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)} \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{x}_1 = \frac{[\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1]}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)}.$$

ЗАДАЧА 5. Докажите тождество $\Big([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]\Big) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^{\mathbf{2}}$.

Решение. Пусть $\mathbf{x} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Справедливо равенство

$$[\mathbf{x}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Таким образом,

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{x}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2.$$

ЗАДАЧА 6. Докажите тождество

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix}.$$

Решение. Первый способ. Пусть $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ — это некоторый правый ортонормированный базис в пространстве. Тогда имеем

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{y} = y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + y_3 \mathbf{k}.$$

Поскольку $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = 1$, то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

где

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{j}.$$

Справедливо равенство

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})[\mathbf{x},\mathbf{y}] = [\mathbf{x},\mathbf{y}](\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \\
= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \\
= \left| \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{x},\mathbf{a}) & (\mathbf{x},\mathbf{b}) & (\mathbf{x},\mathbf{c}) \\ (\mathbf{y},\mathbf{a}) & (\mathbf{y},\mathbf{b}) & (\mathbf{y},\mathbf{c}) \end{vmatrix},
\end{gathered}
$$

поскольку

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{x},\mathbf{a}) = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3, \quad (\mathbf{x},\mathbf{b}) = x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3, \\
(\mathbf{x},\mathbf{c}) = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3, \\
(\mathbf{y},\mathbf{a}) = y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3, \quad (\mathbf{y},\mathbf{b}) = y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3, \\
(\mathbf{y},\mathbf{c}) = y_1c_1 + y_2c_2 + y_3c_3.
\end{gathered}
$$

Решение. Второй способ. Если $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$, тогда и правая и левая части равенства одновременно равны нулю.

$\square$ Действительно, пусть $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$. Следовательно, тройка векторов $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ линейно зависима. Без ограничения общности будем считать, что

$$
\mathbf{a} = \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}.
$$

Тогда имеет место следующее равенство:

$$
\begin{gathered}
\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y}) \end{vmatrix} = \\
= \beta \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y}) \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{c},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{c},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y}) \end{vmatrix} = 0.
\end{gathered}
$$

Пусть теперь $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \neq 0$. Тогда $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ — это базис в пространстве. Введём взаимный базис в пространстве

$$
\mathbf{f}_1 = \frac{[\mathbf{b},\mathbf{c}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{[\mathbf{c},\mathbf{a}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}.
$$

Пусть

$$
\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + x_3\mathbf{f}_3, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 + y_3\mathbf{f}_3.
$$

При этом справедливы следующие свойства:

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{f}_1,\mathbf{a}) = 1, \quad (\mathbf{f}_1,\mathbf{b}) = 0, \quad (\mathbf{f}_1,\mathbf{c}) = 0, \\
(\mathbf{f}_2,\mathbf{a}) = 0, \quad (\mathbf{f}_2,\mathbf{b}) = 1, \quad (\mathbf{f}_2,\mathbf{c}) = 0, \\
(\mathbf{f}_3,\mathbf{a}) = 0, \quad (\mathbf{f}_3,\mathbf{b}) = 0, \quad (\mathbf{f}_3,\mathbf{c}) = 1;
\end{gathered}
$$

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \frac{\mathbf{c}}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] = \frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad [\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1] = \frac{\mathbf{b}}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}.$$

Если воспользоваться этими последними равенствами, то мы получим равенства

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}\left[(x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{c} + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{b} + (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{a}\right] = \\ = \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Осталось заметить, что

$$x_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{a}), \quad x_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{b}), \quad x_3 = (\mathbf{x}, \mathbf{c}),$$
$$y_1 = (\mathbf{y}, \mathbf{a}), \quad y_2 = (\mathbf{y}, \mathbf{b}), \quad y_3 = (\mathbf{y}, \mathbf{c}).$$

З А Д А Ч А 7. Докажите тождество

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) & (\mathbf{x}, \mathbf{b}) & (\mathbf{x}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{a}) & (\mathbf{y}, \mathbf{b}) & (\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{a}) & (\mathbf{z}, \mathbf{b}) & (\mathbf{z}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. П е р в ы й с п о с о б. В соответствии с первым способом решения задачи 17 имеем

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{z} = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k};$$
$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

