ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1

МАТРИЦЫ

§ 1. Матрицы

На этой лекции мы введём основное для всего курса аналитической геометрии понятие матрицы. Необходимость введения понятия матрицы обусловлена, например, компактностью записи линейных уравнений. Так система трех уравнений относительно трех неизвестных

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{1.1}$$

может быть записана в следующей матричной форме записи:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Для того чтобы найти решение системы уравнений (1.1) нужно рассмотреть так называемую расширенную матрицу системы (1.1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right). \tag{1.3}$$

В следующей лекции мы детально изучим этот вопрос. Дадим определение матрицы размера $m \times n$.

Определение 1. *Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов, на пересечении которых располагаются элементы матрицы.*

Для обозначения матриц используется различные варианты. Рассмотрим все основные из них.

Обозначение 1. Матрица $A = (a_k^j)_n^m$. В этом обозначении верхний индекс j указывает на номер строчки, где располагается элемент a_k^j, а нижний индекс k указывает на номер столбца, где располагается элемент a^j_k:

$$\begin{array}{c|cccccccc} & & & k & & & & & \\ \hline & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ j & * & * & a^j_k & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \end{array} \tag{1.4}$$

О б о з н а ч е н и е 2. Матрица $A = (a_{jk})_{m,n}$. Здесь первый индекс j указывает на номер строчки матрицы, где расположен элемент a_{jk}, а второй индекс k указывает на номер столбца, где располагается элемент a_{jk} :

$$\begin{array}{c|cccccccc} & & & k & & & & & \\ \hline & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ j & * & * & a_{jk} & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * & * & * \end{array} \tag{1.5}$$

О б о з н а ч е н и е 3. *Развернутая форма записи.* Матрицу A можно записать в развернутой форме двумя способами — либо с одни нижним и одним верхним либо с двумя нижними индексами:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^j_1 & \cdots & a^j_k & \cdots & a^j_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & \cdots & a^m_k & \cdots & a^m_n \end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Особую роль играют матрицы размеров $m \times 1$ и $1 \times n$. Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 2. *Матрицы размера $m \times 1$ называются столбцами длины m, а матрицы размера $1 \times n$ называются строчками длины n.*

Обозначение. Для матриц–столбцов и матриц–строчек используются следующие обозначения:

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1, & \cdots, & a_k, & \cdots, & a_n \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Отметим, что удобно (и важно!) использовать верхний индекс для нумерации элементов столбца и нижний индекс для нумерации элементов строчки. В связи с тем, что мы ввели матрицу–столбец и матрицу–строчку, то для матрицы $A = (a_k^j)_n^m$ используются еще две важные формы записи матриц.

Обозначение 4. *Запись матрицы через столбцы.* Эта форма записи имеет следующий вид:

$$A = \| \, A_1 | \cdots | A_k | \cdots | A_n \, \|, \tag{1.8}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^j \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^j \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^j \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Обозначение 5. *Запись матрицы через строчки.* Эта форма записи матрицы имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

$$A^j = \begin{pmatrix} a_1^j & \cdots & a_k^j & \cdots & a_n^j \end{pmatrix}, \quad A^m = \begin{pmatrix} a_1^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Обсудим теперь вопрос: *какие элементы могут составлять матрицу*? Ответ — *абсолютно любые*. Чаще всего элементами матрицы являются вещественные или комплексные числа. Например, в квантовой механике в теории *спина электрона* широко используются так называемые матрицы В. Паули, имеющие следующий вид:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Однако возможны и «экзотические» ситуации, когда элементами матрицы могут быть не только числа но и *операторы*, например, оператор дифференцирования:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id} & d/dx \\ d/dx & \mathrm{id} \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

где id — это так называемый единичный оператор, который действует на функцию $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\mathrm{id}\, f(x) = f(x),$$

а оператор d/dx — это оператор, который действует на дифференцируемую функцию $f(x)$ следующим образом:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

Теперь мы рассмотрим еще один способ записи матриц.

Обозначение 6. *Запись матрицы через блоки — блочные матрицы.* Один из примеров блочной записи матриц:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ \hline a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1 & A_2^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 \end{array} \right\|,$$

$$A_1^1 = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad A_2^1 = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \end{pmatrix}, \quad A_1^2 = (a_1^3, a_2^3), \quad A_2^2 = a_3^3.$$

Отметим, что известный физик П. А. М. Дирак при рассмотрении релятивистской теории электрона ввёл следующие блочные 4×4 матрицы:

$$\gamma_0 = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O \\ \hline O & -\sigma_0 \end{array} \right\|, \quad \gamma_1 = \left\| \begin{array}{c|c} O & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O \end{array} \right\|, \tag{1.15}$$

$$\gamma_2 = \left\| \begin{array}{c|c} O & \sigma_2 \\ \hline -\sigma_2 & O \end{array} \right\|, \quad \gamma_3 = \left\| \begin{array}{c|c} O & \sigma_3 \\ \hline -\sigma_3 & O \end{array} \right\|, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

где матрицы В. Паули σ_0, σ_1, σ_2 и σ_3 размера 2×2 определены равенствами (1.12) и (1.13). Таким образом, в развернутой форме записи 4×4 матрицы γ_0, γ_1, γ_2 и γ_3 имеют следующий вид:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

где мы использовали правило умножения матрицы на число для нахождения 2×2 матриц $-\sigma_0$, $-\sigma_1$, $-\sigma_2$ и $-\sigma_3$, которое мы детально обсудим в следующем разделе.

Рассмотрим теперь матрицы частного вида, широко использующиеся в дальнейшем.

Квадратная матрица. Эта матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, т. е. матрица имеет следующий вид $A = (a^j_k)^n_n$ или в развернутой форме записи

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}.$$

Элементы $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ называются главной диагональю квадратной матрицы A.

Нулевая матрица. Это матрица A (размера $m \times n$), элементами которой являются число нуль. Например, такая матрица размера 3×5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является нулевой.

Диагональная матрица. Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю. Например, матрица П. А. М. Дирака γ_0 является диагональной

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что диагональной матрицей является и нулевая матрица. Например, такая

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

След квадратной матрицы. Пусть задана квадратная матрица $A = (a^j_k)^n_n$. Тогда ее следом называется следующая величина:

$$\operatorname{tr} A = a^1_1 + a^2_2 + \dots + a^n_n, \tag{1.19}$$

т.е. след квадратной матрицы — это сумма слагаемых, расположенных на главной диагонали матрицы. Заметим, что все 4×4 матрицы П. А.

М. Дирака γ_0, γ_1, γ_2 и γ_3 обладают важным свойством — их следы равны нулю! Матрицы 2×2 В. Паули σ_1, σ_2 и σ_3 тоже имеют нулевой след, а вот матрица В. Паули σ_0 имеет след равный двум.

§ 2. Сложение матриц и умножение матриц на числа

Пусть $A = \{a^j_k\}^m_n$ — матрица размера $m \times n$, состоящая из вещественных или комплексных чисел. Будем использовать следующее обозначение:

$$\{A\}^j_k := a^j_k. \tag{2.1}$$

Фигурные скобки в этом определении означают операцию «извлечения элемента из матрицы». Сначала дадим определение равных матриц.

Определение 3. *Две матрицы A и B одинакового размера $m \times n$ называются равными, если $\{A\}^j_k = \{B\}^j_k$.*

Дадим определение операции умножения матрицы на число.

Определение 4. *Произведением вещественного или комплексного числа α на матрицу $A = \{a^j_k\}^m_n$ называется матрица того же размера $B = \{b^j_k\}^m_n$, элементы которой равны $b^j_k = \alpha a^j_k$.*

$$\alpha \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a^1_1 & \cdots & \alpha a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a^m_1 & \cdots & \alpha a^m_n \end{pmatrix}.$$

Определение 5. *Суммой двух матриц одного и того же размера $A = (a^j_k)^m_n$ и $B = (b^j_k)^m_n$ называется матрица того же размера $C = (c^j_k)^m_n$, элементы которой равны $c^j_k = a^j_k + b^j_k$.*

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1_1 & \cdots & b^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^m_1 & \cdots & b^m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 + b^1_1 & \cdots & a^1_n + b^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 + b^m_1 & \cdots & a^m_n + b^m_n \end{pmatrix}.$$

С учетом обозначения (2.1) операции умножения матрицы на число и сложения матриц одинакового размера можно записать в следующих формах:

$$\{\alpha A\}^j_k = \alpha \{A\}^j_k, \quad \{A + B\}^j_k = \{A\}^j_k + \{B\}^j_k \tag{2.2}$$

для всех $j = \overline{1, m}$ и $k = \overline{1, n}$.

Сложение матриц одного размера и умножение матриц на числа (вещественные или комплексные) обладают набором из восьми свойств, которые мы сейчас последовательно сформулируем и докажем. Все матрицы размера $m \times n$, состоящие из <u>вещественных чисел</u> мы будем для удобства обозначать как $\mathbb{R}^{m \times n}$, а состоящие из <u>комплексных чисел</u> будем обозначать как $\mathbb{C}^{m \times n}$. Заметим, что имеет место теоретико–множественное вложение $\mathbb{R}^{m \times n} \subset \mathbb{C}^{m \times n}$.

Пусть $A, B, C \in \mathbb{C}^{m \times n}$ — фиксированные матрицы, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ — фиксированные комплексные числа.

Свойство 1. *Коммутативность сложения матриц.* Это свойство означает, что $A + B = B + A$.

☐ Действительно, имеет место цепочка равенств

$$\{A + B\}_k^j = \{A\}_k^j + \{B\}_k^j = \{B\}_k^j + \{A\}_k^j = \{B + A\}_k^j. \qquad (2.3)$$

Здесь мы воспользовались коммутативностью сложения комплексных чисел. ☒

Свойство 2. *Ассоциативность сложения матриц.* Это свойство означает, что $(A + B) + C = A + (B + C)$.

☐ Действительно, справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}\{(A + B) + C\}_k^j = \{A + B\}_k^j + \{C\}_k^j = (\{A\}_k^j + \{B\}_k^j) + \{C\}_k^j = \\ = \{A\}_k^j + (\{B\}_k^j + \{C\}_k^j) = \{A\}_k^j + \{B + C\}_k^j = \\ = \{A + (B + C)\}_k^j. \quad (2.4)\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались ассоциативностью сложения комплексных чисел. ☒

Свойство 3. *Существование нулевой матрицы.* Существует такая матрица, которая обозначается как $O \in \mathbb{C}^{m\times n}$, что $A + O = A$.

☐ Пусть O — это нулевая матрица размера $m \times n$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\{A + O\}_k^j = \{A\}_k^j + \{O\}_k^j = \{A\}_k^j + 0 = \{A\}_k^j. \quad ☒ \qquad (2.5)$$

Свойство 4. *Существование обратной матрицы по отношению к операции сложения матриц.* Свойство означает, что для всякой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ определена такая матрица $A' \in \mathbb{C}^{m\times n}$, что $A + A' = O$, где O — нулевая матрица размера $m \times n$.

☐ Действительно, для заданной матрицы $A = (a_k^j)_n^m \in \mathbb{C}^{m\times n}$ в качестве матрицы $A' \in \mathbb{C}^{m\times n}$ возьмём такую матрицу, что

$$\{A'\}_k^j := -\{A\}_k^j \Rightarrow \{A + A'\}_k^j = \{A\}_k^j + \{A'\}_k^j = \{A\}_k^j - \{A\}_k^j = 0. \quad ☒ \qquad (2.6)$$

Свойство 5. *Свойство числа* $1 \in \mathbb{R}$. Свойство заключается в том, что $1 \cdot A = A$.

☐ Действительно, справедливы равенства

$$\{1A\}_k^j = 1\{A\}_k^j = \{A\}_k^j. \quad ☒ \qquad (2.7)$$

Свойство 6. *Ассоциативность умножения на числа.* Свойство заключается в том, что $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

☐ Действительно, справедливы равенства

$$\{\alpha(\beta A)\}_k^j = \alpha\{\beta A\}_k^j = \alpha(\beta\{A\}_k^j) = (\alpha\beta)\{A\}_k^j = \{(\alpha\beta)A\}_k^j. \qquad (2.8)$$

Здесь мы воспользовались ассоциативностью умножения комплексных чисел. ☒

Свойство 7. *Дистрибутивность относительно сложения матриц.* Свойство означает, что $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

$\square$ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\{\alpha(A+B)\}_k^j = \alpha\{A+B\}_k^j = \alpha\left(\{A\}_k^j + \{B\}_k^j\right) = \\ = \alpha\{A\}_k^j + \alpha\{B\}_k^j = \{\alpha A\}_k^j + \{\alpha B\}_k^j = \{\alpha A + \alpha B\}_k^j. \quad (2.9)$$

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью комплексных чисел относительно сложения. $\boxtimes$

Свойство 8. *Дистрибутивность относительно сложения чисел.* Свойство означает, что $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

$\square$ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\{(\alpha+\beta)A\}_k^j = (\alpha+\beta)\{A\}_k^j = \alpha\{A\}_k^j + \beta\{A\}_k^j = \\ = \{\alpha A\}_k^j + \{\beta A\}_k^j = \{\alpha A + \beta A\}_k^j. \quad (2.10)$$

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью комплексных чисел относительно сложения. $\boxtimes$

В дальнейшем в курсе «Линейная алгебра» будет введено понятие абстрактного *линейного пространства*, в котором определены две операции — сложения элементов и умножения элемента на число (вещественное или комплексное), которые должны удовлетворять этим восьми свойствам. В связи с этим понятием мы будем называть операции сложения матриц и умножения матриц на числа (вещественные или комплексные) *линейными операциями*.

Заметим, что следствием рассмотренных свойств операций над матрицами являются некоторые несложные утверждения, которые мы сейчас сформулируем и докажем.

Свойство 9. Из равенства $A+B=A$ вытекает, что $B=O$ — нулевая матрица.

$\square$ Действительно, имеем

$$\{A\}_k^j = \{A+B\}_k^j = \{A\}_k^j + \{B\}_k^j \Leftrightarrow \{B\}_k^j = 0. \quad \boxtimes$$

Свойство 10. Обратная матрица A' из свойства 4 единственна.

$\square$ Действительно, пусть существуют две матрицы $B_1, B_2 \in \mathbb{C}^{m\times n}$ такие, что

$$A + B_1 = A + B_2 = O \Rightarrow B_1 = B_1 + O = B_1 + (A + B_2) = \\ = (B_1 + A) + B_2 = (A + B_1) + B_2 = O + B_2 = B_2. \quad \boxtimes \quad (2.11)$$

Свойство 11. $nA = A + A + \cdots + A$.

$\square$ Доказательство проведем по индукции. Действительно, в силу свойств 5 и 8 справедливо равенство

$$2A = (1+1)A = 1A + 1A = A + A.$$

Пусть $n \geqslant 3$ и для $n-1$ утверждение доказано. Тогда в силу свойств 5 и 8 справедливо следующее равенство:

$$nA = (n-1+1)A = (n-1)A + 1A = (n-1)A + A = A + A + \cdots + A. \quad \boxtimes$$

Свойство 12. Обратная относительно операции сложения матрица $A' = (-1)A$.

□ Действительно, справедливы равенства

$$\{A + (-1)A\}^j_k = A^j_k + \{(-1)A\}^j_k = \\ = \{A\}^j_k + (-1)\{A\}^j_k = \{A\}^j_k - \{A\}^j_k = 0 \Rightarrow A' = (-1)A. \quad (2.12)$$

В силу единственности (см. свойство 10) обратной матрицы A' относительно операции сложения матриц приходим к утверждению. ⊠

§ 3. Умножение матриц

Зачем нам нужно умножать матрицы? Прежде всего для того, чтобы записать произвольную линейную систему уравнений в виде произведения матриц. Например, система трех уравнений (1.1) записана при помощи умножения матриц в виде (1.2).

Умножение матриц основано на правиле умножения «строчка на столбец». Именно,

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} := a_1 b^1 + a_2 b^2 + \cdots + a_n b^n.$$

Сразу же отметим, что мы можем умножить строчку на столбец одинаковых длин!

Теперь сформулируем общее определение умножения матриц. Пусть матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times n}$.

Определение 6. *Произведением матрицы A размера $m \times p$ на матрицу B размера $p \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, имеющая следующий вид*:

$$C = (c^j_k)^m_n \in \mathbb{C}^{m\times n}, \quad c^j_k = \sum_{s=1}^{p} a^j_s b^s_k. \quad (3.1)$$

Наблюдение 1. Давайте раскроем знак суммы в формуле (3.1) и получим следующее равенство:

$$c^j_k = a^j_1 b^1_k + a^j_2 b^2_k + \cdots + a^j_p b^p_k = (a^j_1, a^j_2, \cdots, a^j_p) \begin{pmatrix} b^1_k \\ b^2_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix},$$

где мы воспользовались правилом умножения «строчка на столбец». Заметим, чтобы получить элемент c_k^j, расположенный на пересечении j–й строчки и k–го столбца нужно умножить j–ю строчку матрицы A на k–й столбец матрицы B :

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_k^1 & \cdots & c_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^j & \cdots & c_k^j & \cdots & c_n^j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^m & \cdots & c_k^m & \cdots & c_n^m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_s^1 & \cdots & a_p^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^j & \cdots & a_s^j & \cdots & a_p^j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_p^m & \cdots & a_p^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_k^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^s & \cdots & b_k^s & \cdots & b_n^s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^p & \cdots & b_k^p & \cdots & b_n^p \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Н а б л ю д е н и е 2. Умножить матрицу A на матрицу B можно тогда и только тогда, когда длина строчек матрицы A совпадает с длиной столбцов матрицы B или, что равносильно, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B.

П р и м е р. Вычисли следующие произведения матриц:

$$(1,1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + \cdot 1 = 3, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как мы видим результат произведения двух матриц (при условии, что их можно перемножить как в одном порядке, так и в противоположном) существенно зависит от порядка произведения матриц.

К о м м у т а т о р м а т р и ц. Пусть нам заданы две квадратные матрицы одинакового размера $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 7. *Коммутатором квадратных матриц* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *называется матрица из* $\mathbb{C}^{n\times n}$, *имеющая следующий вид*:

$$[A, B] := AB - BA. \tag{3.3}$$

Если коммутатор $[A, B] = O$ — *нулевая матрица размера* $n \times n$, *то матрицы* A *и* B *называются коммутирующими. Антикоммутатором матриц* A *и* B *называется следующая величина*:

$$AB + BA. \tag{3.4}$$

Н а б л ю д е н и е. Очевидно, что две равные квадратные матрицы коммутируют. Кроме того, справедливо следующее равенство $[A, B] = -[B, A]$.

Пример. Коммутаторы матриц В. Паули. Докажем, что справедливы следующие три равенства:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2. \tag{3.5}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_3, \tag{3.6}$$

$$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\sigma_3. \tag{3.7}$$

Итак, из равенств (3.6) и (3.7) вытекает первое равенство из формулы (3.5). Аналогичным образом доказываются оставшиеся равенства из формулы (3.5).

Произведение блочных матриц. Выпишем матрицы $A \in \in \mathbb{C}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{C}^{p\times n}$ в следующих блочных видах:

$$A = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}, \quad B = \|B_1, \cdots, B_k, \cdots B_n\|, \tag{3.8}$$

$$A^j = (a_1^j, \cdots, a_p^j), \quad B_k = \begin{pmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^p \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{3.9}$$

Отметим, что поскольку длина каждой строчки A^j матрицы A равна p, а длина каждого столбца B_k матрицы B тоже равна p, то поэтому для любых $j = \overline{1, m}$ и $k = \overline{1, n}$ определено произведение

$$A^j B_k = (a_1^j, \cdots, a_p^j) \begin{pmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^p \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{p} a_s^j b_k^s \in \mathbb{C}.$$

Отметим, что матрица $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$ как блочная матрица имеет размер $m \times 1$, а матрица $B \in \mathbb{C}^{p\times n}$ как блочная матрица имеет размер $1 \times \times n$. Поэтому согласно правилу «строчка на столбец» можно умножить блочную матрицу A на матрицу B и их произведение AB будет состоять из $m \times n$ блоков вида $A^j B_k$, причем по доказанному блок $A^j B_k$ — это комплексное число, т.е. матрица размера 1×1:

$$AB = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix} \|B_1, \cdots, B_k, \cdots B_n\| =$$

$$= \begin{pmatrix} A^1B_1 & \cdots & A^1B_k & \cdots & A^1B_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^jB_1 & \cdots & A^jB_k & \cdots & A^jB_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^mB_1 & \cdots & A^mB_k & \cdots & A^mB_n \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Из этого представления вытекают важные наблюдения.