Тогда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right| = \\ = \begin{vmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) & (\mathbf{x}, \mathbf{b}) & (\mathbf{x}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{a}) & (\mathbf{y}, \mathbf{b}) & (\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{a}) & (\mathbf{z}, \mathbf{b}) & (\mathbf{z}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. В т о р о й с п о с о б. В соответствии со вторым способом решения задачи 6 имеем

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}, \mathbf{a})\mathbf{f}_1 + (\mathbf{z}, \mathbf{b})\mathbf{f}_2 + (\mathbf{z}, \mathbf{c})\mathbf{f}_3,$$
$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{a}\begin{vmatrix} (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} - \mathbf{b}\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} + \mathbf{c}\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$(\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]) =$$
$$= (\mathbf{a}, \mathbf{z}) \begin{vmatrix} (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} - (\mathbf{b}, \mathbf{z}) \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} + (\mathbf{c}, \mathbf{z}) \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) & (\mathbf{x}, \mathbf{b}) & (\mathbf{x}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{a}) & (\mathbf{y}, \mathbf{b}) & (\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{a}) & (\mathbf{z}, \mathbf{b}) & (\mathbf{z}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}.$$

ЗАДАЧА 8. Вычислить объём параллелепипеда, зная длины $|\overrightarrow{OA}| = a$, $|\overrightarrow{OB}| = b$, $|\overrightarrow{OC}| = c$ трёх его рёбер, выходящих из одной вершины O, и углы

$$\alpha = \angle BOC, \quad \beta = \angle COA, \quad \gamma = \angle AOB$$

между ними.

Решение. Согласно условию задачи имеем

$$(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = b \cdot c \cdot \cos\alpha, \quad (\mathbf{c}, \mathbf{a}) = c \cdot a \cdot \cos\beta, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Воспользуемся известной формулой задачи 7

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{vmatrix} =$$
$$= a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= a^2 b^2 c^2 \left(1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma\right)$$

ЗАДАЧА 9. Три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, связанные соотношениями

$$\mathbf{a} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}], \quad \mathbf{b} = [\mathbf{c}, \mathbf{a}], \quad \mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Найти длины этих векторов и углы между ними.

Решение. Итак, прежде всего имеем по определению векторного произведения, что все три вектора $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ попарно ортогональны. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$a^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = ([\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{x}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]), \quad \mathbf{x} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}].$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$a^2 = (\mathbf{x}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{c}, [\mathbf{x}, \mathbf{b}]) = -(\mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{x}]) =$$
$$= -(\mathbf{c}, [\mathbf{b}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{b}, \mathbf{b})) = c^2 b^2.$$

Аналогично получаем, что

$$b^2 = c^2 a^2, \quad c^2 = a^2 b^2.$$

Из этих равенств получаем, что либо $a = b = c = 0$ либо $a = b = c = 1$.

З А Д А Ч А 10. Доказать, что если три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не коллинеарны, то из равенств

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}] \tag{0.3}$$

вытекает соотношение

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \tag{0.4}$$

и обратно.

Р е ш е н и е.

Шаг 1. В обратную сторону доказывается последовательным умножением равенства $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ векторно на $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Действительно, умножим равенство (0.4) векторно на $\mathbf{a}$ в итоге получим равенство

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]. \tag{0.5}$$

Теперь умножим векторно равенство (0.4) на $\mathbf{b}$ и в итоге получим следующее равенство:

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]. \tag{0.6}$$

Итак, пришли к равенству (0.3).

Шаг 2. Из равенств, очевидно, следует, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. Следовательно, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны. По условию задачи они не коллинеарны. Поэтому без ограничения общности можно считать, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны. Поэтому найдутся единственные такие числа α и β, одновременно не равные нулю, что

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}.$$

Из равенства

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$$

получим равенство $\beta = \alpha$. Итак, $\mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Тогда из равенства

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \mathbf{c} = -\mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

З А Д А Ч А 11. Доказать, что если векторы

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad [\mathbf{b}, \mathbf{c}], \quad [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$$

компланарны, то они коллинеарны.

Р е ш е н и е. Введём следующие обозначения:

$$\mathbf{f}_1 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad \mathbf{f}_2 = [\mathbf{b}, \mathbf{c}], \quad \mathbf{f}_3 = [\mathbf{c}, \mathbf{a}].$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) - \mathbf{c}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Аналогичным образом получаем, что

$$[\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

$$[\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1] = \mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{f}_1, [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3]) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2.$$

Поэтому, с одной стороны, если векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ компланарны, то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0.$$

С другой стороны, мы получили следующие равенства:

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1] = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Поэтому векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$ коллинеарны.

ЗАДАЧА 12. Из одной точки проведены три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярная к вектору $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$.

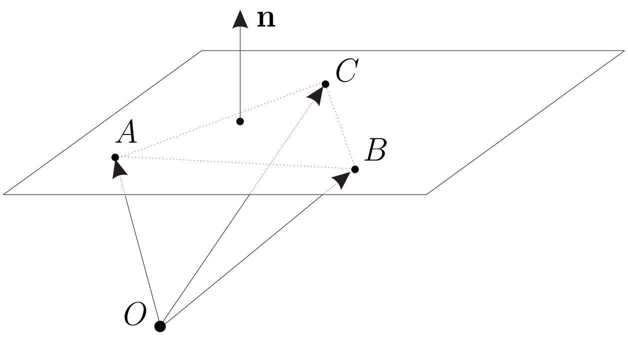

Рис. 2. К задаче 12.

Решение. Пусть

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}.$$

Тогда имеем

$$\mathbf{a} - \mathbf{c} = \overrightarrow{CA}, \quad \mathbf{b} - \mathbf{c} = \overrightarrow{CB},$$

причём векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ не коллинеарны и лежат в указанной плоскости. Справедлива следующая следующая цепочка равенств:

$$\mathbf{n} := [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c}] = [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}].$$

Для любой точки X, лежащей на указанной плоскости, имеем

$$\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$$

и поэтому вектор $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{CX}$. Итак, $\mathbf{n}$ — это вектор нормали к указанной плоскости.

ЗАДАЧА 13. Даны три некомпланарных вектора

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{OC},$$

отложенных от одной точки O. Найти вектор $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$, отложенный от той же точки O и образующий с векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равные между собой острые углы.

Решение. По базису $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ построим взаимный базис

$$\mathbf{f}_1 = \frac{[\mathbf{b}, \mathbf{c}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{[\mathbf{c}, \mathbf{a}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}.$$

Будем искать вектор $\mathbf{d}$ в следующем виде:

$$\mathbf{d} = x\mathbf{f}_1 + y\mathbf{f}_2 + z\mathbf{f}_3.$$

Заметим, что

$$0 < da\cos\varphi = (\mathbf{d}, \mathbf{a}) = x, \quad 0 < db\cos\varphi = (\mathbf{d}, \mathbf{b}) = y,$$
$$0 < dc\cos\varphi = (\mathbf{d}, \mathbf{c}) = z,$$

Поэтому искомый вектор имеет следующий вид:

$$\mathbf{d} = d\cos\varphi\,(a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) =$$
$$= \frac{\lambda}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}\left(a[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + b[\mathbf{c}, \mathbf{a}] + c[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right), \quad \lambda = d\cos\varphi > 0.$$

ЗАДАЧА 14. Даны три некомпланарных вектора

$$\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \quad \mathbf{n} = \{A, B, C\}.$$

Найти площадь параллелограмма, являющегося ортогональной проекцией на плоскость, перпендикулярной к вектору $\mathbf{n}$, параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

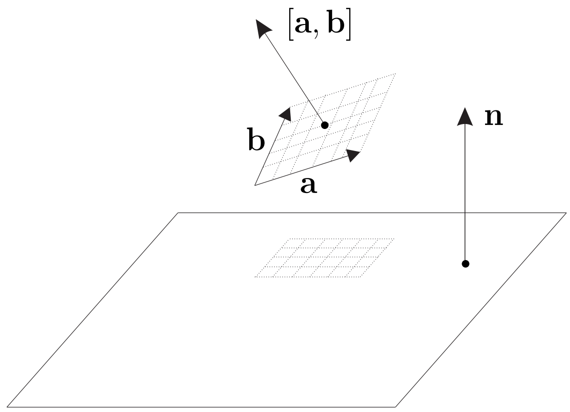

Рис. 3. К задаче 14.