Наблюдения. Запишем произведение матриц $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$ и $B \in \in \mathbb{C}^{p\times n}$ в двух блочных видах через столбцы и через строчки

$$C = AB = \|C_1, \cdots, C_k, \cdots C_n\|, \quad C = AB = \begin{Vmatrix} C^1 \\ \vdots \\ C^j \\ \vdots \\ C^m \end{Vmatrix}. \quad (3.11)$$

Из сравнения равенств (3.10) и (3.11) приходим к следующим формулам:

$$C_k = \begin{pmatrix} A^1B_k \\ \vdots \\ A^jB_k \\ \vdots \\ A^mB_k \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix} B_k = AB_k, \quad (3.12)$$

где мы опять воспользовались правилом умножения «строчка на столбец», поскольку блочная матрица A имеет размер $m \times 1$ а блочная матрица B_k имеет размер (как блочной матрицы) 1×1. Кроме того, произведение A^jB_k определено и представляет собой число из $\mathbb{C}$. Аналогичным образом можно доказать справедливость следующих равенств:

$$C^j = \left(A^jB_1, \cdots, A^jB_k, \cdots, A^jB_n\right) =$$
$$= A^j\|B_1, \cdots, B_k, \cdots B_n\| = A^jB. \quad (3.13)$$

Теперь мы приступим к рассмотрению произведения блочных матриц более сложного вида. Действительно, рассмотрим следующие две блочные матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{C}^{p\times n}$, составленные из блоков следующим образом:

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1 & A_2^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{c|c} B_1^1 & B_2^1 \\ \hline B_1^2 & B_2^2 \end{array} \right\|, \tag{3.14}$$

блоки которых являются матрицами следующих размеров:

$$A_1^1 \in \mathbb{C}^{m_1\times p_1}, \quad A_2^1 \in \mathbb{C}^{m_1\times p_2}, \quad A_1^2 \in \mathbb{C}^{m_2\times p_1}, \quad A_2^2 \in \mathbb{C}^{m_2\times p_2}, \tag{3.15}$$

$$B_1^1 \in \mathbb{C}^{p_1\times n_1}, \quad B_2^1 \in \mathbb{C}^{p_1\times n_2}, \quad B_1^2 \in \mathbb{C}^{p_2\times n_1}, \quad B_2^2 \in \mathbb{C}^{p_2\times n_2}, \tag{3.16}$$

$$m_1 + m_2 = m, \quad p_1 + p_2 = p, \quad n_1 + n_2 = n.$$

Согласно определению произведения матриц имеем

$$C = AB, \quad c_k^j = \sum_{s=1}^{p} a_s^j b_k^s, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{3.17}$$

Теперь рассмотрим формальное произведение блочных матриц (3.14), полученное как если бы элементами матриц были не блоки, а числа. В результате получим следующую матрицу:

$$D := \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1B_1^1 + A_2^1B_1^2 & A_1^1B_2^1 + A_2^1B_2^2 \\ \hline A_1^2B_1^1 + A_1^2B_1^2 & A_1^2B_2^1 + A_2^2B_2^2 \end{array} \right\|, \tag{3.18}$$

в которой все матричные произведения определены в силу сделанных нами предположений относительно размеров блоков. Кроме того,

$$A_1^1B_1^1 + A_2^1B_1^2 \in \mathbb{C}^{m_1\times n_1}, \quad A_1^1B_2^1 + A_2^1B_2^2 \in \mathbb{C}^{m_1\times n_2}, \tag{3.19}$$

$$A_1^2B_1^1 + A_1^2B_1^2 \in \mathbb{C}^{m_2\times n_1}, \quad A_1^2B_2^1 + A_2^2B_2^2 \in \mathbb{C}^{m_2\times n_2}. \tag{3.20}$$

Предположим, что $j \in \overline{1,m_1}$ и $k \in \overline{1,n_1}$. Рассмотрим тогда элемент d_k^j блочной матрицы (3.18), расположенный в блоке

$$A_1^1B_1^1 + A_2^1B_1^2$$

на пересечении j–ой строчки и k–го столбца. Справедливы следующие равенства:

$$d_k^j = \sum_{s_1=1}^{p_1} a_{s_1}^j b_k^{s_1} + \sum_{s_2=p_1+1}^{p_2} a_{s_2}^j b_k^{s_2} = \sum_{s=1}^{p} a_s^j b_k^s = a_k^j. \tag{3.21}$$

Итак, $\{D\}_k^j = \{C\}_k^j$. Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом. Таким образом,

$$AB = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1B_1^1 + A_2^1B_1^2 & A_1^1B_2^1 + A_2^1B_2^2 \\ \hline A_1^2B_1^1 + A_1^2B_1^2 & A_1^2B_2^1 + A_2^2B_2^2 \end{array} \right\|. \tag{3.22}$$

Совершенно понятно, что аналогичная формула умножения имеет место для блочных матриц произвольного порядка.

Пример. Антикоммутатор матриц П. А. М. Дирака. Напомним, что матрицы Дирака имеют блочный вид (1.15) и (1.16). Докажем, что справедлива следующая формула:

$$\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_0 = O_4 \in \mathbb{C}^{4\times 4}, \tag{3.23}$$

где O_4 — нулевая матрица.

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\gamma_0\gamma_1 = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_0\sigma_1 \\ \hline \sigma_0\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\|, \tag{3.24}$$

$$\gamma_1\gamma_0 = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & -\sigma_0\sigma_1 \\ \hline -\sigma_0\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\|. \tag{3.25}$$

Из формул (3.24) и (3.25) вытекает следующая формула:

$$\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_0 = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & [\sigma_0, \sigma_1] \\ \hline [\sigma_0, \sigma_1] & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & O_2 \\ \hline O_2 & O_2 \end{array} \right\| = O_4, \tag{3.26}$$

поскольку справедливо следующее равенство:

$$[\sigma_0, \sigma_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2,$$

где $O_2 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ — нулевая матрица. ⊠

Докажем, что справедлива следующая формула:

$$\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1 = O_4 \in \mathbb{C}^{4\times 4}. \tag{3.27}$$

□ Действительно, имеем

$$\gamma_1\gamma_2 = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_2 \\ \hline -\sigma_2 & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} -\sigma_1\sigma_2 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_1\sigma_2 \end{array} \right\|, \tag{3.28}$$

$$\gamma_2\gamma_1 = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_2 \\ \hline -\sigma_2 & O_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} -\sigma_2\sigma_1 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_2\sigma_1 \end{array} \right\|. \tag{3.29}$$

Теперь заметим, что

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

$$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Следовательно,

$$\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2. \tag{3.32}$$

Поэтому из (3.28)–(3.32) вытекают следующие равенства:

$$\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1 = \left\| \begin{array}{c|c} -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 \end{array} \right\| = O_4. \quad \boxtimes \tag{3.33}$$

§ 4. Свойства произведения матриц

Операция умножения матриц обладает определенным набором свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 1. *Ассоциативность умножения.* Для любых матриц $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times r}$, $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$ справедливо равенство

$$A(BC) = (AB)C. \tag{4.1}$$

□ Действительно, во–первых, матрицы $A(BC)$ и $(AB)C$ имеют одинаковый размер $m \times n$, а во вторых, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \{A(BC)\}^j_k &= \sum_{s=1}^{p}\{A\}^j_s\{BC\}^s_k = \sum_{s=1}^{p}\{A\}^j_s\sum_{l=1}^{r}\{B\}^s_l\{C\}^l_k = \\ &= \sum_{l=1}^{r}\left(\sum_{s=1}^{p}\{A\}^j_s\{B\}^s_l\right)\{C\}^l_k = \sum_{l=1}^{r}\{AB\}^j_l\{C\}^l_k = \\ &= \{(AB)C\}^j_k. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{4.2}$$

Свойство 2. *Дистрибутивность слева.* Для любых матриц $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$, $B, C \in \mathbb{C}^{p\times n}$ справедливо следующее равенство:

$$A(B + C) = AC + BC. \tag{4.3}$$

□ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \{A(B+C)\}^j_k &= \sum_{s=1}^{p}\{A\}^j_s\{B+C\}^s_k = \sum_{s=1}^{p}\{A\}^j_s\left(\{B\}^s_k + \{C\}^s_k\right) = \\ &= \sum_{s=1}^{p}\{A\}^j_s\{B\}^s_k + \sum_{s=1}^{p}\{A\}^j_s\{C\}^s_k = \{AB\}^k_k + \{AC\}^j_k. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{4.4}$$

Свойство 3. *Дистрибутивность справа.* Для любых матриц $A, B \in \mathbb{C}^{m\times p}$ и $C \in \mathbb{C}^{p\times n}$ справедливо следующее равенство:

$$(A + B)C = AC + BC. \tag{4.5}$$

Доказывается точно также как свойство 2.

Свойство 4. *Свойство единичной матрицы.* Пусть $I_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — это так называемая единичная матрица, т. е. диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены числа 1:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть I_n и I_m — единичные матрицы размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно. Тогда для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ справедливы следующие равенства:

$$I_m A = A \quad \text{и} \quad AI_n = A. \tag{4.6}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\{I_m A\}^j_k = \sum_{s=1}^{m} \{I_m\}^j_s \{A\}^s_k = \sum_{s=1}^{m} \delta^j_s \{A\}^s_k = \{A\}^j_k, \tag{4.7}$$

$$\{AI_n\}^j_k = \sum_{s=1}^{n} \{A\}^j_s \{I_n\}^s_k = \sum_{s=1}^{n} \{A\}^j_s \delta^s_k = \{A\}^j_k, \tag{4.8}$$

где символом δ^j_k мы обозначаем символ Кронекера

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases} \qquad \boxtimes$$

Свойство 4. *Свойство следа.* Для любых матриц $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ справедливо равенство следов произведений этих матриц

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA. \tag{4.9}$$

□ Действительно, отметим, что в силу определения матриц A и B оба произведения AB и BA определены, причем $AB \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и $BA \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Поэтому и следы $\operatorname{tr} AB$ и $\operatorname{tr} BA$ тоже определены. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{j=1}^{m} \{AB\}^j_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \{A\}^j_k \{B\}^k_j \right) = \\ = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \{B\}^k_j \{A\}^j_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \{BA\}^k_k = \operatorname{tr} BA. \quad \boxtimes \tag{4.10}$$

§ 5. Обратная матрица

Определение 8. *Матрица $A^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется обратной к матрице $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, если выполнены следующие равенства*:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n. \tag{5.1}$$

Обратная матрица обладает набором свойств, которые мы сейчас сформулируем и докажем.

Свойство 1. *Единичная матрица I_n обратима и справедливо равенство $I_n^{-1} = I_n$.*

□ Действительно, это следствие следующего очевидного равенства:

$$I_n I_n = I_n. \quad \boxtimes$$

Свойство 2. *Обратная матрица A^{-1} если существует, то единственна.*

□ Действительно, пусть существуют две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1} к матрице $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}I_n = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = (A^{-1}A)A_2^{-1} = I_nA_2^{-1} = A_2^{-1}. \quad \boxtimes$$

Свойство 3. *Если матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ обратимы, то их произведение $AB \in \mathbb{C}^{n\times n}$ тоже обратимо и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n,$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n. \quad \boxtimes$$

Свойство 4. *Если матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеет обратную A^{-1}, то обратной к A^{-1} является матрица $A : (A^{-1})^{-1}$.*

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A. \quad \boxtimes$$

Обратная к матрице 2×2. Пусть нам задана матрица $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

причём $ad - bc \neq 0$, тогда обратная к этой матрице существует и имеет следующий вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

□ Действительно, проверим равенства (5.1):

$$AA^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \quad (5.4)$$

Аналогичным образом получаем, что

$$A^{-1}A = I_2. \quad \boxtimes$$

П р и м е р. В ы ч и с л е н и е о б р а т н ы х к м а т р и ц а м В. П а у л и. Докажем, что справедливы следующие равенства:

$$\sigma_j^{-1} = \sigma_j \quad \text{при} \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (5.5)$$

$\square$ Действительно, $\sigma_0 = I_2$ и поэтому в силу свойства 1 равенство (5.5) при $j = 0$ доказано. Теперь докажем, например, равенство (5.5) при $j = 2$. Действительно, в силу (5.3) справедливы следующие равенства:

$$\sigma_2^{-1} = \frac{1}{i^2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2. \quad \boxtimes$$

П р и м е р. В ы ч и с л е н и е о б р а т н ы х к м а т р и ц а м П. А. М. Д и р а к а. Мы пока не знаем, как вычислять обратные матрицы к квадратным матрицам из $\mathbb{C}^{n\times n}$ при $n > 2$. Однако, мы можем воспользоваться тем, что матрицы Дирака записываются в блочном виде 2×2 через матрицы Паули и нулевую матрицу O_2, а для матриц Паули справедливы равенства (5.5), которые означают, что

$$\sigma_j^2 = \sigma_j\sigma_j = I_2 \quad \text{при} \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (5.6)$$

Именно, докажем, что справедливы следующие равенства:

$$\gamma_0^{-1} = \gamma_0, \quad \gamma_j^{-1} = -\gamma_j \quad \text{при} \quad j = 1, 2, 3. \quad (5.7)$$

$\square$ Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\gamma_0\gamma_0 = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0^2 & O_2 \\ \hline O_2 & \sigma_0^2 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & I_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = I_4 \Rightarrow \gamma_0^{-1} = \gamma_0, \quad (5.8)$$

$$\gamma_j\gamma_j = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_j \\ \hline -\sigma_j & O_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_j \\ \hline \sigma_j & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} -\sigma_j^2 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_j^2 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} -I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & -I_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| = -I_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_j^{-1} = -\gamma_j, \quad j = 1,2,3. \quad \boxtimes \tag{5.9}$$

§ 6. Транспонированная матрица

Определение 9. *Матрицей, транспонированной по отношению к матрице* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$*, называется матрица* $A^T \in \mathbb{C}^{n\times m}$*, с элементами* $\{A^T\}_k^j = \{A\}_j^k$.

Пример. Транспонированные матрицы к матрицами В. Паули. Справедливы следующие равенства:

$$\sigma_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0, \quad \sigma_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1, \tag{6.1}$$

$$\sigma_2^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_2, \quad \sigma_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3. \tag{6.2}$$

Пример. Транспонированные к матрицам П. А. М. Дирака. Прежде всего заметим, что транспонированная к блочной матрице

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1 & A_2^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 \end{array} \right\| \tag{6.3}$$

имеет следующий вид:

$$A^T = \left\| \begin{array}{c|c} (A_1^1)^T & (A_1^2)^T \\ \hline (A_2^1)^T & (A_2^2)^T \end{array} \right\|, \tag{6.4}$$

где символами $(A_k^j)^T$ мы обозначили матрицу транспонированную к матрице A_k^j. С учетом равенств (6.3) и (6.4) справедливы следующие равенства:

$$\gamma_0^T = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0^T & O_2^T \\ \hline O_2^T & -\sigma_0^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| = \gamma_0, \tag{6.5}$$

$$\gamma_1^T = \left\| \begin{array}{c|c} O_2^T & -\sigma_1^T \\ \hline \sigma_1^T & O_2^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & -\sigma_1 \\ \hline \sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| = -\gamma_1, \tag{6.6}$$

$$\gamma_2^T = \left\| \begin{array}{c|c} O_2^T & -\sigma_2^T \\ \hline \sigma_2^T & O_2^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_2 \\ \hline -\sigma_2 & O_2 \end{array} \right\| = \gamma_2, \tag{6.7}$$

$$\gamma_3^T = \left\| \begin{array}{c|c} O_2^T & -\sigma_3^T \\ \hline \sigma_3^T & O_2^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & -\sigma_3 \\ \hline \sigma_3 & O_2 \end{array} \right\| = -\gamma_3. \tag{6.8}$$

Введём важные понятия симметричной и антисимметричной матриц.

Определение 10. *Квадратная матрица* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *называется симметрично, если* $A^T = A$*, и называется антисимметричной, если* $A^T = -A$.

Замечание. Очевидно, всякая нулевая квадратная матрица $O \in \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является и симметричной и антисимметричной одновременно. И это единственная матрица с таким свойством. Докажите!

Примеры симметричных и антисимметричных матриц. Формулы (6.1) и (6.2) означают, что матрицы В. Паули σ_0, σ_1 и σ_3 являются симметричными, а матрица σ_2 — антисимметричной. Формулы (6.5)–(6.8) означают, что матрицы П. А. М. Дирака γ_0 и γ_2 симметричные, а матрицы γ_1 и γ_3 антисимметричные.

Операция транспонирования обладает определенными свойствами, которые мы сформулируем и докажем.

Свойство 1. *Линейность операции транспонирования.* Для любых матриц $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ и для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ справедливо следующее равенство: $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$.

□ Действительно, согласно определению операции транспонирования имеем

$$\{(\alpha A + \beta B)^T\}_k^j = \{\alpha A + \beta B\}_j^k = \\ = \alpha\{A\}_j^k + \beta\{B\}_j^k = \alpha\{A^T\}_k^j + \beta\{B^T\}_k^j. \quad \boxtimes \tag{6.9}$$

Свойство 2. *Инволютивность.* Для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ справедливо равенство $(A^T)^T = A$.

□ Действительно, имеем

$$\{(A^T)^T\}_k^j = \{A^T\}_j^k = \{A\}_k^j. \quad \boxtimes$$

Свойство 3. *Транспонирование произведения.* Для любых матриц $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{C}^{p\times n}$ справедливо равенство $(AB)^T = B^T A^T$.

□ Действительно, имеем

$$\{(AB)^T\}_k^j = \{AB\}_j^k = \sum_{s=1}^{p}\{A\}_s^k\{B\}_j^s = \sum_{s=1}^{p}\{A^T\}_k^s\{B^T\}_s^j = \\ = \sum_{s=1}^{p}\{B^T\}_s^j\{A^T\}_k^s = \{B^T A^T\}_k^j. \quad \boxtimes \tag{6.10}$$

Свойство 4. *Транспонирование обратной матрицы.* Для любой обратимой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ справедливо следующее равенство: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

□ Действительно, в силу свойства 3 имеем

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n,$$
$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n.$$

Следовательно, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Замечание. Заметим, что любую матрицу $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц.

□ Действительно, справедливо следующее равенство:

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} := A_1 + A_2. \tag{6.11}$$

Ясно, что в силу свойств 1 и 2 имеем $A_1^T = A_1$, $A_2^T = -A_2$. ⊠

Лекция 2

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Системы

Любую систему из m линейных уравнений относительно n неизвестных можно записать в следующем общем виде:

$$\left\{\begin{array}{c} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \cdots + a_n^1x^n = b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \cdots + a_n^2x^n = b^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \cdots + a_n^mx^n = b^m. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Прежде всего заметим, что система уравнений (1.1) может иметь единственное решение, иметь бесконечно много решений и не иметь решений. Давайте обсудим форму записи системы уравнений (1.1).

Наблюдение 1. Неизвестные переменные мы пронумеровали верхним индексом и это не случайно. Напомним, что элементы столбца (т.е. матрица размера $n \times 1$) мы как раз нумеруем верхним индексом. Поэтому введём столбец переменных длины n поскольку у нас как раз n переменных:

$$X := \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Наблюдение 2. Коэффициенты при неизвестных $x^1, x^2, \cdots, x^n$ мы занумеровали двумя индексами a_k^j. Заметим, что верхний индекс указывает на номер уравнения системы уравнений где расположен коэффициент a_k^j, а нижний индекс указывает на неизвестную переменную x^k, на которую умножается коэффициент a_k^j. Однако, используя нашу систему записи матриц мы можем составить матрицу коэффициентов размера $m \times n$:

$$A := \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Наблюдение 3. Столбец X является матрицей размера $n \times 1$, матрица A имеет размер $m \times n$. Поэтому согласно определению произведения матриц определено произведение матрицы A на матрицу X, причем их произведение есть матрица AX размера $m \times 1$, т.е. столбец длины m. Давайте перемножим матрицу A на столбец X:

$$AX = \begin{Vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} A^1 X \\ A^2 X \\ \vdots \\ A^m X \end{Vmatrix}, \tag{1.4}$$

где $A^j = (a_1^j, a_2^j, \cdots, a_n^j)$ — j–ая строчка матрицы A. Поскольку длина строчки матрицы A равна n, а длина столбца X тоже n, то согласно правила умножения «строчка на столбец» произведение $A^j X$ определено и представляет собой следующее число:

$$A^j X = a_1^j x^1 + a_2^j x^2 + \cdots + a_n^j x^n. \tag{1.5}$$

Следовательно, из (1.4) и (1.5) вытекает, что

$$AX = \begin{pmatrix} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

где в правой части равенства (1.6) расположен столбец длины m. Теперь введём столбец правой части системы уравнений (1.1).

$$B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

который как мы видим имеет длину m. Систему уравнений (1.1) можно записать в виде равенства двух столбцов длины m :

$$\begin{pmatrix} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

а с учетом (1.6) и обозначения (1.7) систему уравнений (1.1) можно записать в компактной матричной форме записи:

$$AX = B, \tag{1.9}$$

где матрица $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, столбец неизвестных $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ и столбец $B \in \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ правой части определены формулами (1.3), (1.2) и (1.7), соот-

ветственно. В дальнейшем нам понадобиться так называемая расширенная матрица системы уравнений (1.10), которая имеет следующий вид:
$$\widetilde{A} = \|A|B\| = \|A_1, A_2, \cdots, A_n, B\|. \tag{1.10}$$

Чем удобна форма записи (1.10) по сравнению с записью системы линейных уравнений (1.1)? Оказывается из рассмотрения матричной формы (1.10) можно доказать фундаментальный результат о структуре множества всех решений системы уравнений (1.1).

Однородные системы линейных уравнений. Дадим определение.

Определение 1. *Система уравнений* (1.1) *называется однородной, если все числа* $b^1, b^2, \cdots, b^m$ *в правых частях уравнений равны нулю.*

Соответственно в матричной форме записи однородная система уравнений имеет следующий вид:
$$AX = O, \tag{1.11}$$
где $O \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ — нулевая матрица. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Если* X_1, X_2 *— два произвольных столбцы–решения системы линейных однородных уравнений* (1.11,) *то и столбец* $X_3 = \alpha X_1 + \beta X_2$ *— тоже столбец–решение системы уравнений* (1.11) *для любых чисел* α *и* β.

Доказательство. По условию утверждения выполнены следующие матричные равенства:
$$AX_1 = O, \quad AX_2 = O. \tag{1.12}$$

В силу свойств произведения матриц имеет место следующая цепочка равенств:
$$A(\alpha X_1 + \beta X_3) = \alpha AX_1 + \beta AX_2 = \alpha O + \beta O = O \tag{1.13}$$
для любых чисел α и β.

Теорема доказана.

Неоднородные системы линейных уравнений. Рассмотрим общий случай, когда столбец $B \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ — произвольный. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Если* $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ *— это какие–то два столбца–решения системы уравнений* (1.10), *то их разность* $X_1 - X_2$ *является решением соответствующей однородной системы уравнений.*

Доказательство.

Справедливы следующие равенства:
$$A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = O - O = O. \tag{1.14}$$

Теорема доказана.

Из этого утверждения вытекает, что общее решение неоднородной системы уравнений (1.10),т. е. множество всех решений неоднородной системы уравнений, можно описать как сумму частного решения неоднородной системы уравнений и общего решения однородной системы уравнений, т.е. множество всех решений однородной системы уравнений.

§ 2. Метод Гаусса

Опишем четыре так называемых элементарных преобразования над уравнениями системы уравнений (1.1), которые не меняют множества всех решений этой системы уравнений.

Элементарное преобразование типа I. Это преобразование заключается в том, что любые два каких–то уравнения из системы уравнений (1.1) меняются местами. Ясно, что это преобразование меняет форму записи системы уравнений (1.1), но не меняет множество решений этой системы уравнений. Например, если поменять местами j–ое и k–ое уравнения системы (1.1) при $j < k$, мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^k x^1 + a_2^k x^2 + \cdots + a_n^k x^n = b^k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^j x^1 + a_2^j x^2 + \cdots + a_n^j x^n = b^j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n = b^m, \end{cases} \tag{2.1}$$

которая в матричной форме записи примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^j & a_2^j & \cdots & a_n^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^k \\ \vdots \\ b^j \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Если ввести расширенную матрицу исходной системы уравнений (1.1)

$$\widetilde{A} = \|A_1, \cdots, A_j, \cdots, A_k, \cdots, A_n, B\| = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^j & a_2^j & \cdots & a_n^j & b^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k & b^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^n \end{pmatrix},$$

то после перестановки j–ой и k–ой строчек мы получим следующую расширенную матрицу:

$$\widetilde{A}' = \|A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_j, \cdots, A_n, B\| = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k & b^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^j & a_2^j & \cdots & a_n^j & b^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^n \end{pmatrix}.$$

Элементарное преобразование типа II. Это преобразование заключается в том, что произвольное уравнение из системы (1.1) умножается на не нулевое число. Это преобразование не меняет множества решений рассматриваемой системы уравнений. Отметим, что если мы умножим какое–либо уравнение на число нуль, то мы получим, вообще говоря, другую систему уравнений с другим множеством решений. Например, если j–ое уравнение системы уравнений (1.1) умножить на число α, то в матричной форме записи мы получим следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_1^j & \alpha a_2^j & \cdots & \alpha a_n^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ \alpha b^j \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

при этом преобразовании расширенная матрица системы уравнений (1.1) примет следующий вид:

$$A' = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_1^j & \cdots & \alpha a_n^j & \alpha b^j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}.$$

Элементарное преобразование типа III. Это преобразование заключается в том, что к произвольному уравнению из системы уравнений (1.1) прибавляется любое другое уравнение из той же системы (1.1), умноженное на произвольное число. Например, прибавим к j–му уравнению системы (1.1) k–ое уравнение, умноженное на число α. Пусть для определённости $j < k$. В матричной форме записи мы получим следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^j + \alpha a_1^k & \cdots & a_n^j + \alpha a_n^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_n^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^j + \alpha b^k \\ \vdots \\ b^k \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix},$$

а расширенная матрица системы после этого преобразования примет следующий вид:

$$A' = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^j + \alpha a_1^k & \cdots & a_n^j + \alpha a_n^k & b^j + \alpha b^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_n^k & b^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}.$$

Элементарное преобразование IV. Это преобразование заключается в том, что мы переобозначаем переменные. Например, пусть $j < k$ и исходная система уравнений имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1^1 x^1 + \cdots + a_j^1 x^j + \cdots + a_k^1 x^k + \cdots + a_n^1 x^n = b^1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^m x^1 + \cdots + a_j^m x^j + \cdots + a_k^m x^k + \cdots + a_n^m x^n = b^m. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Перейдём к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} a_1^1 y^1 + \dots + a_k^1 y^j + \dots + a_j^1 y^k + \dots + a_n^1 y^n = b^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^m y^1 + \dots + a_k^m y^j + \dots + a_j^m y^k + \dots + a_n^m y^n = b^m, \end{cases} \tag{2.4}$$

относительно новых переменных

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^j \\ \vdots \\ y^k \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

которые получены из исходных переменных переобозначением $y^j = x^k$ и $y^k = x^j$. При этом преобразовании расширенная матрица системы принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_j^1 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_j^m & b^m \end{pmatrix}$$

Элементарное преобразование V. Это преобразование заключается в том, что если в системе уравнений (1.1) имеется уравнение такого вида

$$0x^1 + 0x^2 + \dots + 0x^n = 0 \tag{2.5}$$

и в системе уравнений (1.1) имеется еще одно уравнение (возможно такое же), то уравнение (2.5) «вычеркивается». Пусть, например, j–ое уравнение системы уравнений (1.1) имеет вид (2.5). Тогда после его «вычеркивания» мы получим в матричной форме записи следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ a_1^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^{j-1} \\ b^{j+1} \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}.$$

После этого преобразования расширенная матрица системы примет следующий вид:

$$A' = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} & b^{j-1} \\ a_1^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} & b^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}$$

Вывод. Пять указанных элементарных преобразований равносильны соответствующим преобразованиям над строками и столбцами расширенной матрицей системы (1.1). Первому преобразованию соответствует перестановка двух строк расширенной матрицы. Второму преобразованию соответствует умножение строчки расширенной матрицы системы на не нулевое число. Третьему преобразованию соответствует прибавление к заданной строчке другой строчки, умноженной на произвольное число. Четвертому преобразованию соответствует перестановка двух столбцов расширенной матрицы, причём последний столбец не участвует в этом преобразовании. Пятому преобразованию соответствует удаление из расширенной матрицы системы нулевой строчки.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Используя только указанные первые четыре элементарные преобразования исходную систему уравнений* (1.1) *можно свести к эквивалентной системе уравнений с расширенной матрицей следующих четырёх видов*:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b^m \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}_{r+1}^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}_{r+1}^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}_{r+1}^r & \cdots & \overline{a}_n^r & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant r < \min\{m, n\}, \tag{2.7}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}^1_{m+1} & \cdots & \overline{a}^1_n & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}^2_{m+1} & \cdots & \overline{a}^2_n & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}^m_{m+1} & \cdots & \overline{a}^m_n & \overline{b}^m \end{array}\right), \quad m < n, \tag{2.8}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{array}\right), \quad m > n, \tag{2.9}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \end{array}\right), \quad m = n. \tag{2.10}$$

Прежде, чем доказывать эту теорему рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x^1 & + & x^2 & + & 2x^3 & + & x^4 & = & 1, \\ 2x^1 & + & 3x^2 & + & 0x^3 & + & x^4 & = & 0, \\ 3x^1 & + & 4x^2 & + & 2x^3 & + & 2x^4 & = & 1. \end{array}\right. \tag{2.11}$$

Выпишем расширенную матрицу системы.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right). \tag{2.12}$$

Шаг 1. Вычтем из третьей строки сумму первой и второй. В результате получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{2.13}$$

Шаг 2. Вычеркнем третью строчку. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right). \tag{2.14}$$

Шаг 3. Вычтем из второй строчки первую умноженную на 2. В результате получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right). \tag{2.15}$$

Шаг 4. Вычтем из первой строчки вторую. В результате получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right). \tag{2.16}$$

Итак, мы пришли к следующей эквивалентной системе двух неоднородных уравнений

$$\begin{cases} x^1 + 6x^3 + 2x^4 = 3, \\ \quad x^2 - 4x^3 - x^4 = -2, \end{cases}$$

которую можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} x^1 = -6x^3 - 2x^4 + 3, \\ x^2 = 4x^3 + x^4 - 2, \end{cases} \tag{2.17}$$

Какие выводы мы можем сделать из вида этой системы уравнений?

Наблюдения. Очевидно, что решений системы уравнений (2.17) бесконечно много. Если положить переменные x^3 и x^4 равными каким-либо числам c^1 и c^2, соответственно, то переменные x^1 и x^2 будут определены однозначным образом

$$x^1 = -6c^1 - 2c^2 + 3, \quad x^2 = 4c^1 + c^2 - 2.$$

Таким образом, мы можем описать все множество решений системы уравнений (2.11) следующим аналитическим образом:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 6c^1 - 2c^2 \\ -2 + 4c^1 + c^2 \\ c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $c^1, c^2 \in \mathbb{R}$ — произвольные числа.

Доказательство теоремы 3. Пусть у основной матрицы A системы 1.1

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^j & \cdots & a_k^j & \cdots & a_n^j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

элемент $a_k^j \neq 0$, в противном случае расширенная матрица системы имеет следующий вид:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b^m \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Переставляя местами строчки и столбцы (если необходимо и только столбцы основной матрицы) мы можем добиться, что элемент a_k^j окажется на пересечении первой строчки и первого столбца. Поэтому без ограничения общности можно считать, что либо основная матрица A системы нулевая либо элемент a_1^1 исходной матрицы отличен от нуля.

Разделим всю первую строчку расширенной матрицы на элемент $a_1^1 \neq 0$ и в результате этого преобразования мы получим расширенную матрицу систему следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Теперь вычтем из второй строчки первую, умноженную на a_1^2, тогда получим следующую расширенную матрицу систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & \overline{a}_2^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Аналогичным образом вычитая из каждой j–ой строчки при $j \geqslant 2$ первую строчку, умноженную на a_1^j, мы в результате получим расширенную матрицу следующего вида (для удобства элементы расширенной матрицы, полученные после преобразований, будем обозначать чертой сверху):

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & \overline{a}_2^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \overline{a}_2^m & \cdots & \overline{a}_n^m & \overline{b}^m \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Здесь возможны две ситуации либо подматрица размера $(m-1) \times (n-1)$ основной матрицы

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_2^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_2^m & \cdots & \overline{a}_n^m \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

оказалась нулевой
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$
либо найдётся ненулевой элемент $\overline{a}_k^j$ в подматрице (2.34) при $j \in \overline{2, m}$ и $k \in \overline{2, n}$. В первом случае мы привели исходную расширенную матрицу систему к следующему виду:
$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$
Во втором случае переставляя строчки и столбцы, не переставляя первую строчку и первый столбец, мы можем добиться, что элемент $\overline{a}_2^2 \neq 0$. Поэтому сразу же предположим, что $\overline{a}_2^2 \neq 0$. Разделим вторую строчку на число $\overline{a}_2^2$ и в результате получим расширенную матрицу следующего вида:
$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \overline{a}_2^m & \cdots & \overline{a}_n^m & \overline{b}^m \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$
Вычитая из j–ых строчек при $j \geqslant 3$ вторую строчку, умноженную на a_2^j, мы получим матрицу следующего вида:
$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{a}_n^m & \overline{b}^m \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$
Далее рассуждения повторяются. Поэтому за конечное число шагов мы получим расширенную матрицу системы одного из следующих видов:
$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_r^1 & \overline{a}_{r+1}^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & \overline{a}_r^2 & \overline{a}_{r+1}^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}_{r+1}^r & \cdots & \overline{a}_n^r & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant r < \min\{m, n\}, \tag{2.28}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_m^1 & \overline{a}_{m+1}^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & \overline{a}_m^2 & \overline{a}_{m+1}^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}_{m+1}^m & \cdots & \overline{a}_n^m & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad m < n, \tag{2.29}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad m > n, \tag{2.30}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \end{pmatrix}, \quad m = n. \tag{2.31}$$

Теперь мы воспользуемся «обратным ходом» метода Гаусса на примере расширенной матрицы системы (2.28). Умножим r–ю строчку матрицы (2.28) на элемент a_r^j и вычтем полученную строчку из j–ой строчки при $j = \overline{1, r-1}$. В результате получим следующую расширенную матрицу систему

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & 0 & \overline{a}_{r+1}^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}_{r+1}^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}_{r+1}^r & \cdots & \overline{a}_n^r & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Теперь умножим $(r-1)$–ю строчку матрицы (2.32) на a_{r-1}^j и вычтем из j–ой строчки при $j = \overline{1, r-2}$. Повторяя эту процедуру, в левом верхнем угле расширенной матрицы получим единичную матрицу порядка $r \times$

$\times r$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}^1_{r+1} & \cdots & \overline{a}^1_n & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}^2_{r+1} & \cdots & \overline{a}^2_n & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}^r_{r+1} & \cdots & \overline{a}^r_n & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant r < \min\{m, n\}. \tag{2.33}$$

Если применить обратный ход к расширенным матрицам вида (2.29)–(2.31), то мы получим следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}^1_{m+1} & \cdots & \overline{a}^1_n & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}^2_{m+1} & \cdots & \overline{a}^2_n & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}^m_{m+1} & \cdots & \overline{a}^m_n & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad m < n, \tag{2.34}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad m > n, \tag{2.35}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \end{pmatrix}, \quad m = n. \tag{2.36}$$

Т е о р е м а д о к а з а н а.

В ы в о д ы. Проанализируем результаты доказанной теоремы 3. Если мы пришли к расширенной матрице, у которой есть строчка следующего вида:

$$(0, \cdots, 0, \overline{b}^j), \quad b^j \neq 0,$$

то этой строчке соответствует следующее уравнение:

$$0x^1 + \cdots + 0x^n = b^j \neq 0,$$

которое противоречиво и, следовательно, исходная система уравнений не имеет решений. Таким образом, методом Гаусса можно не только строить решение системы уравнений, но и доказывать их отсутствие. Поэтому важным следствием доказанной теоремы 3 является следующая:

Теорема 4. *Система уравнений* (1.1) *либо не имеет решений либо элементарными преобразованиями пяти типов может быть приведена к эквивалентной системе уравнений с расширенной матрицей одного из четырёх видов*:

$$(0, \cdots, 0, 0), \tag{2.37}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}^1_{r+1} & \cdots & \overline{a}^1_n & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}^2_{r+1} & \cdots & \overline{a}^2_n & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}^r_{r+1} & \cdots & \overline{a}^r_n & \overline{b}^r \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant r < \min\{m, n\}, \tag{2.38}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}^1_{m+1} & \cdots & \overline{a}^1_n & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}^2_{m+1} & \cdots & \overline{a}^2_n & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}^m_{m+1} & \cdots & \overline{a}^m_n & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad m < n, \tag{2.39}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \end{pmatrix}, \quad m \geqslant n, \tag{2.40}$$

Теперь наша задача выписать решения системы уравнений, соответствующие расширенным матрицам (2.37), (2.38) и (2.40). Расширенной матрице (2.37) соответствует следующая система уравнений, состоящая из одного уравнения:

$$0x^1 + 0x^2 + \cdots + 0x^n = 0, \tag{2.41}$$

решениями которой является столбец–решение

$$X = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix}, \quad c^1, c^2, \cdots, c^n \in \mathbb{C} \tag{2.42}$$

— произвольные числа. Заметим, что столбец–решение (2.42) можно записать в следующем полезном виде:

$$X = c^1\mathbf{e}_1 + c^2\mathbf{e}_2 + \cdots + c^n\mathbf{e}_n, \tag{2.43}$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Расширенной матрице (2.40) соответствует следующая система n уравнений относительно n неизвестных:

$$y^1 = \overline{b}^1, \quad y^2 = \overline{b}^2, \cdots, y^n = \overline{b}^n. \tag{2.45}$$

При этом, если при получении расширенной матрицы (2.40) пользовались элементарным преобразованием четвертого типа, то решение

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

исходной системы уравнений (1.1) единственно и может быть получено из столбца

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

однозначно определенной перестановкой строк. Приступим к анализу расширенной матрицы (2.38). Система уравнений, соответствующая расширенной этой матрице имеет следующий вид:

$$\begin{cases} y^1 = -\overline{a}^1_{r+1} y^{r+1} - \cdots - \overline{a}^1_n y^n + \overline{b}^1, \\ y^2 = -\overline{a}^2_{r+1} y^{r+1} - \cdots - \overline{a}^2_n y^n + \overline{b}^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^r = -\overline{a}^r_{r+1} y^{r+1} - \cdots - \overline{a}^r_n y^n + \overline{b}^r. \end{cases} \tag{2.46}$$

Решение этой системы неединственно, поскольку $1 \leqslant r < n$. Заметим, что переменные $\{y^1, y^2, \cdots, y^r\}$ однозначно определяются, если задать произвольные значения оставшихся переменных $\{y^{r+1}, \cdots, y^n\}$. Положим

$$y^{r+1} = c^1, \cdots, y^n = c^{n-r}, \quad c^1, \cdots, c^{n-r} \in \mathbb{C}. \tag{2.47}$$

Тогда решение системы уравнений, соответствующей расширенной матрице (2.38), можно записать следующим образом:

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^r \\ y^{r+1} \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_{r+1}c^1 - \cdots - \overline{a}^1_n c^{n-r} + \overline{b}^1 \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_{r+1}c^1 - \cdots - \overline{a}^r_n c^{n-r} + \overline{b}^r \\ c^1 \\ \vdots \\ c^{n-r} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{b}^1 \\ \vdots \\ \overline{b}^r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_{r+1} \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_{r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c^{n-r} \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_n \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_n \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Если в процессе получения расширенной матрицы (2.38) мы пользовались элементарным преобразованием четвертого типа, то для получения столбца–решения исходной системы уравнений (1.1)

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

нужно сделать соответствующие перестановки строк в полученном столбце–решении Y (2.48). Расширенная матрица (2.39) анализируется точно также, как и расширенная матрица (2.38).

Заметим, что справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 5. *Пусть задана однородная система m линейных уравнений относительно $n > m$ неизвестных. Тогда решение этой системы неединственно и, в частности, существует нетривиальное решение.*

Доказательство. Поскольку однородная система линейных уравнений всегда имеет тривиальное решение, то рассматриваемую систему можно привести либо к системе с расширенной матрицей (2.37) либо к системе с расширенной матрицей (2.38) или с расширенной матрицей (2.39). Во всех случаях, как мы выяснили, решение неединственно.

Теорема доказана.

§ 3. Матрицы элементарных преобразований

Введём строчку размера $1 \times m$

$$I^j = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \quad (3.1)$$

на месте j–го столбца которой располагается число 1, а на остальных местах находятся числа 0. Теперь введём столбец размера $n \times 1$

$$I_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

на месте k–ой строчки которого располагается число 1, а на остальных местах числа 0. Запишем матрицу A в виде блоков–столбцов и в виде блоков–строк:

$$A = \|A_1, \cdots, A_n\|, \quad A = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\| \tag{3.3}$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$I^j A_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^{j-1} \\ a_k^j \\ a_k^{j+1} \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix} = a_k^j, \tag{3.4}$$

$$A^j I_k = (a_1^j, \cdots, a_{k-1}^j, a_k^j, a_{k+1}^j, \cdots, a_n^j) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_k^j. \tag{3.5}$$

Заметим, что первые три элементарных преобразований над матрицами можно записать в виде произведения некоторых квадратных матриц $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ слева на матрицу A и при этом получается матрица A' следующего вида:

$$A' = PA, \quad A' \in \mathbb{C}^{m \times n}. \tag{3.6}$$

Матрица элементарного преобразования первого типа. Для определенности рассмотрим операцию перестановки j–ой и

k–ой строчек при условии, что $j < k$. Эта матрица имеет следующий вид:

$$P_{jk} = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ I^k \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^{k-1} \\ I^j \\ I^k \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$P_{jk}A = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ I^k \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^{k-1} \\ I^j \\ I^k \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix} \|A_1, A_2, \cdots, A_n\| = \begin{Vmatrix} I^1A_1 & I^1A_2 & \cdots & I^1A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{j-1}A_1 & I^{j-1}A_2 & \cdots & I^{j-1}A_n \\ I^kA_1 & I^kA_2 & \cdots & I^kA_n \\ I^{j+1}A_1 & I^{j+1}A_2 & \cdots & I^{j+1}A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{k-1}A_1 & I^{k-1}A_2 & \cdots & I^{k-1}A_n \\ I^jA_1 & I^jA_2 & \cdots & I^jA_n \\ I^{k+1}A_1 & I^{k+1}A_2 & \cdots & I^{k+1}A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^mA_1 & I^mA_2 & \cdots & I^mA_n \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & a_2^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k \\ a_1^{j+1} & a_2^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_n^{k-1} \\ a_1^j & a_2^j & \cdots & a_n^j \\ a_1^{k+1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \quad ⊠ \tag{3.8}$$

М а т р и ц а э л е м е н т а р н о г о п р е о б р а з о в а н и я в т о р о г о т и п а. Для определённости предположим, что j–ая строчка умножается на число $\alpha \neq 0$. Матрица этого элементарного преобразования имеет следующий вид:

$$P_{\alpha j} = \left\| \begin{matrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ \alpha I^j \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^m \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$P_{\alpha j} A = \left\| \begin{matrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ \alpha I^j \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^m \end{matrix} \right\| \|A_1, A_2, \cdots, A_n\| = \begin{pmatrix} I^1 A_1 & I^1 A_2 & \cdots & I^1 A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{j-1} A_1 & I^{j-1} A_2 & \cdots & I^{j-1} A_n \\ \alpha I^j A_1 & \alpha I^j A_2 & \cdots & \alpha I^j A_n \\ I^{j+1} A_1 & I^{j+1} A_2 & \cdots & I^{j+1} A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^m A_1 & I^m A_2 & \cdots & I^m A_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & a_2^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ \alpha a_1^j & \alpha a_2^j & \cdots & \alpha a_n^j \\ a_1^{j+1} & a_2^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \quad \boxtimes \tag{3.10}$$

М а т р и ц а э л е м е н т а р н о г о п р е о б р а з о в а н и я т р е т ь е г о т и п а. Для определённости предположим, что к j–ой строчке матрицы прибавляется k–ая строчка, умноженная на произвольное число α, причём $j < k$. Матрица этого преобразования имеет следующий вид:

$$P_{j+\alpha k} = \left\| \begin{matrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ I^j + \alpha I^k \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^{k-1} \\ I^k \\ I^{k+1} \\ \vdots \\ I^m \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$P_{j+\alpha k} A = \left\| \begin{matrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ I^j + \alpha I^k \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^{k-1} \\ I^k \\ I^{k+1} \\ \vdots \\ I^m \end{matrix} \right\| \|A_1, A_2, \cdots, A_n\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} I^1 A_1 & I^1 A_2 & \cdots & I^1 A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{j-1} A_1 & I^{j-1} A_2 & \cdots & I^{j-1} A_n \\ I^j A_1 + \alpha I^k A_1 & I^j A_2 + \alpha I^k A_2 & \cdots & I^j A_n + \alpha I^k A_n \\ I^{j+1} A_1 & I^{j+1} A_2 & \cdots & I^{j+1} A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{k-1} A_1 & I^{k-1} A_2 & \cdots & I^{k_1} A_n \\ I^k A_1 & I^k A_2 & \cdots & I^k A_n \\ I^{k+1} A_1 & I^{k+1} A_2 & \cdots & I^{k+1} A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^m A_1 & I^m A_2 & \cdots & I^m A_n \end{matrix} \right\| =$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^{j-1} & a_2^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\
a_1^j + \alpha a_1^k & a_2^j + \alpha a_2^k & \cdots & a_n^j + \alpha a_n^k \\
a_1^{j+1} & a_2^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_n^{k-1} \\
a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k \\
a_1^{k+1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m
\end{pmatrix}. \quad \boxtimes \tag{3.12}
$$

М а т р и ц а э л е м е н т а р н о г о п р е о б р а з о в а н и я ч е т в е р т о г о т и п а. Элементарное преобразование четвёртого типа в отличие от рассмотренных выше элементарных преобразований первых трёх типов записывается квадратной матрицей $P^{jk} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и эта матрица умножается на матрицу A не слева как раньше, а справа

$$
A' = AP^{jk}. \tag{3.13}
$$

Докажем, что матрица P^{jk} при необременительном условии, что $j < k$, имеет следующий вид:

$$
P^{jk} = \|I_1, \cdots, I_{j-1}, I_k, I_j, \cdots, I_{k-1}, I_j, I_{k+1}, \cdots, I_n\| =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}. \tag{3.14}
$$

$\square$ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$
AP^{jk} = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\| \|I_1, \cdots, I_k, \cdots, I_j, \cdots, I_n\| =
$$

$$
= \left\| \begin{matrix}
A^1 I_1 & \cdots & A^1 I_k & \cdots & A^1 I_j & \cdots & A^1 I_n \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A^m I_1 & \cdots & A^m I_k & \cdots & A^m I_j & \cdots & A^m I_n
\end{matrix} \right\| =
$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_j^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_j^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \quad \boxtimes \qquad (3.15)$$

Матрица элементарного преобразования пятого типа. Выпишем матрицу преобразования, в результате которого из матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ удаляется j–ая строчка. Матрица этого преобразования $P_{j-} \in \mathbb{C}^{(m-1)\times n}$ имеет следующий вид:

$$P_{j-} = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix}. \qquad (3.16)$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$P_{j-}A = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix} \|A_1, A_2, \cdots, A_n\| =$$

$$= \begin{Vmatrix} I^1A_1 & I^1A_2 & \cdots & I^1A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{j-1}A_1 & I^{j-1}A_2 & \cdots & I^{j-1}A_n \\ I^{j+1}A_1 & I^{j+1}A_2 & \cdots & I^{j+1}A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^mA_1 & I^mA_2 & \cdots & I^mA_n \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & a_2^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ a^{j+1} & a_2^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \quad \boxtimes \qquad (3.17)$$

Лекция 3

ВЕКТОР И ЕГО КООРДИНАТЫ

§ 1. Направленные отрезки и вектор

Прежде всего напомним определение направленного отрезка.