Решение. Ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, равна

$$\overrightarrow{S}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

тогда площадь проекции, очевидно, равна

$$|S_{\mathbf{n}}| = \left|\overrightarrow{S}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right| |\cos\varphi|, \quad \cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{S}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}, \mathbf{n}\right)}{\left|\overrightarrow{S}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right| |\mathbf{n}|} \Rightarrow |S_{\mathbf{n}}| = \frac{|([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|}.$$

ЗАДАЧА 15. В ориентированном пространстве даны два перпендикулярных друг другу вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$, причём $|\mathbf{n}| = 1$. В плоскости, положительная ориентация которой определяется упорядоченной парой векторов $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{n},\mathbf{a}]$, найти вектор $\mathbf{b}$, полученный из вектора $\mathbf{a}$ поворотом в этой плоскости на угол φ.

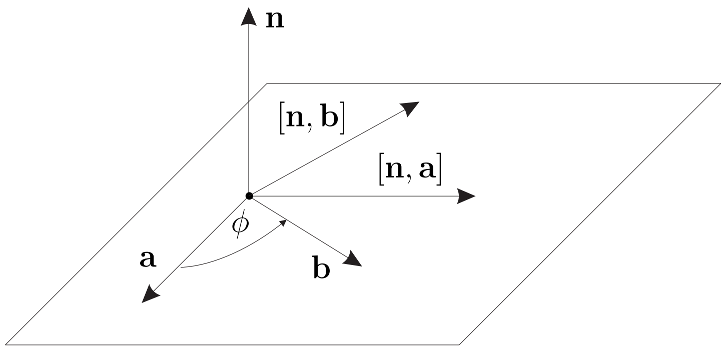

Рис. 4. К задаче 15.

Решение. Рассмотрим две прямоугольные декартовы системы координат — это старая

$$\{O, \mathbf{a}, [\mathbf{n},\mathbf{n}]\}$$

и новая повёрнутая на угол φ — это

$$\{O, \mathbf{b}, [\mathbf{n},\mathbf{b}]\}.$$

В новой системе координат $\{O, \mathbf{b}, [\mathbf{n},\mathbf{b}]\}$ вектор $\mathbf{b}$ имеет следующие координаты:

$$\mathbf{b} = x' \cdot \mathbf{b} + y' \cdot [\mathbf{n},\mathbf{b}], \quad x' = 1, \quad y' = 0.$$

Пусть в старой системе координат $\{O, \mathbf{a}, [\mathbf{n},\mathbf{n}]\}$ вектор $\mathbf{b}$ имеет координаты

$$\mathbf{b} = x \cdot \mathbf{a} + y \cdot [\mathbf{n},\mathbf{a}].$$

Тогда связь этих координат следующая

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\mathbf{b} = \cos\varphi \cdot \mathbf{a} + \sin\varphi \cdot [\mathbf{n},\mathbf{a}].$$

З А Д А Ч А 16. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра, равных по абсолютной величине площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противолежащих граням, равна нулю.

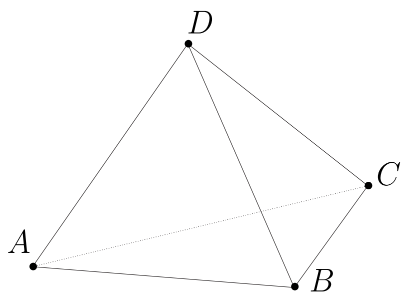

Рис. 5. К задаче 16.

Р е ш е н и е. Итак, пусть $DABC$ — это тетраэдр. Положим

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{DA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{DB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{DC}.$$

Тогда искомые вектора равны соответственно —
для грани ABC:

$$\mathbf{d}_1 = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}] = [\mathbf{c} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}];$$

для грани DAC:

$$\mathbf{d}_2 = [\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}];$$

для грани DCB :

$$\mathbf{d}_3 = [\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}] = [\mathbf{c}, \mathbf{b}];$$

для грани DAB :

$$\mathbf{d}_4 = [\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}].$$

Поэтому имеем

$$\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_4 = [\mathbf{c}, \mathbf{a}] - [\mathbf{c}, \mathbf{b}] - [\mathbf{b}, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}.$$

З А Д А Ч А 17. Доказать тождество:

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Справедливы следующие равенства:

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = (\mathbf{x}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = (\mathbf{c}, [\mathbf{d}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]]) = (\mathbf{c}, \mathbf{a})(\mathbf{d}, \mathbf{b}) - (\mathbf{c}, \mathbf{b})(\mathbf{d}, \mathbf{a}).$$