Определение 1. *Упорядоченная пара точек (A, B) называется направленным отрезком с началом в точке A и с концом в точке B.*

Обозначение. $\overrightarrow{AB}$.

Замечание. Иногда направленный отрезок называют также связанным вектором. Если точки A и B различные, тогда направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется ненулевым, а если точки A и B совпадают, то направленный отрезок называется нулевым.

Определение 2. *Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется параллельным прямой l (плоскости π), если либо $\overrightarrow{AB}$ — нулевой, либо прямая AB параллельная прямой l (плоскости π), либо прямая AB совпадает с прямой l (лежит в плоскости π).*

Обозначение. $\overrightarrow{AB} \parallel l$, $\overrightarrow{AB} \parallel \pi$.

Теперь мы можем дать определение *коллинеарных и компланарных* направленных отрезков.

Определение 3. *Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \cdots, \overrightarrow{A_kB_k}$ называются коллинеарными (компланарными), если все они параллельны одной и той же прямой (плоскости).*

Определение 4. *Длиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние между точками A и B.*

Обозначение. $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение 5. *Два ненулевых направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются одинаково направленными, если*

1. *либо прямые (AB) и (CD) совпадают и лучи $[AB)$ и $[CD)$ одинаково направлены;*
2. *либо прямые (AB) и (CD) параллельны (и поэтому лежат в некоторой плоскости π_{ABCD}) и точки B и D лежат по одну сторону от прямой (AC) на плоскости π_{ABCD}.*

Определение 6. *Два ненулевых направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются противоположно направленными, если*

1. *либо прямые (AB) и (CD) совпадают и лучи $[AB)$ и $[CD)$ противоположны направлены;*
2. *либо прямые (AB) и (CD) параллельны (и поэтому лежат в некоторой плоскости π_{ABCD}) и точки B и D лежат по разные стороны от прямой (AC) на плоскости π_{ABCD}.*

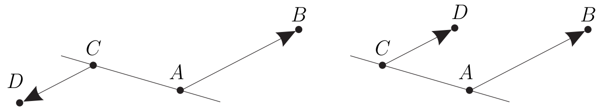

Рис. 1. Противоположно и одинаково направленные направленные отрезки.

Определение 7. *Два направленных отрезка называются равными, если*

1. *либо они оба нулевые;*
2. *либо они ненулевые, коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину.*

Замечание. Нетрудно заметить, что множество всех равных между собой направленных отрезков бесконечно. Как, например, множество всех чётных натуральных чисел. Пусть $\overrightarrow{AB}$ — какой–то направленный отрезок, например, на плоскости π. При помощи параллельного переноса этого направленного отрезка мы получим любой равный ему направленный отрезок $\overrightarrow{CD}$ на плоскости. Точно также и в пространстве. Дадим определение *вектора*.

Определение 8. *Вектором или свободным вектором* $\mathbf{a}$, *порождённым направленным отрезком* $\overrightarrow{AB}$, *называется множество всех направленных отрезков, равных направленному отрезку* $\overrightarrow{AB}$.

Замечание. Не надо бояться того, что вектором мы называли бесконечное множество направленных отрезков! Как мы увидим все операции над вектором $\mathbf{a}$ сводятся к операциям над одним произвольно выбранным направленным отрезком $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$!

Справедливо следующее несложное утверждение:

Теорема 1. *Пусть направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ порождает вектор* $\mathbf{a}$, *тогда любой другой направленный отрезок $\overrightarrow{CD}$, равный $\overrightarrow{AB}$, порождает тот же самый вектор* $\mathbf{a}$.

Операция отложения вектора от точки. В дальнейшем мы будем постоянно использовать следующую операцию «отложить вектор от точки», заключающаяся в том, что от точки A откладывается направленный отрезок $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$.

Ранее мы ввели определения коллинеарных и компланарных направленных отрезков. Теперь мы можем дать определение коллинеарных и компланарных векторов.

Определение 9. *Вектора $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются коллинеарными (компланарными), если эти векторы будучи отложенными от общей точки A дадут такие направленные отрезки $\overrightarrow{AB_1}, \cdots, \overrightarrow{AB_n}$,*

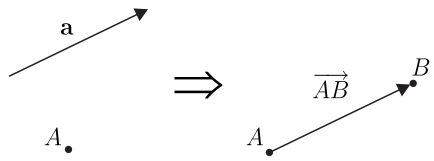

Рис. 2. Отложение вектора от заданной точки.

что прямые $(AB_1), \ldots, (AB_n)$ *совпадают* (*принадлежат одной плоскости*).

Обозначение коллинеарных векторов. $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Определение 10. *Векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называются равными, если они совпадают как два множества.*

Справедливо несложное утверждение:

Теорема 2. *Векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *равны, тогда и только тогда, когда найдутся два равных направленных отрезка* $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ *и* $\overrightarrow{CD} \in \mathbf{b}$.

Доказательство. *Необходимость.* Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равны, то они состоят из одних и тех же равных направленных отрезков. В частности, найдётся $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a} = \mathbf{b}$, который равен сам себе.

Достаточность. Пусть $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{CD} \in \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, тогда направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ порождают один и тот же вектор. Следовательно, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Теорема доказана.

Определение 11. *Длиной вектора* $\mathbf{a}$ *называется длина какого–либо направленного отрезка, порождающего этот вектор.*

Обозначение. $|\mathbf{a}|$.

Замечание. Определение 11 корректно, поскольку любые два направленных отрезка $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{CD} \in \mathbf{a}$ по определению равных направленных отрезка имеют одинаковую длину.

§ 2. Линейные операции над векторами

Обсудим теперь линейные операции над векторами.

Сложение векторов. Суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, порождённый направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$, построенный по правилу треугольника: от произвольной точки A откладывается вектор $\mathbf{a}$ и получается направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, а от точки B откладывается вектор $\mathbf{b}$ и получается направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. В результате получаем

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Замечание. Заметим, что операция сложения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не зависит от выбора начальной точки A. Действительно, пусть мы выбрали другую точку A_1. Тогда по правилу треугольника мы получим треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Параллельным переносом треуголь-

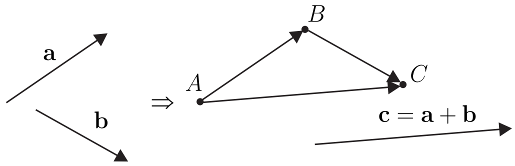

Рис. 3. Правило треугольника сложения векторов.

ника $\triangle A_1B_1C_1$ мы его можем совместить с треугольником $\triangle ABC$, причём

$$A_1 \mapsto A, \quad B_1 \mapsto B, \quad C_1 \mapsto C$$

и, следовательно, направленный отрезок $\overrightarrow{A_1C_1}$ параллельным переносом совмещается с направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$ с сохранением направления, т. е. направленные отрезки $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ равны и поэтому порождают один и тот же вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Операция сложения векторов обладает определённым набором свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 1. Коммутативность. Справедливо равенство $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

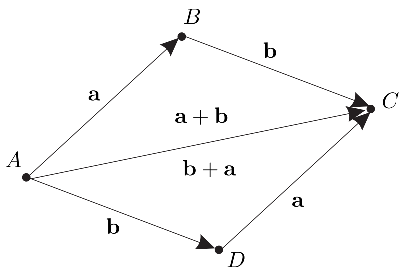

Рис. 4. Коммутативность сложения векторов.

□ Действительно, от произвольной точки A отложим вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и получим два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, соответственно. Теперь от точки B отложим вектор $\mathbf{b}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$, а от точки D отложим вектор $\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{DC_1}$. Очевидно, что $C = C_1$, причём

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad \boxtimes$$

Свойство 2. Ассоциативность. Справедливо равенство $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

□ Действительно, отложим от произвольной точки A вектор $\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, от точки B отложим вектор $\mathbf{b}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$, а о точки C отложим вектор $\mathbf{c}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BD}$. Справедливо следующее равен-

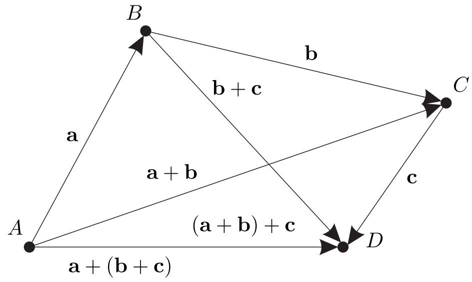

Рис. 5. Ассоциативность сложения векторов.

ство:
$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}). \tag{2.1}$$

Направленный отрезок $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ порождает вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, направленный отрезок $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ порождает вектор $\mathbf{b}+\mathbf{c}$. Следовательно, в силу (2.1) имеет место следующее равенство:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}). \quad \boxtimes$$

Свойство 3. Нулевой вектор. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что для любого вектора $\mathbf{a}$ справедливо равенство $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$.

$\square$ Действительно, пусть $\mathbf{0}$ — это множество всех нулевых направленных отрезков, т. е. $\mathbf{0}:=\{\overrightarrow{BB}$, для всех точек $B\}$. Отложим от произвольной точки A вектор $\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}.$$

Согласно определению суммы векторов отсюда имеем

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}. \quad \boxtimes$$

Свойство 4. Противоположный вектор. Для любого вектора $\mathbf{a}$ найдётся такой вектор $\mathbf{a}'$, что $\mathbf{a}+\mathbf{a}'=\mathbf{0}$.

$\square$ Действительно, отложим от произвольной точки A вектор $\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Заметим, что справедливо равенство

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}.$$

Согласно определению суммы векторов и определения нулевого вектора $\mathbf{0}$ вытекает следующее равенство:

$$\mathbf{a}+\mathbf{a}'=\mathbf{0},$$

где вектор $\mathbf{a}'$ порожден направленным отрезком $\overrightarrow{BA}$, если вектор $\mathbf{a}$ порожден направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$. $\boxtimes$

Лемма 1. *Противоположный вектор единственный.*

Доказательство.

Пусть существуют два противоположных вектора $\mathbf{a}_1'$ и $\mathbf{a}_2'$ к вектору $\mathbf{a}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{a}_1' = \mathbf{a}_1' + \mathbf{0} = \mathbf{a}_1' + (\mathbf{a} + \mathbf{a}_2') = (\mathbf{a}_1' + \mathbf{a}) + \mathbf{a}_2' = \mathbf{0} + \mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2'.$$

Лемма доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Если* $|\mathbf{a}| = 0$, *то* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Проведём доказательство от противного. Пусть $|\mathbf{a}| = 0$, но $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Тогда найдется ненулевой направленный отрезок $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$. В частности,

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}| \neq 0.$$

Противоречие.

Теорема доказана.

Дадим определение.

Определение 12. *Два ненулевых вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называются сонаправленными* $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, *если будучи отложены от произвольной общей точки* A, *соответствующие направленные отрезки* $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ *и* $\overrightarrow{AC} \in \mathbf{b}$ *имеют одинаковое направление. Два ненулевых вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называются противоположно направленными* $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$, *если будучи отложены от произвольной общей точки* A, *соответствующие направленные отрезки* $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ *и* $\overrightarrow{AC} \in \mathbf{b}$ *имеют противоположные направления.*

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. *Два вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *равны тогда и только тогда, когда они сонаправлены* $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ *и имеют одинаковую длину* $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

Доказательство. *Необходимость* условий очевидна. Поэтому докажем *достаточность*. Отложим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от общей произвольной точки A и получим два направленных отрезка $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AC} \in \mathbf{b}$, которые коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину. Следовательно, они равны. В силу результата теоремы 2 векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равны.

Теорема доказана.

Теперь приступим к обсуждению еще одной операции над векторами — *умножение вектора на вещественное число*.

Умножение вектора на число. Произведением вектора $\mathbf{a}$ на число α называется вектор $\mathbf{b}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

1. $|\mathbf{b}| = |\alpha||\mathbf{a}|$;
2. если $\alpha \neq 0$, то $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ при $\alpha > 0$ и $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, если $\alpha < 0$.

Обозначение. $\alpha\mathbf{a}$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 5. *Для противоположного вектора* $\mathbf{a}'$ *к вектору* $\mathbf{a}$ *справедливо следующее явное выражение*: $\mathbf{a}' = (-1)\mathbf{a}$.

Доказательство.

Для противоположного вектора к нулевому вектору $\mathbf{0}$ утверждение очевидно. Пусть ненулевой вектор $\mathbf{a}$ порождён направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, тогда противоположный вектор $\mathbf{a}'$ порождён направленным отрезком $\overrightarrow{BA}$. Введём новый вектор

$$\mathbf{b} := (-1)\mathbf{a}.$$

Отсюда и из определения умножения числа на вектор справедливы следующие свойства:
1. $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$;
2. $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$.

Отложим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от общей точки и получим два направленных отрезка $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AC} \in \mathbf{b}$, которые лежат на одной прямой, имеют одинаковую длину и противоположно направлены. Докажем, что направленные отрезки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BA}$ равны. Действительно, эти направленные отрезки коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину. Следовательно, в силу результата теоремы 1 равные направленные отрезки порождают один и тот же вектор. Следовательно, векторы $\mathbf{b} \ni \overrightarrow{AC}$ и $\mathbf{a}' \ni \overrightarrow{BA}$ совпадают. Следовательно, $\mathbf{a}' = (-1)\mathbf{a}$.

Теорема доказана.

Операция умножения вектора на вещественное число обладает рядом свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 5. Особая роль числа 1. Для любого вектора $\mathbf{a}$ справедливо следующее равенство: $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

□ Действительно, пусть $\mathbf{b} := 1\mathbf{a}$. Тогда согласно определению произведения числа на вектор имеем

$$|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \quad \text{и} \quad \mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}.$$

Согласно результату теоремы 4 приходим к равенству $\mathbf{b} = \mathbf{a}$. ⊠

Свойство 6. Ассоциативность умножения на числа. Для любых чисел α и β и для любого вектора $\mathbf{a}$ справедливо равенство

$$(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a}).$$

□ Действительно, введем следующие два вектора:

$$\mathbf{b}_1 = \alpha(\beta\mathbf{a}), \quad \mathbf{b}_2 = (\alpha\beta)\mathbf{a}.$$

Согласно определению умножения числа на вектор имеем
1. если $|\mathbf{b}_1| = |\alpha\beta||\mathbf{a}| = |\mathbf{b}_2|$,
2. если $\alpha\beta > 0$, то $\mathbf{b}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}_2 \uparrow\uparrow \mathbf{a}$,
3. если $\alpha\beta < 0$, то $\mathbf{b}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}_2 \uparrow\downarrow \mathbf{a}$.

В любом случае, если $\alpha\beta \neq 0$, то $\mathbf{b}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{b}_2$. Если же $\alpha\beta = 0$, то $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0} = \mathbf{b}_2$. Итак, в силу теоремы 4 векторы $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$. ⊠

Свойство 7. Дистрибутивность относительно сложения чисел. Для любых чисел α, β и любого вектора $\mathbf{a}$ справедливо равенство

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}. \tag{2.2}$$

□ Действительно, нужно рассмотреть шесть случаев.

Случай 1. Либо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ либо $\alpha = 0$ либо $\beta = 0$. В этих ситуациях равенство (2.2) становится тривиальным.

Рис. 6. Случай 2.

Случай 2. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В этом случае $\alpha\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и $\beta\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$. Отложим от произвольной точки A вектор $\alpha\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, а от точки B отложим вектор $\beta\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$, причем справедливо равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \tag{2.3}$$

Докажем, что направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ порождает вектор $(\alpha + \beta)\mathbf{a}$. Действительно, так как $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то точка B лежит между точками A и C. Поэтому имеем

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = \alpha|\mathbf{a}| + \beta|\mathbf{a}| = (\alpha + \beta)|\mathbf{a}| = |(\alpha + \beta)\mathbf{a}|. \tag{2.4}$$

В тоже время $(\alpha + \beta)\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и поэтому

$$\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow (\alpha + \beta)\mathbf{a}. \tag{2.5}$$

Из свойств (2.4) и (2.5) вытекает, что направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ порождает вектор $(\alpha + \beta)\mathbf{a}$ и, следовательно, из (2.3) вытекает (2.2).

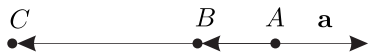

Рис. 7. Случай 3.

Случай 3. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\alpha < 0$ и $\beta < 0$. Тогда

$$\alpha\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a} \quad \text{и} \quad \beta\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}.$$

Отложим от произвольной точки A вектор $\alpha\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Затем, от точки B отложим вектор $\beta\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \mathbf{a}. \tag{2.6}$$

Докажем, что направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ порождает вектор $(\alpha + \beta)\mathbf{a}$. Так как направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены, то точка B лежит между точками A и C. Поэтому справедливы равенства

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\alpha||\mathbf{a}| + |\beta||\mathbf{a}| = \\ = -(\alpha + \beta)|\mathbf{a}| = |\alpha + \beta||\mathbf{a}| = |(\alpha + \beta)\mathbf{a}|. \tag{2.7}$$

Итак, $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ и $(\alpha+\beta) \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ и, значит,

$$\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow (\alpha+\beta)\mathbf{a} \quad \text{и} \quad |\overrightarrow{AC}| = |(\alpha+\beta)\mathbf{a}|.$$

Значит, направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ порождает вектор $(\alpha+\beta)\mathbf{a}$ и поэтому в силу (2.6) приходим к равенству (2.2).

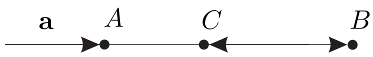

Рис. 8. Случай 4.

Случай 4. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\alpha > 0$ и $\beta < 0$ и $\alpha > |\beta|$. Отложим от точки A вектор $\alpha\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Затем от точки B отложим вектор $\beta\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \tag{2.8}$$

Так как $\alpha > |\beta|$, то точка C лежит между точками A и B. Поэтому

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}| = (|\alpha| - |\beta|)|\mathbf{a}| = |\alpha+\beta||\mathbf{a}| = |(\alpha+\beta)\mathbf{a}|. \tag{2.9}$$

Заметим, что $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и $(\alpha+\beta)\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и поэтому $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow (\alpha+\beta)\mathbf{a}$. Следовательно, направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ порождает вектор $(\alpha+\beta)\mathbf{a}$.

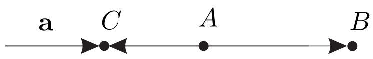

Рис. 9. Случай 5.

Случай 5. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\alpha > 0$ и $\beta < 0$, причем $\alpha < |\beta|$. Отложим от произвольной точки A вектор $\alpha\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Затем от точки B отложим вектор $\beta\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \tag{2.10}$$

Отметим, что $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$. Справедливы равенства

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{AB}| = |\beta||\mathbf{a}| - |\alpha||\mathbf{a}| = |\beta+\alpha||\mathbf{a}| = |(\alpha+\beta)\mathbf{a}|. \tag{2.11}$$

Отметим, что $(\alpha+\beta)\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ и поэтому $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow (\alpha+\beta)\mathbf{a}$. Следовательно, в силу (2.11) направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ порождает вектор $(\alpha+\beta)\mathbf{a}$.

Случай 6. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\alpha > 0$ и $\beta < 0$, причём $\alpha + \beta = 0$. Тогда $(\alpha+\beta)\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Справедливы равенства

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + (-\alpha)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + (-1)(\alpha\mathbf{a}) = \mathbf{0},$$

поскольку в силу результата теоремы 5 вектор $(-1)(\alpha\mathbf{a})$ противоположный к вектору $\alpha\mathbf{a}$. ⊠

Прежде чем доказывать оставшееся свойство операции умножения числа нам вектор докажем следующую важную теорему, имеющую самостоятельное значение:

Теорема 6. *Пусть даны векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, *причём* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. *Они коллинеарны тогда и только тогда, когда найдётся единственное число* λ, *для которого* $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — коллинеарные векторы. Если $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то $\lambda = 0$. Пусть $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Положим

$$\lambda = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}.$$

Докажем, что справедливы следующие равенства:

1. $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, если $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$;
2. $\mathbf{b} = -\lambda\mathbf{a}$, если $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$.

$\square$ Действительно, пусть $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$. Введём вектор

$$\mathbf{b}_1 := \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}. \tag{2.12}$$

Заметим, что $\mathbf{b_1} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и $|\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}|$, а поскольку $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, то $\mathbf{b}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{b}$. Следовательно, векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}$ совпадают.

Пусть теперь $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$. Введём вектор

$$\mathbf{b}_2 := -\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}. \tag{2.13}$$

Заметим, что $\mathbf{b}_2 \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ и $|\mathbf{b}_2| = |\mathbf{b}|$, причем $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$. Поэтому $\mathbf{b}_2 \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ и $|\mathbf{b}_2| = |\mathbf{b}|$. Следовательно, векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}_2$ совпадают. $\boxtimes$

Докажем теперь *единственность*. Пусть существуют два числа λ_1 и λ_2 такие, что

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a} = \lambda_2\mathbf{a}.$$

Согласно результату теоремы 5 имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathbf{a} + (-1)\lambda_2\mathbf{a} = \lambda_2\mathbf{a} + (-1)\lambda_2\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{a} + (-1)\lambda_2\mathbf{a} = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2,\end{aligned} \tag{2.14}$$

поскольку $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Единственность доказана.

Достаточность. Пусть найдётся единственное число λ такое, что $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. Если $\lambda = 0$, то векторы $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ коллинеарны, поскольку по определению нулевой вектор коллинеарен любому вектору. Если $\lambda \neq 0$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ согласно определению операции умножения числа на вектор либо сонаправлены ($\lambda > 0$) либо противоположны направлены ($\lambda < 0$). Следовательно, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от произвольной точки A получим два направленных отрезка $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AC} \in \mathbf{b}$, которые будут расположены на общей прямой. Следовательно, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Теорема доказана.

Свойство 8. Дистрибутивность относительно сложения векторов. Для любого числа α и для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливо равенство

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}. \tag{2.15}$$

□ Действительно, нужно рассмотреть четыре случая.

Случай 1. Если либо $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ либо $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ либо $\alpha=0$ равенство (2.15) становится тривиальным.

Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — ненулевые и число $\alpha \neq 0$. Тогда нужно рассмотреть еще два случая.

Случай 2. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Тогда согласно результату теоремы 6 найдётся такое число $\lambda \neq 0$, то справедливо равенство $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$. Проверим справедливость равенства (2.15). Справедливы следующие равенства:

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{a}) = \alpha(1+\lambda)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}+\alpha(\lambda\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}.$$

Случай 3. Пусть $\alpha>0$ и векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. Тогда $\alpha\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ и $\alpha\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$. От произвольной точки A отложим векторы $\mathbf{a}$ и $\alpha\mathbf{a}$ и получим направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AB'}$. Теперь от точек B и B' отложим векторы $\mathbf{b}$ и $\alpha\mathbf{b}$ соответственно и получим направленные отрезки $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{B'C'}$ соответственно. Докажем, что треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$ подобны.

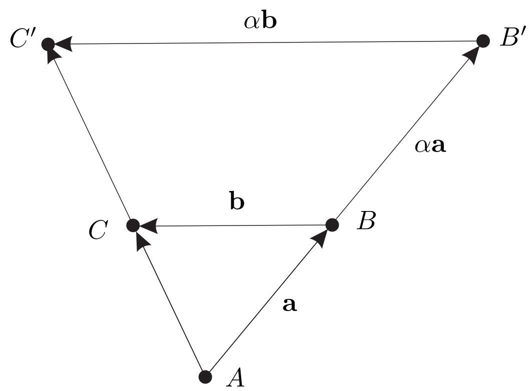

Рис. 10. Подобные треугольники. Случай $\alpha>0$.

□□ Действительно, поскольку векторы $\mathbf{b}$ и $\alpha\mathbf{b}$ сонаправлены, то равны углы $\angle ABC$ и $\angle AB'C'$. Кроме того,

$$\frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \alpha.$$

Значит, треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$ подобны, так как раны углы и пропорциональны прилежащие стороны треугольников. ⊠⊠

Из подобия треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$ вытекает равенство углов $\angle BAC$ и $\angle B'AC'$, т.е. точки A, C и C' лежат на одной прямой. Кроме того, из подобия треугольников вытекает, что

$$\frac{|AC'|}{|AC|} = \alpha.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{AC'} = \alpha\overrightarrow{AC}. \tag{2.16}$$

Заметим, что

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \in \mathbf{a}+\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} \in \alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}. \tag{2.17}$$

Поэтому из (2.16) и (2.17) вытекает равенство

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}.$$

Случай 4. Пусть $\alpha < 0$. Тогда $\alpha\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ и $\alpha\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$. Отложим от точки A вектор $\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Теперь отложим от точки A вектор $\alpha\mathbf{a}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB'}$. Теперь от точки B отложим вектор $\mathbf{b}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$, а от точки B' отложим вектор $\alpha\mathbf{b}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{B'C'}$.

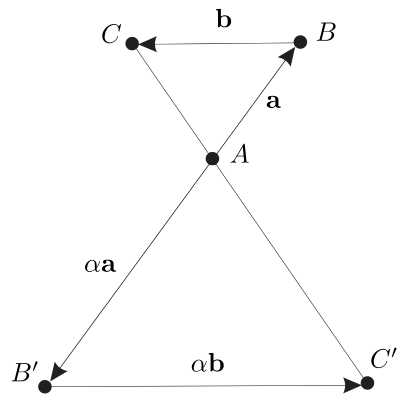

Рис. 11. Подобные треугольники. Случай $\alpha < 0$.

Точно также как и ранее в случае 3 можно доказать подобие треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$. Из подобия вытекает равенство углов

$$\angle BAC = \angle B'AC'.$$

Это вертикальные углы, поскольку векторы $\mathbf{b}$ и $\alpha\mathbf{b}$ противоположно направлены. Поэтому точки C', A и C лежат на одной прямой. Из подобия треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$ вытекает отношение

$$\frac{|AC'|}{|AC|} = \alpha. \tag{2.18}$$

Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AC'}$ противоположно направлены. Следовательно,

$$\overrightarrow{AC'} = \alpha\overrightarrow{AC}. \tag{2.19}$$

В тоже время справедливы выражения

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} \in \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \in \mathbf{a} + \mathbf{b}. \tag{2.20}$$

Поэтому из (2.19) и (2.20) вытекает искомое равенство

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$$

§ 3. Линейно зависимые и независимые векторы

Мы приступаем к изучению основных понятий аналитической геометрии — координаты векторов и точек. Фундаментальное значение этих понятий заключается в том, что задание координат векторов и точек можно свести широкий спектр геометрических задач *планиметрии* и *стереометрии* к задачам *алгебры*.

Условимся называть вектор

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$$

называть линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ с коэфффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. В этом случае будем говорить, что вектор $\mathbf{b}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Отметим, что если числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не равны одновременно нулю, то соответствующая линейная комбинация называется нетривиальной, в противном случае линейная комбинация называется тривиальной.

Определение 13. *Семейство векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется линейно зависимой, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых по крайней мере один отличен от нуля, что линейная комбинация*

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Если семейство векторов не является линейно зависимой, то она называется линейно независимой.

Замечание. Таким образом, семейство векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависима только в том случае, когда равенство

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

возможно только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Семейства линейно зависимых векторов обладает определённым набором свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 1. *От перестановки местами семейство векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ остается линейно зависимым или линейно независимым.*

☐ Утверждение очевидно. ☒

С в о й с т в о 2. *Если семейство векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *содержит нулевой вектор, то это семейство является линейно зависимым.*

□ Действительно, перестановками местами векторов в рассматриваемом семействе можно добиться, чтобы первый вектор в семействе был нулевым. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$. Составим следующую нетривиальную линейную комбинацию:

$$1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_n.$$

Очевидно, что эта линейная комбинация равна нулевому вектору $\mathbf{0}$. Стало быть, семейство векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимо. ⊠

С в о й с т в о 3. *Если в системе векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *содержится линейно зависимое подсемейство, то всё семейство тоже линейно зависимое.*

□ Перестановками местами в рассматриваемом семействе векторов можно добиться, что первые $m \in [1, n]$ векторов являются линейно зависимыми. Поэтому существует такая нетривиальная комбинация

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0). \tag{3.1}$$

Составим следующую линейную комбинацию всего семейства векторов

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{a}_m + 0\mathbf{a}_{m+1} + \cdots + 0\mathbf{a}_n. \tag{3.2}$$

Эта нетривиальная линейная комбинация векторов всего семейства в силу (3.1) равна нулевому вектору и поэтому семейство векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимо. ⊠

С в о й с т в о 4. *Семейство векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, *содержащее не менее двух векторов, линейно зависимо тогда и только тогда, когда один из векторов линейно выражается через остальные векторы.*

□ *Необходимость.* Пусть семейство векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимо и $n \geqslant 2$. Тогда найдётся нетривиальная линейная комбинация

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0).$$

Без ограничения общности будем считать, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда получим равенство

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{a}_n,$$

т. е. один из векторов линейно выражается через остальные.

Достаточность. Пусть один из векторов линейно выражается через остальные векторы. Например,

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n.$$

Отсюда получаем равенство

$$1\mathbf{a}_1 + (-\alpha_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (-\alpha_n)\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Стало быть, семейство векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимо. ⊠

Мы ввели алгебраическое свойство линейной зависимости. Но в аналитической геометрии каждое алгебраическое свойство имеет геометрический смысл и наоборот тоже. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 7. *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы. В силу свойства 4 один из векторов линейно выражается через другой. Например,

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}.$$

Если вектор $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, тогда в силу теоремы 6 векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны.

Достаточность. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Тогда в силу теоремы 6 один из векторов линейно выражается через другой. Например,

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}.$$

В силу свойства 4 векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Следствие. *Система векторов, состоящая из двух неколлинеарных векторов, линейно независима.*

Теперь нам нужно доказать ряд *геометрических* результатов относительно семейств *коллинеарных и компланарных* векторов.

Лемма 2. *Если семейство векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ состоит из коллинеарных векторов, то оно является компланарным.*

Доказательство. Отложим векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_2$ от произвольной точки A и получим направленные отрезки $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}, \ldots, \overrightarrow{AB_n}$, которые в силу коллинеарности векторов будут расположены на одной прямой, которая, очевидно, принадлежит некоторому семейству плоскостей.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Система, состоящая из двух векторов, является компланарной.*

Доказательство. Отложим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от произвольной точки A. В результате получим два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, соответственно. Прямые (AB) и (AC) принадлежат некоторой плоскости π, не единственной, в случае если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Лемма доказана.

Наконец, справедливо следующее утверждение, которое связывает алгебраическое понятие *линейной зависимости* семейства векторов и геометрического понятия *компланарности*.

Теорема 8. *Для того чтобы три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы. Тогда согласно свойству 4 один из векторов будет выражаться через оставшиеся. Без ограничения общности будем считать, что

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}. \tag{3.3}$$

Отложим все векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ от одной точки O, тогда равенство (3.3) примет следующий вид:

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}, \tag{3.4}$$

т.е. согласно определению операций сложения направленных отрезков и умножения на направленных отрезков на число направленный отрезок $\overrightarrow{OC}$ лежит в той же плоскости, что и направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

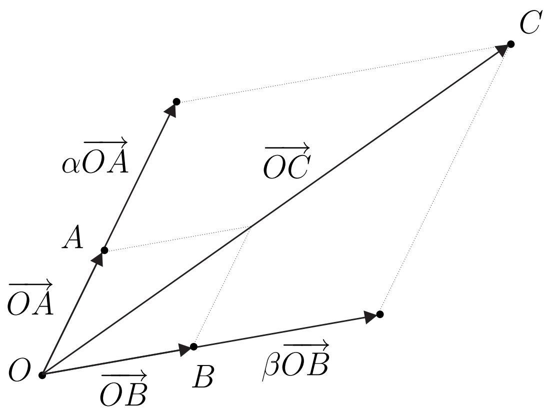

Рис. 12. К доказательству необходимости.

Достаточность. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Если какие–либо два вектора из этой тройки коллинеарны, то по теореме 7 векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы. Поэтому предположим, что никакие два вектора из трёх не являются коллинеарными. Теперь отложим векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ от произвольной точки O и получим три соответствующих направленных отрезков

$$\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC}.$$

Через точку C направленного отрезка $\overrightarrow{OC}$ проведём прямую параллельную направленному отрезку $\overrightarrow{OB}$. Точку пересечения с линией действия направленного отрезка $\overrightarrow{OA}$ обозначим через A_1. Теперь проведём прямую через точку C параллельно направленному отрезку $\overrightarrow{OA}$. Точку пересечения с линией действия направленного отрезка $\overrightarrow{OB}$ обозначим через B_1.

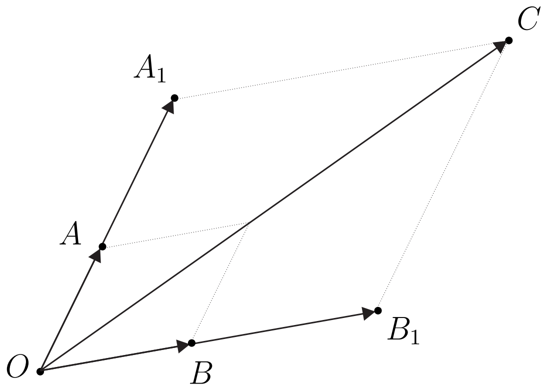

Рис. 13. К доказательству достаточности.

Приходим к следующему равенству согласно правилу параллелограмма сложения:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}. \tag{3.5}$$

Направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ лежат на одних прямых соответственно. Поэтому найдутся такие числа α и β, что

$$\overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{OB}. \tag{3.6}$$

Следовательно, из равенств (3.5) и (3.6) вытекает равенство

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}, \tag{3.7}$$

которое в силу произвольности точки O можно переписать для соответствующих свободных векторов

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \Leftrightarrow \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + (-1)\mathbf{c} = \mathbf{0}, \tag{3.8}$$

т. е. векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

§ 4. Базис и координаты векторов

Определение 14. *Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются упорядоченными, если указано какой вектор из этой системы является первым, какой второй и .т.д., какой является n–ым.*

Определение 15. *Базисом в пространстве векторов называется такое упорядоченное линейно независимое семейство векторов, что любой вектор этого пространства линейно выражается через эту семейство векторов.*

ПРИМЕР 1. Например, векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ образуют базис на плоскости, если

1. векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ не коллинеарны;

2. любой вектор плоскости $\mathbf{a}$ по ним раскладывается, т. е. найдутся такие числа λ_1 и λ_2, что

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 9. *В пространстве векторов на прямой $\mathbb{V}_1$ базис состоит из произвольного ненулевого вектора.*

Доказательство.

Шаг 1. Докажем, что любой ненулевой вектор является линейно независимым. Действительно, пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Рассмотрим следующее равенство:

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Поскольку $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ это равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$. Итак, вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ образует линейно независимое семейство.

Шаг 2. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ — это произвольный вектор на прямой. Поскольку любой другой вектор на прямой коллинеарен вектору $\mathbf{a}$, то согласно результату теоремы 6, найдётся единственное число λ такое, что $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

Теорема доказана.

Теорема 10. *В пространстве векторов на плоскости $\mathbb{V}_2$ базис состоит из двух не коллинеарных векторов.*

Доказательство.

Шаг 1. В силу результата теоремы 7 необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов — это их линейная зависимость. Поэтому если два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, то они линейно независимы.

Шаг 2. Докажем, что любой вектор $\mathbf{c}$, лежащий в одной плоскости с неколлинеарными векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по ним раскладывается, т. е. найдутся такие числа α и β, что

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}.$$

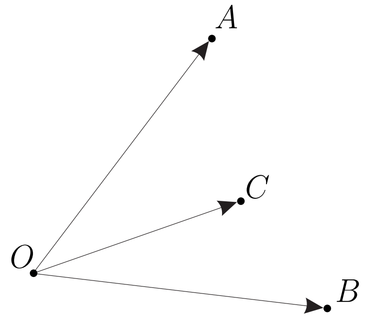

Рис. 14. Направленные отрезки.

□ Действительно, отложим все три вектора от одной произвольной фиксированной точки O плоскости, где лежат векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Получим три направленных отрезка $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Сделаем следующие два построения. Проведём через точку C прямую параллельную прямой (OB). Пусть A_1 — это точка пересечения этой прямой и прямой (OA). Также проведём через точку C прямую параллельную прямой (OA). Пусть B_1 — это точка пересечения этой прямой и прямой (OB): По

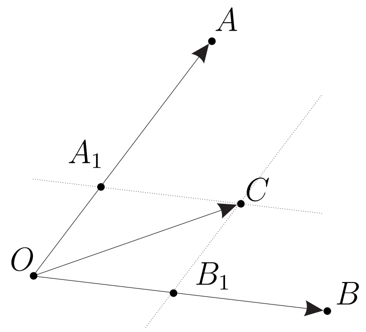

Рис. 15. Точки A_1 и B_1.

построению четырёхугольник OB_1CA_1 является параллелограммом. По правилу параллелограмма сложения направленных отрезков имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OB}_1. \tag{4.1}$$

Заметим, что направленные отрезки $\overrightarrow{OA}_1$ и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}_1$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат на одних и тех же соответствующих прямых. Поэтому найдутся такие числа α и β, что

$$\overrightarrow{OA}_1 = \alpha\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB}_1 = \beta\overrightarrow{OB}. \tag{4.2}$$

Из равенств (4.1) и (4.2) вытекает следующее равенство:

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}. \tag{4.3}$$

Поскольку $\overrightarrow{OC} \in \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OA} \in \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} \in \mathbf{b}$, то справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}.$$

Теорема доказана.

Теорема 11. *Любые три некомпланарных вектора в пространстве образуют базис в $\mathbb{V}_3$.*

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего в силу теоремы 8 вытекает, что три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в пространстве являются линейно независимыми.

Шаг 2. Докажем, что любой вектор $\mathbf{d}$ в пространстве представим через произвольную тройку некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}. \tag{4.4}$$

Отложим все четыре вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ от поизвольной точки O и получим следующие четыре направленных отрезка: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$. Определим четыре плоскости, в которых лежат указанные в фигурных скобках направленные отрезки:

$$\pi_1 = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}, \quad \pi_2 = \{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}, \quad \pi_3 = \{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\}.$$

Проделаем следующие геометрические построения:

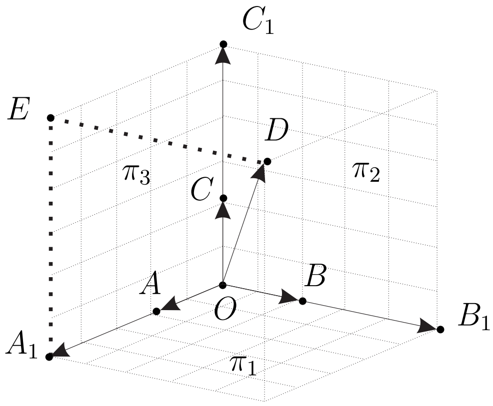

Рис. 16. Геометрические построения.

1. Проведём через точку D плоскость, параллельную π_2. Пусть A_1 — это точка пересечения этой плоскости и линии действия направленного отрезка $\overrightarrow{OA}$;

2. Проведём через точку D плоскость, параллельную π_3. Пусть B_1 — это точка пересечения этой плоскости и линии действия направленного отрезка $\overrightarrow{OB}$;

3. Проведём через точку D плоскость, параллельную π_1. Пусть C_1 — это точка пересечения этой плоскости и линии действия направленного отрезка $\overrightarrow{OC}$.

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{A_1E} + \overrightarrow{ED}. \tag{4.5}$$

С другой стороны, имеют место следующие равенства:

$$\overrightarrow{A_1E} = \overrightarrow{OC}_1, \quad \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OB}_1. \tag{4.6}$$

Поэтому из (4.5) и (4.6) вытекает следующее равенство:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}. \tag{4.7}$$

Направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OC_1}$ лежат на соответствующих трёх прямых. Поэтому найдутся такие три числа α, β и γ, что

$$\overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC_1} = \gamma\overrightarrow{OC}. \tag{4.8}$$

Из (4.7) и (4.8) вытекает следующее равенство:

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}. \tag{4.9}$$

В силу произвольности точки O приходим к равенству (4.4).

Теорема доказана.

Следствием теорем 9–11 является следующее утверждение:

Следствие. *Любые два вектора из $\mathbb{V}_1$, любые три вектора из $\mathbb{V}_2$ и любые четыре вектора из $\mathbb{V}_3$ линейно зависимы.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — это два вектора на одной и той же прямой (пространство $\mathbb{V}_1$). Если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то по свойству 2 семейства вектров и всё семейство $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ линейно зависимо. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, тогда по теореме 9 найдётся такое число α, что

$$\mathbf{b} = \alpha \cdot \mathbf{a} \Leftrightarrow \alpha \cdot \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Это нетривиальная комбинация векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, равная нулю. Поэтому семейство $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ линейно зависимо.

Шаг 2. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — это три вектора на плоскости (пространство $\mathbb{V}_2$). Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то они линейно зависимы, а тогда и всё семейство $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ линейно зависимо по свойству 3 семейства векторов. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. Тогда по теореме 10 найдутся такие числа α и β, что

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \Leftrightarrow \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + (-1) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация семейства векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, равная нулевому вектору. Следовательно, это семейство линейно зависимо.

Шаг 3. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ — это четыре вектора в пространстве (пространство $\mathbb{V}_3$). Предположим, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны, тогда они линейно зависимы и тогда согласно свойству 3 семейства векторов и всё семейство $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ линейно зависимо. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не компланарны, тогда по теореме 11 найдутся такие числа α, β, γ, что

$$\mathbf{d} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c} \Leftrightarrow \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c} + (-1) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору. Значит, семейство векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ линейно зависимо.

Следствие доказано.

Дадим определение координат вектора разложения по базису.

Определение 16. *Упорядоченный набор коэффициентов в разложении вектора по базису называется координатами вектора.*

Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — это базис в пространстве $\mathbb{V}_3$ и вектор $\mathbf{d}$ определяется его разложением по базису:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}.$$

Тогда α, β, γ — это координаты вектора $\mathbf{d}$ по базису $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Базис удобно записывать в виде строчки

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

а координаты вектора $\mathbf{d}$ по этому базису удобно записывать в виде столбца

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Тогда можно записать формулу разложения вектора $\mathbf{d}$ по базису $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ в следующей компактной форме:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 12. *Координаты вектора* $\mathbf{a}$ *в его разложении по базису* $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ *определены единственным образом.*

Доказательство.

Пусть имеются два разложения вектора $\mathbf{a}$ по базису $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \beta_1\mathbf{e}_1 + \dots + \beta_n\mathbf{e}_n.$$

Но тогда справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0 \Rightarrow \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_n = \beta_n, \end{aligned} \tag{4.10}$$

поскольку по определению базиса векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независимы.

Теорема доказана.

Справедлива теорема:

Теорема 13. *При сложении векторов их координаты относительно фиксированного базиса складываются, а при умножении вектора на вещественное число его координаты умножаются на это число.*

Доказательство. Рассмотрим случай пространства векторов $\mathbb{V}_3$. Пусть $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — это базис в $\mathbb{V}_3$. Тогда

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \beta_1\mathbf{e}_2 + \gamma_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \alpha_2\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \gamma_2\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \beta_1\mathbf{e}_2 + \gamma_1\mathbf{e}_3) + (\alpha_2\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \gamma_2\mathbf{e}_3) = \\ = (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{e}_1 + (\beta_1 + \beta_2)\mathbf{e}_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\mathbf{e}_3,$$

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3) = \lambda(\alpha\mathbf{e}_1) + \lambda(\beta\mathbf{e}_2) + \lambda(\gamma\mathbf{e}_3) = \\ = (\lambda\alpha)\mathbf{e}_1 + (\lambda\beta)\mathbf{e}_2 + (\lambda\gamma)\mathbf{e}_3.$$

Теорема доказана.

Лекция 4

СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

В этой лекции мы введем понятие скалярного произведения векторов и рассмотрим его свойства. Для этого нам понадобятся некоторые геометрические понятия.

§ 1. Проекция вектора на ось

Дадим определение.