З А Д А Ч А 18. Доказать тождество:

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}).$$

Решение. Действительно,

$$[[\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}]] = [\mathbf{x},[\mathbf{c},\mathbf{d}]] = \mathbf{c}(\mathbf{x},\mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c});$$

$$[[\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}]] = -[[\mathbf{c},\mathbf{d}],[\mathbf{a},\mathbf{b}]] = -[\mathbf{y},[\mathbf{a},\mathbf{b}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}) - \mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}).$$

Из этих двух равенств вытекает, что

$$\mathbf{d}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c}) + \mathbf{b}(\mathbf{d},\mathbf{c},\mathbf{a}) + \mathbf{c}(\mathbf{d},\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

ЗАДАЧА 19. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы выполнялось равенство

$$[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}] = [\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]].$$

Решение. Это равенство эквивалентно равенству

$$\mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{b},\mathbf{a}).$$

Из этого равенства вытекает, что исходное равенство выполнено тогда, когда

$$\mathbf{b}\perp\mathbf{a} \quad \text{и} \quad \mathbf{b}\perp\mathbf{c}.$$

С другой стороны, это равенство выполнено ещё тогда когда векторы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны. Действительно,

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} \Rightarrow [[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}] = \alpha[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{a}] = -\alpha[\mathbf{a},[\mathbf{a},\mathbf{b}]] = \alpha[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{a}]] = [\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]].$$

Этими случаями исчерпываются все ситуации.

ЗАДАЧА 20. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий системе уравнений

$$(\mathbf{a},\mathbf{x}) = \alpha, \quad (\mathbf{b},\mathbf{x}) = \beta, \quad (\mathbf{c},\mathbf{x}) = \gamma.$$

Решение. Единственное решение дано ранее с помощью введения взаимного базиса к базису $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$:

$$\mathbf{x} = \frac{\alpha}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}[\mathbf{b},\mathbf{c}] + \frac{\beta}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}[\mathbf{c},\mathbf{a}] + \frac{\gamma}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}[\mathbf{a},\mathbf{b}].$$

ЗАДАЧА 21. Даны три некомпланарных вектора

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{OC},$$

отложенных от одной точки O. Найти вектор $\overrightarrow{OH}$, где H — это ортогональная проекция точки O на плоскость ABC.

Решение. Вектор нормали к плоскости ABC можно взять равным

$$\mathbf{n} = [\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = [\mathbf{b}-\mathbf{a},\mathbf{c}-\mathbf{a}] = [\mathbf{b},\mathbf{c}] + [\mathbf{c},\mathbf{a}] + [\mathbf{a},\mathbf{b}] := \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3,$$

где мы использовали обозначения

$$\mathbf{f}_1 := [\mathbf{b},\mathbf{c}], \quad \mathbf{f}_2 := [\mathbf{c},\mathbf{a}], \quad \mathbf{f}_3 := [\mathbf{a},\mathbf{b}].$$

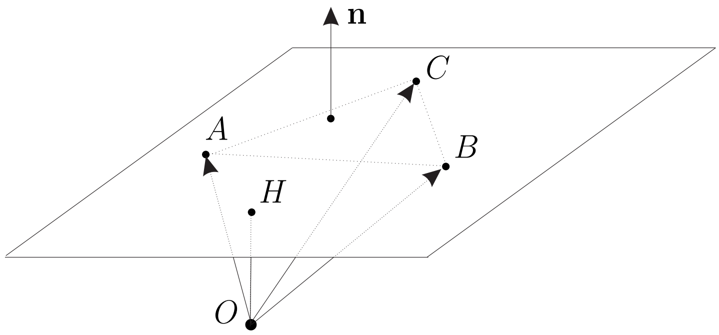

Рис. 6. К задаче 12.

Поэтому с одной стороны, имеем

$$\overrightarrow{OH} = \lambda\mathbf{n} = \lambda(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3).$$

С другой стороны, точка $H \in (ABC)$ и поэтому имеем

$$\overrightarrow{CH} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{OH} = \mathbf{c} + \alpha(\mathbf{a} - \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{c}).$$

Итак, справедливо следующее равенство:

$$(1 - \alpha - \beta)\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3).$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на $\mathbf{f}_1$, тогда получим

$$\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3).$$

Аналогично получаем следующие равенства

$$\beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3),$$
$$(1 - \alpha - \beta)(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3).$$

Складывая полученные три равенства, получим искомое выражение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3|^2.$$

Итак,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{|[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2}\left([\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right).$$

З А Д А Ч А 22. Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равна

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}}.$$

Решение. Согласно определению векторного произведения имеем

$$S^2 = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{a}, \mathbf{b}]).$$

Далее согласно решению задачи 17.