Определение 1. *Под углом между двумя неколлинеарными векторами* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *будем понимать величину угла* $\angle AOB$, *где* $\overrightarrow{OA} \in \mathbf{a}$ *и* $\overrightarrow{OB} \in \mathbf{b}$. *Если ненулевые векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *сонаправлены, то угол между ними равен* 0, *если противоположно направлены, то* π.

Замечание. Ясно, что определение угла между векторами не зависит от выбора точки O. Угол между ненулевыми векторами заключается в пределах между 0 и π. Если хотя бы один из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ нулевой, то угол между нами считается произвольным, принимающим значения между 0 и π.

Определение 2. *Осью называется прямая, для которой указан параллельный ненулевой вектор* $\mathbf{a}$. *Направление этого вектора* $\mathbf{a}$ *называется положительным направлением оси, а направление противоположного вектора* $-\mathbf{a}$ *к вектору* $\mathbf{a}$ *называется отрицательным направлением оси.*

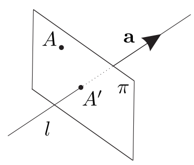

Рис. 17. Ортогональная проекция точки A на ось l.

Замечание. Пусть задана ось с вектором $\mathbf{a}$. Вектор

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

называется *ортом оси*. В частности, $|\mathbf{e}| = 1$.

Пусть в пространстве дана ось l с направляющим вектором $\mathbf{a}$ и точка A. Проведём плоскость, перпендикулярную к прямой l и проходящую через точку A. Точку A' пересечения этой плоскости и оси l называется *ортогональной проекцией* точки A на ось l.

Определение 3. *Пусть* l *— это ось с ортом* $\mathbf{e}$ *и* $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{b}$. *Тогда под векторной проекцией вектора* $\mathbf{b}$ *на ось будем называть вектор, порожденный направленным отрезком* $\overrightarrow{A'B'}$, *где* A' *и* B' *— ортогональные проекции точек* A *и* B *на ось* l.

Обозначение. $\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}$.

Заметим, что векторы $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ и $\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}$ коллинеарны. Поэтому согласно результату теоремы 6 лекции 3 найдётся такое число λ, что

$$\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}} = \lambda\mathbf{e}. \tag{1.1}$$

Определение 4. *Число* λ *в формуле* (1.1) *называется проекцией вектора* $\mathbf{b}$ *на ось* l *с ортом* $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$.

Обозначение. $\lambda = \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$.

Согласно определению 4 имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}} = \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{e}$ — орт оси.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Если* $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} > 0$, *то* $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = |\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}|$. *Если* $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} < 0$, *то* $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = -|\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}|$.

Доказательство. Из равенств

$$\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}} = \lambda\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

вытекает, что

$$|\lambda| = |\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}|.$$

Раскрываем модуль числа λ. Если $\lambda > 0$, то $\lambda = |\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}|$, если же $\lambda < 0$, то $-\lambda = |\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}| \Rightarrow \lambda = -|\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}|$. Осталось заметить, что число $\lambda = \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ согласно определению 4.

Лемма доказана.

Проекция вектора $\mathbf{b}$ на ось l с вектором $\mathbf{a}$ обладает определённым набором свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 1. Пусть l — ось, а $\mathbf{a}$ — вектор оси. Тогда для любого ненулевого вектора $\mathbf{b}$ выполняется равенство

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos\varphi, \tag{1.3}$$

где $\varphi \in [0, \pi]$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

□ Действительно, нужно рассмотреть три случая.

Случай 1. Пусть $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = 0$. Поскольку $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то это означает, что $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, т. е. угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\pi/2$. Следовательно, $|\mathbf{b}|\cos\varphi = 0$. Равенство (1.3) выполнено.

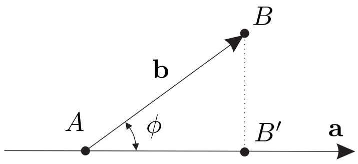

Рис. 18. Случай $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} > 0$.

Случай 2. Пусть $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} > 0$. Тогда согласно результату леммы 1 имеет место следующее равенство:

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = |\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}| \tag{1.4}$$

и $\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$. Поэтому угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ острый.

Пусть A — это произвольная точка оси l с вектором $\mathbf{a}$. Отложим от точки A вектор $\mathbf{b}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB} \in$. Ортогональная проекция A' точки A совпадает с точкой A. Пусть B' — ортогональная проекция точки B на ось l. Тогда согласно определению 3 направленный отрезок $\overrightarrow{AB'} \in \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}$ и $|\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi = |\mathbf{b}|\cos\varphi$. Согласно равенству (1.4) справедливы следующие равенства:

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = |\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}| = |\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi = |\mathbf{b}|\cos\varphi.$$

Равенство (1.3) выполнено.

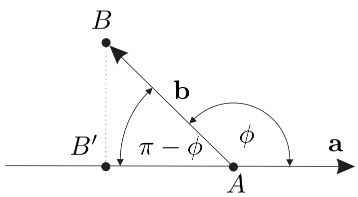

Рис. 19. Случай $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} < 0$.

Случай 3. Пусть $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} < 0$. Тогда согласно результату леммы 1 имеет место следующее равенство:

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = -|\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}|. \tag{1.5}$$

Поэтому $\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$. Угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ тупой. Отложим от произвольной точки A оси l с вектором $\mathbf{a}$ вектор $\mathbf{b}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{b}$.

Пусть B' — ортогональная проекция точки B на ось l. Тогда $\overrightarrow{AB'} \in \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}$. Справедливы следующие равенства:

$$|\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{AB}|\cos(\pi - \varphi) = -|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

Отсюда в силу равенства (1.5) имеем

$$\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -|\overrightarrow{\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}}| = -|\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi = |\mathbf{b}| \cos\varphi. \quad \boxtimes$$

Свойство 2. Пусть l — ось с вектором $\mathbf{a}$. Тогда для любых векторов $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ справедливо равенство

$$\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b_1} + \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}_2. \tag{1.6}$$

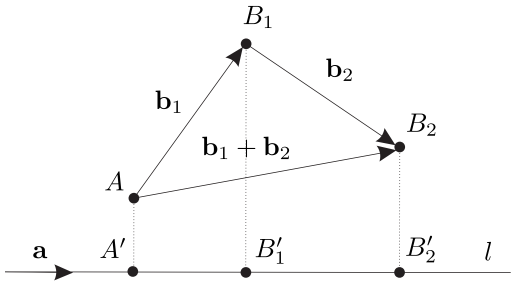

Рис. 20. К свойству 2.

□ Действительно, отложим от произвольной точки A вектор $\mathbf{b}_1$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB_1} \in \mathbf{b}_1$, а от точки B_1 отложим направленный отрезок $\overrightarrow{B_1B_2} \in \mathbf{b}_2$. Тогда

$$\overrightarrow{AB_2} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1B_2} \Rightarrow \overrightarrow{AB_2} \in \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2. \tag{1.7}$$

Пусть A', B_1' и B_2' — это ортогональные проекции точек A, B_1 и B_2 на ось l. Тогда имеем

$$\overrightarrow{A'B_2'} = \overrightarrow{A'B_1'} + \overrightarrow{B_1'B_2'}. \tag{1.8}$$

Отметим, что

$$\overrightarrow{A'B_2'} \in \overrightarrow{\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)}, \quad \overrightarrow{A'B_1'} \in \overrightarrow{\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}_1}, \quad \overrightarrow{A'B_2'} \in \overrightarrow{\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}_2}. \tag{1.9}$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)} = \overrightarrow{\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}_1} + \overrightarrow{\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}_2}. \tag{1.10}$$

Пусть $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ — орт оси l. Тогда согласно определению 4 из (1.10) получим следующее равенство:

$$\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{e} = \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}_1\mathbf{e} + \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}_2\mathbf{e}, \tag{1.11}$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\left(\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) - \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}_1 - \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}_2\right)\mathbf{e} = \mathbf{0}. \tag{1.12}$$

Поскольку $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, то приходим к выводу о том, что

$$\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) - \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}_1 - \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}_2 = 0.$$

Пришли к равенству (1.6). $\boxtimes$

Свойство 3. Пусть l — произвольная ось с вектором $\mathbf{a}$. Тогда для любого числа λ и вектора $\mathbf{b}$ выполняется равенство

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}. \tag{1.13}$$

$\square$ Действительно, рассмотрим четыре случая.

Случай 1. Если $\lambda = 0$, то равенство (1.13) очевидно.

Случай 2. Если $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = 0$, то либо $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ либо $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, но тогда либо $\lambda\mathbf{b} = \mathbf{0}$ либо $\lambda\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ и в обоих случаях $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b}) = 0$.

Случай 3. Пусть $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} \neq 0$. Отложим векторы $\mathbf{b}$ и $\lambda\mathbf{b}$ от точки $A \in \in l$. Тогда получим направленные отрезки $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{AC} \in \lambda\mathbf{b}$. Пусть A', B' и C' — ортогональные проекции точек A, B и C на ось l, соответственно. Заметим, что поскольку $A \in l$, то $A' = A$. Тогда имеем

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB'} \in \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}, \quad \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC'} \in \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b})} \tag{1.14}$$

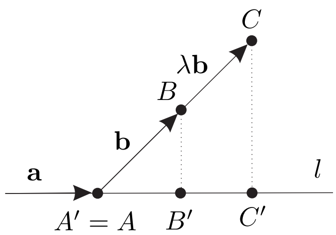

Рис. 21. Случай $\lambda > 0$.

Случай 3.1. Пусть $\lambda > 0$. Тогда $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC'}$. Нетрудно заметить. что треугольники $\triangle ABB'$ и $\triangle ACC'$ подобны (по равенству углов). При этом

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{AB'}|}. \tag{1.15}$$

Так как $\lambda > 0$, то отсюда имеем

$$\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB'} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b})} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}.$$

Отсюда согласно определению 4 имеем

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b})\mathbf{e} = \lambda\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

Поскольку $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, то отсюда вытекает равенство (1.13).

Случай 3.2. Пусть $\lambda < 0$. Тогда имеем $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC'}$. Треугольники $\triangle ABB'$ и $\triangle ACC'$ подобны (по равенству углов) и поэтому

$$|\lambda| = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{AB'}|}{|\overrightarrow{AC'}|}.$$

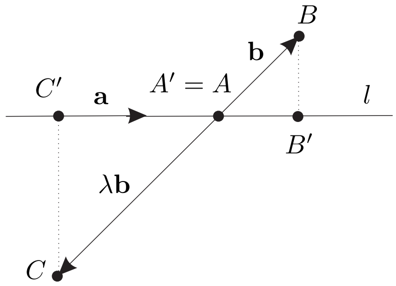

Рис. 22. Случай $\lambda < 0$.

Поскольку $\lambda < 0$, то имеет место равенство

$$\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB'} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b})} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}.$$

Далее точно также как при рассмотрении случая 3.1 приходим к равенству (1.13). ⊠

Непосредственным следствием свойств 2 и 3 является следующее свойство:

Свойство 4. Пусть l — произвольная ось с вектором $\mathbf{a}$. Тогда для любых чисел λ_1, λ_2 и векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ выполняется равенство

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2) = \lambda_1\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_1 + \lambda_2\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_2. \tag{1.16}$$

§ 2. Скалярное произведение

Дадим определение.

Определение 5. *Скалярным произведением ненулевых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если среди векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *есть хотя бы один нулевой, то скалярное произведение равно нулю.*

Обозначение. $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Таким образом, если $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Если* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *а* l *— произвольная ось, направление которой определено вектором* $\mathbf{a}$, *то для каждого вектора* $\mathbf{b}$ *справедливо равенство*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}. \tag{2.1}$$

Доказательство. *Случай* 1. Если $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ и $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = 0$. Следовательно, равенство (2.1) выполнено.

Случай 2. Пусть $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Тогда согласно свойству 1 справедливо равенство $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Поэтому равенство (2.1) выполнено.

Лемма доказана.

Скалярное произведение векторов обладает определенным набором свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 1. Справедливо равенство $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

□ Действительно, имеют место следующие равенства:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi = |\mathbf{b}||\mathbf{a}|\cos\varphi = (\mathbf{b}, \mathbf{a}). \quad \boxtimes$$

Свойство 2. Пусть $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, тогда для любой оси l с направляющим вектором $\mathbf{b}$ справедливо следующее равенство: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b}| \operatorname{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$.

□ Действительно, в силу свойства 1 и леммы 2 справедливы равенства

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) = |\mathbf{b}||\mathbf{a}|\cos\varphi = |\mathbf{b}| \operatorname{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}. \quad \boxtimes$$

Свойство 3. Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}), \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}). \tag{2.2}$$

□ Докажем первое равенство из формулы (2.2). Второе равенство является следствием первого равенства и свойства 1. Если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то равенство очевидно. Рассмотрим случай $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. В силу леммы 2 и свойства 2 ортогональной проекции вектора на ось справедливо равенство

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} + |\mathbf{a}| \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}). \quad \boxtimes$$

Свойство 4. Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и числа λ справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{2.3}$$

□ Действительно, если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то равенство (2.3) очевидно. Пусть теперь $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Тогда в силу леммы 2 и свойства 3 ортогональной проекции вектора на ось справедливы равенства

$$(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\lambda \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad \boxtimes$$

Свойство 5. Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и чисел λ_1, λ_2 справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{a}, \lambda_1\mathbf{b} + \lambda_2\mathbf{c}) = \lambda_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \lambda_2(\mathbf{a}, \mathbf{c}), \tag{2.4}$$

$$(\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda_1(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \lambda_2(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \tag{2.5}$$

□ Указанные равенства являются следствиями свойств 3 и 4. ⊠

Свойство 6. Справедливо неравенство $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geqslant 0$, причём $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

□ Действительно,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 \geqslant 0.$$

Ясно, что $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$. Если же $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 > 0$. ⊠

Определение 6. *Базис* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *называется ортонормированным, если*

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j; \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{2.6}$$

Наконец справедлива следующая важная теорема:

Теорема 1. *Если в ортонормированном базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3,$$

то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{2.7}$$

Доказательство.

Достаточно воспользоваться свойством 6

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3, x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3) = \\ = x_1x_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + x_1y_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + x_1z_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + y_1x_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + \\ + y_1y_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + y_1z_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + z_1x_2(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + z_1y_2(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + z_1z_2(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = \\ = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Теорема доказана.

§ 3. Векторное произведение векторов

Прежде всего введём определение правой тройки векторов в трёхмерном пространстве.

Определение 6. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *называется правой, если из конца вектора* $\mathbf{c}$ *кратчайший поворот от вектора* $\mathbf{a}$ *к вектору* $\mathbf{b}$ *виден совершающимся против часовой стрелки.*

Определение 7. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *называется левой, если из конца вектора* $\mathbf{c}$ *кратчайший поворот от вектора* $\mathbf{a}$ *к вектору* $\mathbf{b}$ *виден совершающимся по часовой стрелки.*

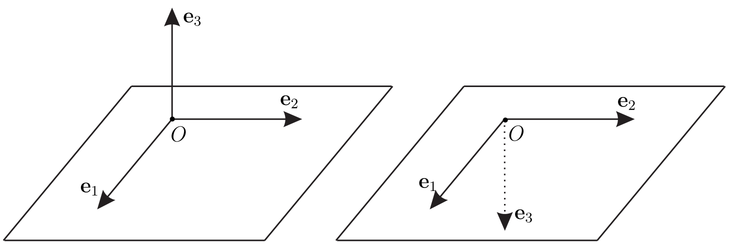

Рис. 23. Правая и левая тройка векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. *Если тройка некомпланарных векторов* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *правая, то при перестановке векторов, либо при перемене знака какого–либо из векторов получаются левые тройки векторов. И обратно, указанными операциями над упорядоченными тройками векторов левые тройки переходят в правые.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — это правая тройка векторов.

Пункт 1. Докажем, что $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$. Если в тройке $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ кратчайший поворот был виден из конца вектора $\mathbf{c}$ совершающимся против часовой стрелки, то в тройке $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ кратчайший поворот видимый из конца вектора $\mathbf{c}$ будет происходить по часовой стрелке.

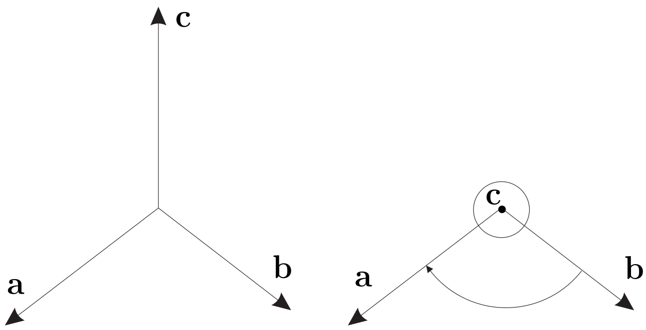

Рис. 24. Тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$.

Пункт 2. Докажем, например, что $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c}\}$ — это левая тройка векторов. Если в тройке векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ кратчайший поворот из конца вектора $\mathbf{c}$ был виден совершающимся против часовой стрелки, то тот же поворот из конца вектора $-\mathbf{c}$ будет виден совершающимся по часовой стрелки.

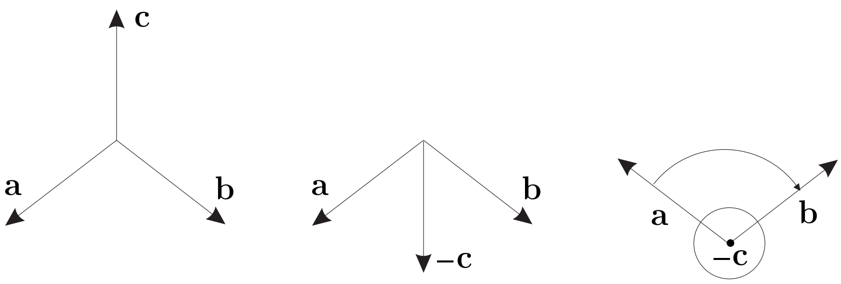

Рис. 25. Тройка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c}\}$.

Лемма доказана.

Дадим определение *векторного произведения векторов.*

Определение 8. *Векторным произведением упорядоченной пары векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется вектор*

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

удовлетворяющий следующим требованиям:

(i) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$, *где* φ *— это угол между векторами* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$;

(ii) *вектор* $\mathbf{c}$ *ортогонален каждому из векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$;

(iii) *упорядоченная тройка* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *образует правую тройку.*

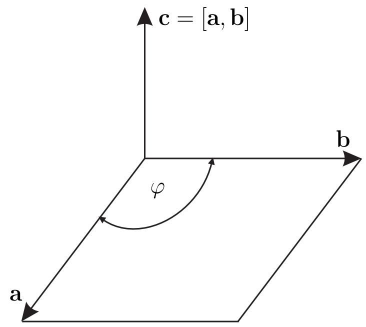

Рис. 26. Векторное произведение $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Замечание 1. Заметим, что из пункта (i) определения 14 векторного произведения векторов вытекает, что

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = S_{\mathbf{ab}},$$

где $S_{\mathbf{ab}}$ — это площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Действительно, высота h этого параллелограмма равна

$$h = |\mathbf{a}| \cdot \sin\varphi \Rightarrow S = h \cdot |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\varphi.$$

Прежде всего докажем следующую лемму:

Лемма 4. *Условиями* (i)–(iii) *определения* 7 *однозначно определяется некоторый вектор* $\mathbf{c}$.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, тогда угол φ между ними равен либо 0 либо π и в любом случае согласно свойству (i) длина вектора $\mathbf{c}$ равна нулю. Значит, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Шаг 2. Пусть теперь векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинераны. Отложим эти векторы от произвольной точки O пространства и получим направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Треугольник AOB лежит в однозначно определённнной плоскости π_{AOB} плоскости.

Теперь заметим, что у всякой плоскости существуют ортогональные ей векторы. Рассмотрим направленный отрезок $\overrightarrow{OC}$ ортогональный этой плоскости. Тогда направленный отрезок

$$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OB}.$$

Теперь фиксируем длину этого направленного отрезка условием

$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\varphi \neq 0.$$

Однако, указанным пока условиям удовлетворяют как направленный отрезок $\overrightarrow{OC}$, так и направленный отрезок $-\overrightarrow{OC}$.

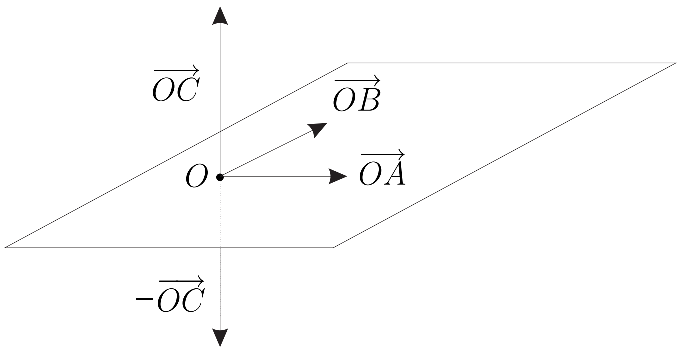

Рис. 27. К лемме 4.

Однако, если

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$$

— это правая тройка векторов, то

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, -\overrightarrow{OC}\}$$

левая тройка. И наоборот, если

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$$

— это левая тройка векторов, то

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, -\overrightarrow{OC}\}$$

— это правая тройка векторов. Следовательно, либо $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ правая тройка либо $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, -\overrightarrow{OC}\}$ правая тройка. Таким образом, однозначно определён вектор $\mathbf{c}$, порождённый направленным отрезком $\overrightarrow{OC}$ либо направленным отрезком $-\overrightarrow{OC}$, удовлетворяющий свойствам (i)–(iii).

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 5. *Векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *коллинеарны тогда и только, когда их векторное произведение* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Доказательство.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{b} = 0$, либо $\sin\varphi = 0$. Во всех случаях $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая важная теорема о таблице умножения векторов правого ортонормированного базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

Теорема 2. *Имеет место таблица векторного умножения*:

Доказательство. Проводится непосредственной проверкой всевозможных векторных произведений.

$[\cdot,\cdot]$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	0	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	0	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	0

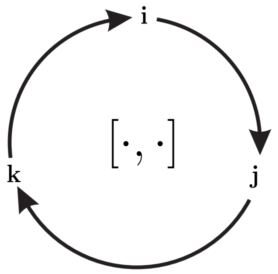

Рис. 28. Таблица векторного умножения.

Шаг 1. Сначала докажем, что $[\mathbf{i},\mathbf{j}] = \mathbf{k}$. Действительно, пусть

$$\mathbf{c} := [\mathbf{i},\mathbf{j}].$$

Теперь следуем свойствам (i)–(iii) определения 7 векторного произведения:

1. из свойства (i), поскольку $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$ и $(\mathbf{i},\mathbf{j}) = 0$, получаем равенство $|\mathbf{c}| = 1$;

2. из свойства (ii) вытекает, что вектор $\mathbf{c}$ коллинеарен вектору $\mathbf{k}$ и эти два вектора имеют одинаковую длину. Следовательно, $\mathbf{c} = \pm\mathbf{k}$;

3. заметим, что по условию $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ — это правая тройка и поэтому тройка $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{c}\}$ будет правой тогда и только тогда, когда $\mathbf{c} = \mathbf{k}$.

Шаг 2. Докажем, например, равенство $[\mathbf{j},\mathbf{k}] = \mathbf{i}$. Прежде всего заметим, что тройка $\{\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{i}\}$ правая. Действительно, она получена из правой тройки векторов $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ двумя последовательными перестановки векторов:

$$\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\} \to \{\mathbf{j},\mathbf{i},\mathbf{k}\} \to \{\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{i}\}.$$

Далее рассуждаем точно также как и на первом шаге. Аналогичным образом получаем равенство

$$[\mathbf{k},\mathbf{i}] = \mathbf{j},$$

поскольку тройка векторов $\{\mathbf{k},\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ правая:

$$\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\} \to \{\mathbf{i},\mathbf{k},\mathbf{j}\} \to \{\mathbf{k},\mathbf{i},\mathbf{j}\}.$$

Шаг 3. Теперь докажем равенство $[\mathbf{j},\mathbf{i}] = -\mathbf{k}$. Прежде всего заметим, что тройка $\{\mathbf{j},\mathbf{i},\mathbf{k}\}$ левая, поскольку получена из правой тройки $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ одной перестановкой векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$. Но тогда тройка $\{\mathbf{j},\mathbf{i},-\mathbf{k}\}$ правая, поскольку получена из левой тройки $\{\mathbf{j},\mathbf{i},\mathbf{k}\}$ заменой вектора $\mathbf{k}$ на противоположный ему вектор $-\mathbf{k}$.

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{c} := [\mathbf{j},\mathbf{i}].$$

В силу условий (i) и (ii) мы получим, что $\mathbf{c} = \pm\mathbf{k}$, а поскольку в силу условия (iii) тройка $\{\mathbf{j},\mathbf{i},\mathbf{c}\}$ должна быть правой получим, что $\mathbf{c} = -\mathbf{k}$.

Шаг 4. На круговой диаграмме мы указали способ как запомнить указанную таблицу умножения. Если умножение первого вектора на второй происходит по стрелке, то это произведение будет равно третьему вектору, взятому со знаком «+». Если умножение проводится против часовой стрелки, то умножение даст третий вектор со знаком «−».

Теорема доказана.

Следствие. *Справедливы следующие равенства*:

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = -[\mathbf{j}, \mathbf{i}], \quad [\mathbf{j}, \mathbf{k}] = -[\mathbf{k}, \mathbf{j}], \quad [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = -[\mathbf{i}, \mathbf{k}].$$

Ниже в теореме 5 мы докажем свойства линейности векторного произведения векторов, которое может быть записано в следующем виде:

$$[\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{c}] + \beta[\mathbf{b}, \mathbf{c}], \tag{3.1}$$

$$[\mathbf{a}, \delta\mathbf{c} + \delta\mathbf{d}] = \delta[\mathbf{a}, \mathbf{c}] + \delta[\mathbf{a}, \mathbf{d}], \tag{3.2}$$

которые справедливы для всех соответствующих векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ и всех чисел α, β, γ, δ.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 6. *Справедливо следующее равенство*:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$$

для любых $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *из евклидова пространства* $\mathcal{E}$.

Доказательство.

Шаг 1. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0} = [\mathbf{b}, \mathbf{a}].$$

Шаг 2. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, тогда рассмотрим два вектора

$$\mathbf{c}_1 := [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_2 := [\mathbf{b}, \mathbf{a}] \neq \mathbf{0}.$$

По свойствам (i) и (ii) векторного произведения векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ обладают следующими свойствами:

1. $|\mathbf{c}_1| = |\mathbf{c}_2|$;

2. $\mathbf{c}_1 \perp \pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\mathbf{c}_2 \perp \pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, где $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — это произвольная плоскость, которая параллельна векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Из этих двух свойств вытекает, что либо $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$ либо $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{c}_2$.

Предположим, что $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$. По свойству (iii) векторного произведения тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1\}$ и $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}_2\}$ обе правые. Тогда тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1\}$ и $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}_1\}$ обе правые, но это противоречит тому, что тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}_1\}$ получена из тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1\}$ перестановкой соседних векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Значит, случай $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$ невозможен.

Следовательно, $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{c}_2$.

Лемма доказана.

§ 4. Смешанное произведение векторов

Определение 9. *Смешанным произведением* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *трёх векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *называется число, равное скалярному произведению вектора* $\mathbf{a}$ *на векторное произведение* $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ *векторов* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 7. *Векторы* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *компланарны (линейно зависимы) тогда и только тогда, когда* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Будем считать, что вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ неколлинеарны, поскольку в противоположных случаях смешанное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. Тогда вектор $\mathbf{a}$ параллелен плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, а вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ ей перпендикулярен. Следовательно, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Шаг 2. Достаточность. Пусть $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, тогда либо

$$|\mathbf{a}| = 0 \quad \text{либо} \quad |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| = 0 \quad \text{либо} \quad \cos\varphi = 0,$$

где φ — это угол между векторами $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

В первом случае вектор $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, но тогда тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ очевидно линейно зависима и, следовательно, компланарна.

Во втором случае векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны, т. е. линейно зависимы. Поэтому линейно зависима и тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, а, стало быть, компланарна.

В третьем случае имеем

$$\mathbf{a} \perp [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \Rightarrow \mathbf{a} \,||\, \pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

и, следовательно, тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарна.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Смешанное произведение трёх некомпланарных векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *равно следующему числу:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{cases} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \text{\textit{если тройка}} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \text{\textit{правая}}; \\ -V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \text{\textit{если тройка}} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \text{\textit{левая}}, \end{cases}$$

где $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *— объём параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$, *отложенных от одной точки.*

Доказательство.

Шаг 1. Если векторы $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ компланарны, то в силу леммы 7 имеем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

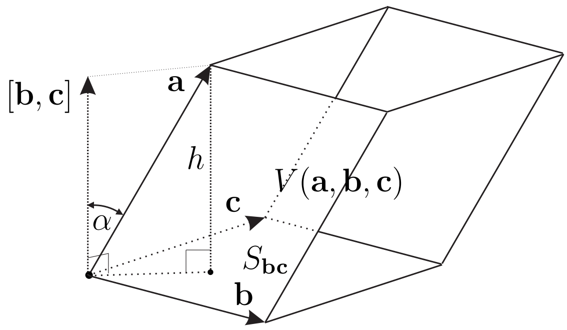

Рис. 29. Ориентированный объём.

Шаг 2. Пусть векторы $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ не компланарны. Отложим все векторы от одной точки. Тогда

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = h \cdot S_{\mathbf{bc}},$$

где

$$h = |\mathbf{a}| \cos\alpha, \quad S_{\mathbf{bc}} = |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]|,$$

где α — это угол между вектором $\mathbf{a}$ и тем вектором нормали $\mathbf{n}$ к плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, который направлен в туже часть полупространства относительно плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, что и вектор $\mathbf{a}$. Ясно, что при этом $\alpha \in (0, \pi/2]$. Заметим, что

$$\cos(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = \pm \cos\alpha,$$

причём знак «$+$» имеет место тогда, когда вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ направлен в туже часть полупространства относительно плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, что и вектор $\mathbf{a}$; знак «$-$» берётся тогда, когда векторы $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{a}$ направлены в разные полупространства относительно плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Теперь заметим, что если векторы $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{a}$ направлены в одно полупространство относительно $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, то поскольку тройка

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\}$$

правая, то и тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ тоже правая. Если же векторы $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{a}$ направлены в разные полупространства относительно плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, то поскольку тройка

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\}$$

правая, то тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, -[\mathbf{b}, \mathbf{c}]\}$ левая, а поскольку векторы $-[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{a}$ направлены в одно полупространство, то и тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ тоже левая.

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= |\mathbf{a}| \cdot |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| \cdot \cos\alpha = \\ &= |\mathbf{a}| \cdot |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| \cdot \cos|(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \end{aligned} \tag{4.1}$$

если тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ правая;

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \cdot |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| \cdot \cos\alpha = \\ = -|\mathbf{a}| \cdot |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| \cdot \cos|(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = -(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = -(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (4.2)$$

если тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ левая. Заметим, что тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ получена из тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ последовательными двумя перестановками двух соседних векторов:

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \to \{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\} \to \{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}.$$

Поэтому тройки $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ и $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ одинаково ориентированы.

Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 8. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *справедливо равенство*

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}). \quad (4.3)$$

Доказательство.

Шаг 1. В случае компланарной тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ обе части равенства (4.3) равны нулю.

Шаг 2. Предположим, что эти векторы не компланарны. Тогда, с одной стороны,

$$V_{\mathbf{abc}} = V_{\mathbf{cab}}.$$

С другой стороны, тройка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ и тройка $\{\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, одинаково направлены, поскольку

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \to \{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}\} \to \{\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\},$$

т. е. тройки связаны двумя последовательными перестановками векторов. Следовательно, в силу теоремы 3 приходим к утверждению леммы, поскольку

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \left.\begin{cases} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \text{если тройка} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \text{правая}, \\ -V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \text{если тройка} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \text{левая}, \end{cases}\right\} = \\ = \left.\begin{cases} V(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}), & \text{если тройка} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \text{правая}, \\ -V(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}), & \text{если тройка} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \text{левая}, \end{cases}\right\} = \\ = \left.\begin{cases} V(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}), & \text{если тройка} \quad \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \quad \text{правая}, \\ -V(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}), & \text{если тройка} \quad \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \quad \text{левая}, \end{cases}\right\} = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Лемма доказана.

Дадим определение циклической перестановки упорядоченного семейства векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Определение 9. *Циклической перестановкой называется результат двух последовательных перестановок векторов.*

Например, у семейства $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ существует всего две нетривиальные циклические перестановки

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\} \quad \text{и} \quad \{\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$$

и одна тривиальная

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}.$$

Следствие. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *имеют место следующие равенства*:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}), \quad (4.4)$$

т. е. при циклической перестановке векторов семейства $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *смешанное произведение не меняется, а при перестановке двух каких–либо векторов смешанное произведение меняет свой знак на противоположный.*

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку при циклической перестановке векторов упорядоченного семейства $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ориентация не меняется, то помимо доказанного в лемме 8 следующего равенства:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

получаем ещё равенство

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}).$$

Шаг 2. Используя антикоммутативность векторного произведения мы получим следующие равенства:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = -(\mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{b}]) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}),$$
$$(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = -(\mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}),$$
$$(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = -(\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Следствие доказано.

§ 5. Линейность смешанного и векторного произведений

Справедливы следующие два утверждения:

Теорема 4. *Смешанное произведение линейно по каждому из трёх сомножителей.*

Доказательство.

Шаг 1. Линейность смешанного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ по первому аргументу $\mathbf{a}$ вытекает из линейности скалярного произведения. Действительно,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

Шаг 2. В силу (4.4) справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]),$$
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]).$$

Далее нужно воспользоваться линейностью скалярного произведения по первому аргументу.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Векторное произведение линейно по каждому из сомножителей.*

Доказательство.

Докажем линейность по первому сомножителю. Введём вектор

$$\mathbf{d} := [\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2, \mathbf{b}] - \alpha_1[\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] - \alpha_2[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}].$$

Имеем

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}, \mathbf{d}) &= ([\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2, \mathbf{b}] - \alpha_1[\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] - \alpha_2[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}], \mathbf{d}) = \\ &= (\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) = \\ &= \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) + \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) = 0,\end{aligned}$$

где мы воспользовались линейностью смешанного произведения по всем аргументам. Итак, приходим к следующему равенству:

$$|\mathbf{d}|^2 = (\mathbf{d}, \mathbf{d}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Теорема доказана.

Лекция 5

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

§ 1. Декартовы системы координат

Определение 1. *Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве называется упорядоченная четвёрка*

$$\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\},$$

в которой O — это некоторая фиксированная точка пространства, векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ имеют единичную длину и являются взаимно перпендикулярными.

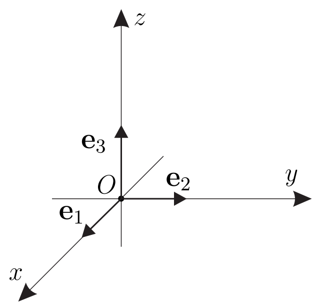

Рис. 30. Декартова система координат в пространстве и её орты.

Замечание 2. *Поскольку векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ не компланарны, то они линейно независимы и поэтому образуют базис в пространстве.*

Определение 2. *Осями координат Ox, Oy, Oz называются оси, проведённые через точку O параллельно векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, причём положительные направления осей совпадают с направлениями этих векторов соответственно.*

Обозначение. Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, Oz — ось аппликат.

Определение 3. *Радиусом–вектором $\mathbf{r}$ точки M пространства относительно фиксированной точки O называется направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$.*

Замечание 2. Отметим, что при заданной точки O радиус–вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ взаимно однозначно соответствует точке M. Мы можем ввести *декартовы координаты произвольной точки пространства.*

Определение 4. *Координатами точки M пространства называются координаты радиуса–вектора этой точки в базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \tag{1.1}$$

где векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *отложены от точки* O.

Обозначение. $M(x, y, z)$.

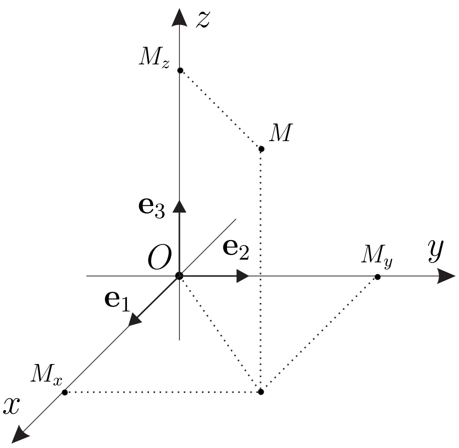

Рис. 31. Декартовы координаты точки M пространства.

По аналогии можно ввести декартову косоугольную систему координат.

Определение 5. *Косоугольной декартовой системой координат в пространстве называется упорядоченная четвёрка*

$$\{O, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\},$$

в которой O — это некоторая фиксированная точка пространства, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *являются некомпланарными.*

Аналогичным образом вводятся декартовы системы координат на плоскости $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и декартова система координат на прямой $\{O, \mathbf{e}_1\}$.

§ 2. Направляющие косинусы

Пусть рассматриваемая точка M имеет координаты (x, y, z) в прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Тогда

$$x = \mathrm{Pr}_{\mathbf{e}_1} \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\alpha, \tag{2.1}$$

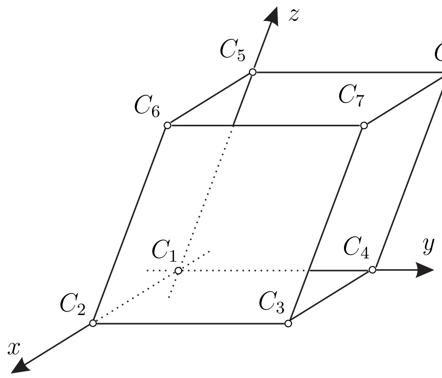

Рис. 32. Косоугольная система координат в пространстве, связанная с кристаллической решеткой.

$$y = \mathrm{Pr}_{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\beta, \tag{2.2}$$

$$z = \mathrm{Pr}_{\mathbf{e}_3} \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\gamma, \tag{2.3}$$

где $\alpha \in [0, \pi]$, $\beta \in [0, \pi]$ и $\gamma \in [0, \pi]$ — углы между радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$ и векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, соответственно.

□ Действительно, пусть

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \tag{2.4}$$

Тогда имеем

$$x = \left(\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_1\right) = |\mathbf{e}_1| \,\mathrm{Pr}_{\mathbf{e}_1} \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\alpha, \tag{2.5}$$

$$y = \left(\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_2\right) = |\mathbf{e}_2| \,\mathrm{Pr}_{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\beta, \tag{2.6}$$

$$z = \left(\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_3\right) = |\mathbf{e}_3| \,\mathrm{Pr}_{\mathbf{e}_3} \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\gamma. \quad \boxtimes \tag{2.7}$$

Поскольку

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \tag{2.8}$$

то

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{2.9}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{2.10}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{2.11}$$

Определение 6. *Числа* $\cos\alpha$, $\cos\beta$ *и* $\cos\gamma$ *называются направляющими косинусами радиус–вектора* $\overrightarrow{OM}$.

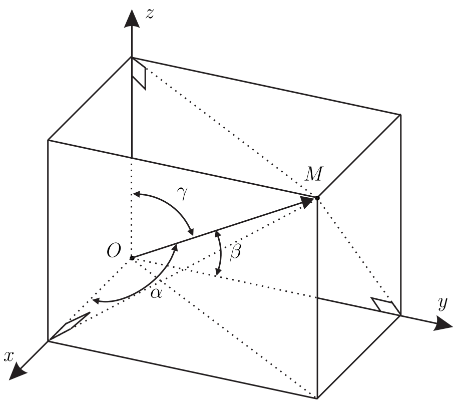

Рис. 33. Углы между радиус–вектором $\overline{OM}$ и осями координат.

Очевидно, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.12}$$

З а м е ч а н и е 4. С одной стороны, для того чтобы однозначно определить точку M пространства достаточно задать длину радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$ и его направляющие косинусы. С другой стороны, задание двух из трёх направляющих косинуса и длины радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$ определяет не одну, а две точки! Действительно, пусть задана длина $r = |\overrightarrow{OM}|$ и направляющие косинусы $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, тогда мы из равенства (2.12) получим равенство

$$|\cos\gamma| = 1 \Leftrightarrow \cos\gamma = \pm 1.$$

Итак, мы имеем две точки, лежащие на одно прямой

$$M_1(r, \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad \text{и} \quad M_2(r, \cos\alpha, \cos\beta, -\cos\gamma),$$

причём угол между векторами $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{OM}_2$ равен π.

§ 3. Полярная система координат

О п р е д е л е н и е 7. *Плоскость называется ориентированной, если фиксирован вектор нормали* $\mathbf{n}$ *к этой плоскости.*

О п р е д е л е н и е 8. *Полярной системой координат на заданной ориентированной плоскости называется упорядоченная двойка* $\{O, \mathbf{e}\}$, *где* O *— это некоторая фиксированная точка, называемая полюсом, а* $\mathbf{e}$ *— это ненулевой вектор компланарный данной плоскости.*

О п р е д е л е н и е 9. *Ось, проходящая через точку* O *параллельно вектору* $\mathbf{e}$ *и сонаправленная этому вектору, называется полярной осью.*

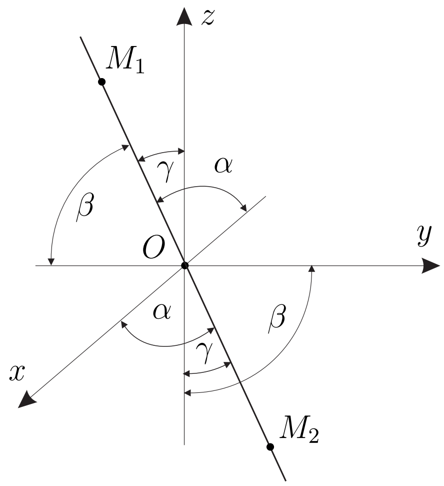

Рис. 34. Точки M_1 и M_2.

Определение 10. *Полярными координатами точки M на ориентированной плоскости называется упорядоченная двойка (ρ, φ), где*

$$\rho = |\overrightarrow{OM}|, \tag{3.1}$$

а φ — это угол между полярной осью и радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки, если смотреть с конца направленного вектора нормали $\mathbf{n}$ к ориентированной плоскости, отложенного от произвольной точки плоскости.

Замечание 5. По своему определению $0 \leqslant \rho < +\infty$ и $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Для полюса O не определён угол φ, но полюс вполне определяется равенством $\rho = 0$. Иногда удобно отсчитывать угол по часовой стрелки.

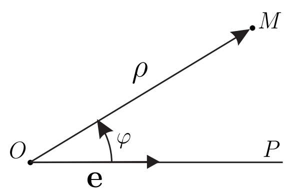

Рис. 35. Полярная система координат на плоскости и полярные координаты (ρ, φ) точки M.

Тогда отсчитываемый угол считается отрицательным.

Можно указать формулы перехода от полярных координат (ρ, φ) на плоскости π к декартовым координатам (x, y) точки M в случае специальным образом выбранной прямоугольной декартовой системы координат Oxy на ориентированной плоскости π.

Пусть $\{O, \mathbf{e}\}$ — это фиксированная полярная система координат.

1. Выберем в качестве оси абсцисс Ox — полярную ось OP.

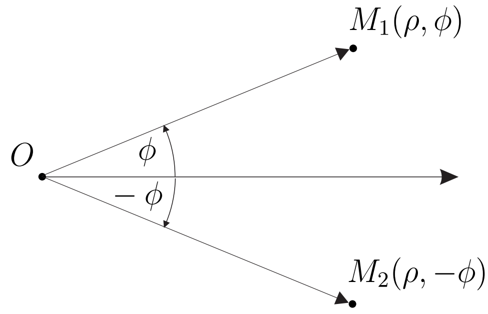

Рис. 36. Отрицательный угол.

2. Ось ординат Oy выберем таким образом, чтобы ось абсцисс Ox поворотом против часовой стрелки на угол $\pi/2$ (если смотреть с конца вектора нормали $\mathbf{n}$, отложенного от произвольной точки плоскости) совмещалась с осью Oy с учётом их направления. Заметим, что такая система координат Oxy называется правой.

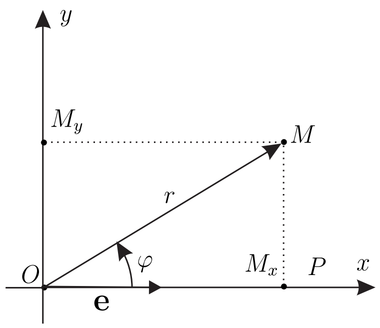

Рис. 37. Полярная система координат на плоскости и специальная прямоугольная система координат.