ЗАДАЧА 23. Доказать, что объём параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равен

$$V = \sqrt{\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}}$$

Решение. Следствие результата задачи 7.

ЗАДАЧА 24. Найти вектор $\mathbf{x}$ из системы уравнений

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}) = \alpha, \quad [\mathbf{a}_2, \mathbf{x}] = \mathbf{b},$$

где

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \neq 0, \quad (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = 0.$$

Решение. Имеем в силу решения задачи 3

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_2 t, \quad \mathbf{x}_0 = \frac{[\mathbf{b}, \mathbf{a}_2]}{(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2)}.$$

После подстановки этого выражения в первое равенство, получим

$$\alpha = (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_0) + (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) t_0,$$

$$t_0 = \frac{\alpha - (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_0)}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \frac{\alpha - (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_0)}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \mathbf{a}_2.$$

ЗАДАЧА 25. (Другой способ решения задачи 4.) Решить относительно $\mathbf{x}$ систему уравнений

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{x}] = \mathbf{b}_1, \quad [\mathbf{a}_2, \mathbf{x}] = \mathbf{b}_2,$$

причём

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) \neq 0, \quad (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) \neq 0, \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = 0.$$

Решение. Условия

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = 0$$

необходимы и достаточны для существования решений каждого из векторных уравнений. Если $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0}$, то мы получим равенство

$$\mathbf{a}_1 = \alpha \mathbf{a}_2,$$

но тогда это противоречит остальным условиям. В частности, если $\alpha \neq$ $\neq 0$, то получим противоречивые условия

$$0 \neq (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) = \alpha(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = 0.$$

Если решение системы уравнений существует, то по свойству векторного произведения $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{x}$ и $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{x}$ и поэтому одно из решений должно иметь вид

$$\mathbf{x} = \lambda[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2],$$

после подстановки которого в исходные векторные уравнения получим следующие равенства:

$$\lambda(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1, \quad -\lambda(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2.$$

□ Действительно, имеем

$$\lambda[\mathbf{a}_1, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]] = \mathbf{b}_1, \quad [\mathbf{a}_1, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]] = \mathbf{b}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) - \mathbf{b}_2(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2),$$
$$\lambda[\mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]] = \mathbf{b}_2, \quad [\mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]] = \mathbf{b}_1(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) - \mathbf{b}_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) = -\mathbf{b}_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1).$$

⊠

Откуда получим необходимое условие разрешимости

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) = 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{x} = \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

ЗАДАЧА 26. Найти векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из системы уравнений:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{a}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p, \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{b}.$$

Дано, что $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

Решение. Итак, $\mathbf{y} = \mathbf{a} - \mathbf{x}$ и поэтому

$$[\mathbf{x}, \mathbf{a} - \mathbf{x}] = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{x}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})};$$
$$(\mathbf{a} - \mathbf{x}, \mathbf{x}) = p \Leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\mathbf{x}, \mathbf{a}) + p = 0. \tag{0.7}$$

Поскольку $\mathbf{x}_0 \perp \mathbf{a}$, то имеет место следующее равенство:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_0^2 + a^2t^2, \tag{0.8}$$

где

$$x_0^2 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = \frac{b^2}{a^2}.$$

□ Действительно, имеем

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]]) =$$
$$= (\mathbf{a}, \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = a^2b^2. \quad ⊠$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{a})t = ta^2. \tag{0.9}$$

Таким образом, из (0.7)–(0.9) приходим к равенству

$$a^2t^2 - a^2t + p + \frac{b^2}{a^2} = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4(b^2 + pa^2)}}{2a^2}.$$

Если

$$a^4 > 4(b^2 + pa^2),$$

то решений два, если $a^4 = 4(b^2 + pa^2)$, то решение одно, а если $a^4 < < 4(b^2 + pa^2)$ решений нет. Когда решение существует, то справедливы следующее равенства:

$$\mathbf{x} = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{y} = -\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} + \mathbf{a}(1 - t).$$