Мы ввели вспомогательные точки $M_x(x, 0)$ и $M_y(0, y)$ — ортогональные проекции точки $M(x, y)$ на соответствующие оси декартовой системы координат Oxy. Итак, имеем

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y.$$

Пусть $\alpha \in [0, \pi]$ и $\beta \in [0, \pi]$ — углы между радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$ и векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, соответственно. Тогда справедливы следующие равенства:

$$x = \operatorname{Pr}_{\mathbf{e}_1} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos\alpha, \tag{3.2}$$

$$y = \operatorname{Pr}_{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos\beta. \tag{3.3}$$

Имеет место следующая связь углов α и β:

$$\beta = \begin{cases} \pi/2 - \alpha, & \text{если} \quad y > 0; \\ \pi/2 + \alpha, & \text{если} \quad y < 0; \\ \pi/2, & \text{если} \quad y = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Поэтому из (3.3) и (3.4) вытекают следующие равенства:

$$y = |\overrightarrow{OM}| \begin{cases} \sin\alpha, & \text{если} \quad y \geqslant 0; \\ -\sin\alpha, & \text{если} \quad y \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Формулы (3.2) и (3.5) можно записать единообразно, если ввести угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ между осью Ox и радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки на ориентированной плоскости. Тогда имеем

$$\alpha = \begin{cases} \varphi, & \text{если} \quad y > 0; \\ 2\pi - \varphi, & \text{если} \quad y < 0; \\ 0, & \text{если} \quad y = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Заметим, что

$$\cos\alpha = \cos\varphi, \tag{3.7}$$

$$\sin\alpha = \begin{cases} \sin\varphi, & \text{если} \quad y > 0; \\ -\sin\varphi, & \text{если} \quad y < 0; \\ 0, & \text{если} \quad y = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Таким образом, из (3.7), (3.8) и (3.2), (3.5) приходим к следующим формулам:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho = |\overrightarrow{OM}|, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \tag{3.9}$$

Имеют место обратные формулы

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{3.10}$$

З а м е ч а н и е 6. Соответствие точек ориентированной плоскости и их полярных координат не являются взаимно однозначным.

§ 4. Цилиндрическая система координат

О п р е д е л е н и е 11. *Цилиндрической системой координат называется упорядоченная четвёрка* $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$, *где* π — *это некоторая фиксированная плоскость в пространстве*, O — *это некоторая фиксированная точка на плоскости* π, $\mathbf{n}$ — *это некоторый фиксированный ненулевой вектор*, *ортогональный плоскости и*, *наконец*, $\mathbf{e}$ — *это ненулевой вектор*, *лежащий в плоскости* π.

З а м е ч а н и е 7. Таким образом, плоскость π с учетом выбора вектора нормали π является ориентированной.

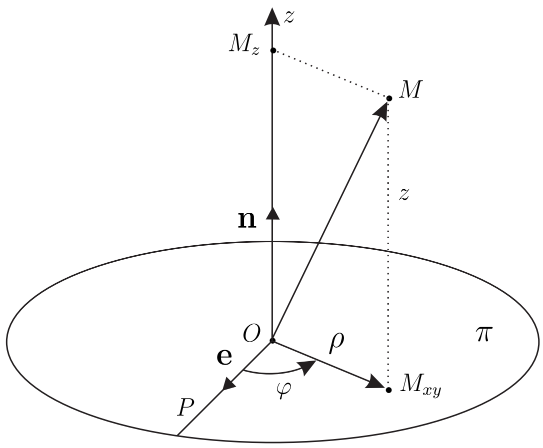

Рис. 38. Цилиндрическая система координат.

Через точку O в направлении вектора $\mathbf{n}$ проведём ось Oz, которая называется *зенитной осью*. Отметим, что плоскость π называется *экваториальной плоскостью*.

Определение 12. *Цилиндрическими координатами точки M в цилиндрической системе координат $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$ называется упорядоченная тройка чисел (ρ, φ, z), где (ρ, φ) — это полярные координаты ортогональной проекции M_{xy} точки M на плоскость π в полярной системе координат $\{O, \mathbf{e}\}$, причём $\varphi \in [0, 2\pi)$ — угол между полярной осью и радиус–вектором $\overrightarrow{OM_{xy}}$ на ориентированной плоскости π, а z — это координата ортогональной проекции M_z точки M на ось Oz, т. е. $\overrightarrow{OM}_z = z\mathbf{n}$.*

Замечание 8. Отметим, что точки лежащие на оси Oz вполне определяются своей декартовой координатой z и равенством $\rho = 0$ и не имеют угловой координаты φ.

С выбранной системой цилиндрических координат можно как и ранее связать специальную прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ в пространстве Π, выбрав на плоскости π как и ранее прямоугольную систему декартовых координат Oxy.

Формулы связывающие цилиндрические координаты (ρ, φ, z) с декартовыми координатами (x, y, z) в специальной декартовой системе координат, в которой имеют следующий вид:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \tag{4.1}$$

ПРИМЕР 1. Уравнение кругового параболоида в декартовой прямоугольной системе координат с координатами (x, y, z) имеем следующий вид:

$$z = x^2 + y^2,$$

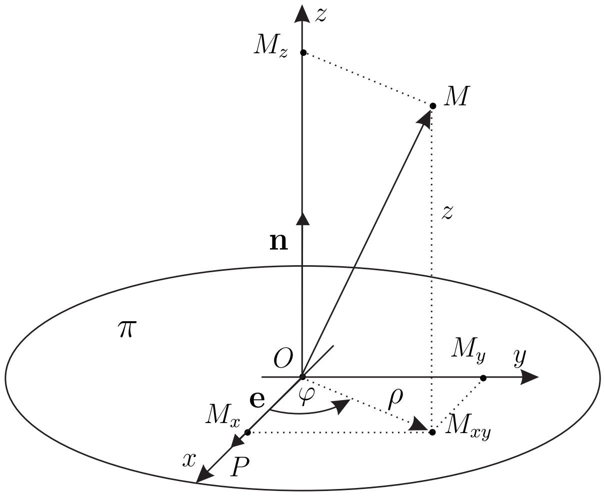

Рис. 39. Цилиндрическая система координат и специальная декартова система координат $Oxyz$.

а в связанной с этой декартовой системы координат цилиндрической системе координат $\{Oxy, O, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$ с координатами (ρ, φ, z) уравнение кругового параболоида имеет следующий вид:

$$z = \rho^2,$$

где

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho \geqslant 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

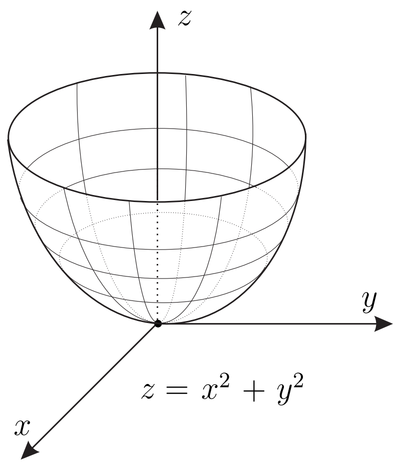

Рис. 40. Эллиптический параболоид.

П Р И М Е Р 2. Уравнение кругового конуса в некоторой прямоугольной декартовой системе координат с координатами (x, y, z) имеет следующий вид:

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

а в связанной цилиндрической системе координат $\{Oxy, O, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$ с координатами (ρ, φ, z) имеет следующий вид:

$$|z| = \rho,$$

где

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho \geqslant 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

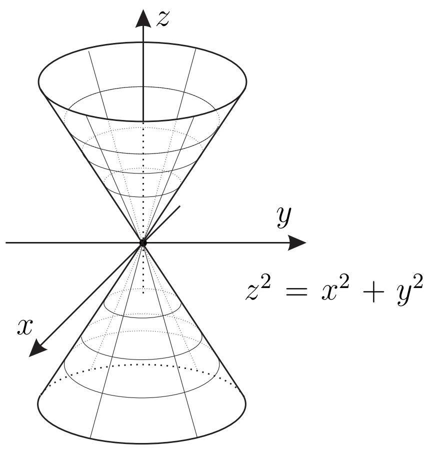

Рис. 41. Эллиптический конус.

§ 5. Сферическая система координат

О п р е д е л е н и е 13. *Сферической системой координат называется упорядоченная четвёрка* $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$, *где* π *— это некоторая фиксированная плоскость в пространстве*, O *— это некоторая фиксированная точка на плоскости* π, $\mathbf{n}$ *— это некоторый фиксированный ненулевой вектор, ортогональный плоскости и, наконец,* $\mathbf{e}$ *— это ненулевой вектор, лежащий в плоскости* π.

З а м е ч а н и е 9. Определения 13 и 11 совпадают. Различие сферической системы координат от цилиндрической системы координат заключается в записи координат точки.

Сначала проведём через точку $O \in \pi$ ось, сонаправленную вектору $\mathbf{n}$. Полученную *зенитную ось* Oz.

Пусть M — произвольная точка пространства. Обозначим через r длину радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$, через $\vartheta \in [0, \pi]$ — угол между вектором $\mathbf{n}$ и радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$; через $\varphi \in [0, 2\pi)$ — обозначим угол между на-

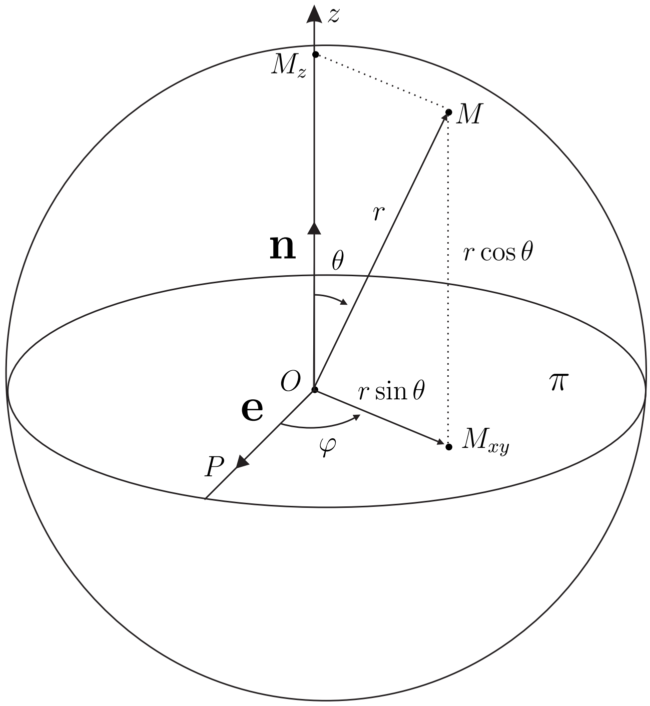

Рис. 42. Сферическая система координат в пространстве.

правленным отрезком $\overrightarrow{OM_{xy}}$ (M_{xy} — ортогональная проекция точки M на плоскость π) и полярной осью OP, отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки. При этом угол φ называется *азимутальным углом*, а угол ϑ — *зенитным углом*.

Определение 14. *Упорядоченная тройка* (r, ϑ, φ) *называется сферическими координатами точки* M *в сферической системе координат* $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$.

Заключение 10. Отметим, что полюс O сферической системы координат не имеет угловых координат (ϑ, φ), но вполне определяется равенством $r = 0$.

Формулы связи декартовых и сферических координат.

Пусть на плоскости π введена специальная декартова система координат Oxy. Тогда с учётом выбранной ранее оси Oz мы можем получить связь координат произвольной точки (r, ϑ, φ) в выбранной сферической системе координат $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$ с соответствующими координатами (x, y, z) в связанной декартовой системе координат.

Справедливы следующие формулы:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta, \tag{5.1}$$

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

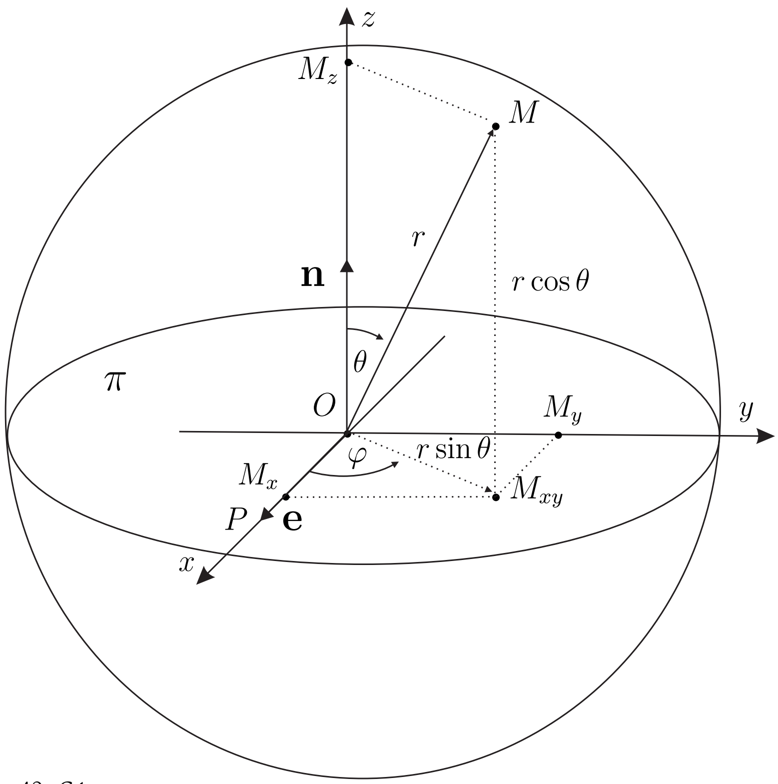

Рис. 43. Сферическая система координат в пространстве и согласованная с ней декартова система координат $Oxyz$.

□ Действительно,

1. Отметим, что $\overrightarrow{OM}_z = z\mathbf{n}$. Поэтому

$$z = \operatorname{Pr}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos\vartheta = r\cos\vartheta;$$

2. Кроме того,

$$|\overrightarrow{OM}_{xy}| = |\overrightarrow{OM}| \sin\vartheta,$$

поэтому

$$x = \operatorname{Pr}_{\mathbf{e}_1} \overrightarrow{OM}_{xy} = |\overrightarrow{OM}_{xy}| \cos\varphi = r\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$y = \operatorname{Pr}_{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{OM}_{xy} = |\overrightarrow{OM}_{xy}| \sin\varphi = |\overrightarrow{OM}_{xy}| \sin\varphi = r\sin\vartheta\sin\varphi. \quad \boxtimes$$

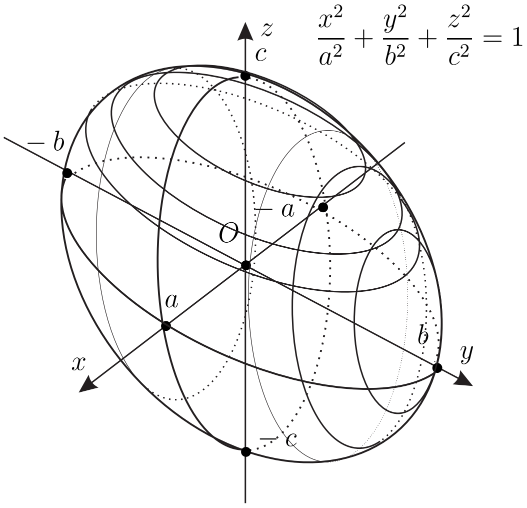

Рис. 44. Эллипсоид.

ПРИМЕР 3. Уравнение эллипсоида в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Мы рассмотрим один важный частный случай, когда $a=b=c=1$. Тогда уравнение

$$x^2+y^2+z^2=1$$

— это уравнение сферы единичного радиуса с центром в начале системы координат. Тогда в связанной сферической системе координат $\{Oxy, O, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$ уравнение окружности примет очень простой вид

$$r=1,$$

где

$$x=\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y=\sin\vartheta\sin\varphi,\quad z=\cos\vartheta,\quad \vartheta\in[0,\pi],\quad \varphi\in[0,2\pi).$$

Лекция 6

ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО И ЕГО СВОЙСТВА

§ 1. Определение векторного пространства

На прошедших лекциях мы ввели понятие свободного вектора и матрицы размера $m \times n$ и ввели операции сложения свободных векторов, матриц одного размера и умножения свободного вектора на вещественные числа и умножение матриц на вещественные и комплексные числа. При этом доказали, что эти операции обладают одними и теми же 8 свойствами. Теперь мы можем ввести абстрактное векторное пространство или линейное пространство.

Рассмотрим множество $\mathcal{L}$, элементы которого мы будем называть векторами. Пусть на множестве $\mathcal{L}$ определены операция суммы векторов $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{L}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$, а также операция умножения на вещественные числа $\lambda \cdot \mathbf{x} \in \mathcal{L}$ для любых $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ и для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Дадим определение.

Определение 1. *Множество $\mathcal{L}$ с операциями на нём сложения векторов и умножения векторов на вещественные числа называется векторным пространством, если справедливы следующие свойства*:

ВП1. *коммутативность сложения*: *для любых векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x};$$

ВП2. *ассоциативность сложения*: *для любых векторов* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *и* $\mathbf{z}$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z});$$

ВП3. *свойство нулевого вектора*: *существует нулевой вектор* $\mathbf{0}$ *такой, что для любого вектора* $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x};$$

ВП4. *существование противоположного элемента*: *для любого вектора* $\mathbf{x}$ *существует такой вектор* $-\mathbf{x}$, *что*

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0};$$

ВП5. *свойство единицы*: *для любого вектора* $\mathbf{x}$

$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x};$$

ВП6. *ассоциативность умножения на число: для любого вектора* $\mathbf{x}$ *и любых чисел* α *и* β

$$(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x});$$

ВП7. *дистрибутивность относительно сложения векторов: для любых векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *и любого числа* α

$$\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y};$$

ВП8. *дистрибутивность относительно сложения чисел: для любого вектора* $\mathbf{x}$ *и любых чисел* α *и* β

$$(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}.$$

Примеры векторных пространств.

Пример 1. Нулевое пространство, которое состоит из одного нулевого элемента $\{\mathbf{0}\}$, является векторным пространством.

Пример 2. Пространства векторов $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ и $\mathbb{V}_3$ на прямой на плоскости и в пространстве являются векторными пространствами.

Пример 3. Пространство матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$ является векторным пространством.

§ 2. Линейные оболочки и подпространства

Пусть дано семейство векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r \in \mathcal{L}$ и семейство чисел $\alpha_1, \alpha, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$.

Определение 2. *Линейной комбинацией векторов называется сумма*

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{x}_r.$$

Определение 3. *Линейная комбинация векторов называется тривиальной, если* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$.

Определение 4. *Линейной оболочкой векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r \in \in \mathcal{L}$ *называется следующее множество:*

$$L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{x}_r : \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}\}.$$

Лемма 1. *Пусть векторы* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p$ *принадлежат линейной оболочке векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$. *Тогда*

$$L(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p) \subset L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r).$$

Доказательство.

По условию $\mathbf{y}_j \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)$ для любого $j = \overline{1, p}$. Поэтому найдутся такие числа

$$a_j^k \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, p},$$

что справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{y}_j = \sum_{k=1}^{r} a_j^k \mathbf{x}_k. \tag{2.1}$$

Пусть $\mathbf{z} \in L(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p)$. Тогда найдутся такие числа $\alpha_j \in \mathbb{C}$ при $j = \overline{1,p}$, что в силу (2.1) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{p} \alpha^j \mathbf{y}_j = \sum_{j=1}^{p} \alpha^j \sum_{k=1}^{r} a_j^k \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^{r} \beta^k \mathbf{x}_k \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r), \tag{2.2}$$

где

$$\beta^k = \sum_{j=1}^{p} \alpha^j a_j^k.$$

Лемма доказана.

Определение 5. *Подмножество $P \subset \mathcal{L}$ векторного пространства $\mathcal{L}$ называется подпространством, если*

$$\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in P$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$.

Пример 4. Очевидно, $\mathbb{V}_1$ подпространство плоскости $\mathbb{V}_2 \supset \mathbb{V}_1$, а $\mathbb{V}_2$ подпространство пространства $\mathbb{V}_3 \supset \mathbb{V}_2$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Линейная оболочка $L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)$ семейства элементов $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ векторного пространства $\mathcal{L}$ является его подпространством.*

Доказательство.

Действительно, пусть $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)$, тогда

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{r} \alpha^k \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{z} = \sum_{k=1}^{r} \beta^k \mathbf{x}_k.$$

$$\alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z} = \sum_{k=1}^{r} \left(\alpha \alpha^k + \beta \beta^k\right) \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^{r} \delta^k \mathbf{x}_k \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r),$$

где $\delta^k = \alpha \alpha^k + \beta \beta^k$.

Лемма доказана.

§ 3. Линейная зависимость и независимость

Определение 6. *Семейство векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ называется линейно зависимым, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору:*

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq (0, \ldots, 0).$$

В случае, когда

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{x}_r = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = (0, \ldots, 0).$$

семейство векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *называется линейно независимым.*

Пример 5. В векторном пространстве $\{\mathbf{0}\}$ нет линейно независимых векторов.

□ Действительно, рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию

$$\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \alpha \neq 0. \quad \boxtimes$$

Пример 6. В векторном пространстве $\mathbb{V}_1$ любой ненулевой вектор образует линейно независимое семейство векторов. В векторном пространстве $\mathbb{V}_2$ любые два неколлинеарных вектора образуют линейно независимое семейство. В векторном пространстве $\mathbb{V}_3$ любые три некомпланарных вектора образуют линейно независимое семейство векторов.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. *Однородная линейная система уравнений*

$$AX = A_1x^1 + \cdots + A_nx^n = O \tag{3.1}$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы $A_1, \ldots, A_n$ *её основной матрицы* A *линейно зависимы.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть система уравнений (3.1) имеет нетривиальное решение

$$X_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)^T \neq O,$$

тогда имеет место равенство

$$A_1x_0^1 + \cdots + A_nx_0^n = O.$$

Откуда вытекает, что столбцы основной матрицы линейно зависимы.

Шаг 2. Достаточность. Пусть столбцы линейно зависимы, т. е.

$$A_1x_0^1 + \cdots + A_nx_0^n = O$$

при некотором семействе $(x_0^1, \cdots, x_0^n) \neq (0, \cdots, 0)$. Следовательно,

$$X_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)^T$$

— это нетривиальное решение системы уравнений (3.1).

Лемма доказана.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Справедливы следующие свойства*:

1. *Любое семейство векторов с повторениями линейно зависимо.*
2. *Если в семействе векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *имеется нулевой вектор* $\mathbf{0}$, *то это семейство линейно зависимо.*

3. *Семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *линейно зависимо тогда и только тогда, когда хотя бы один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.*
4. *Если в семействе векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, \ldots, \mathbf{x}_s$ *имеется линейно зависимое подсемейство* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$, *то и все семейство линейно зависимо.*
5. *Любая часть линейно независимого семейства является линейно независимо.*
6. *Если семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *линейно независимо, а семейство* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}$ *линейно зависимо, то вектор* $\mathbf{x}$ *является линейной комбинацией семейства* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$.
7. *Если семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *линейно независимо, а вектор* $\mathbf{x}$ *нельзя через них выразить, то семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}$ *также линейно независимо.*

Доказательство.

1. $\square$ Действительно, пусть, например, в семействе $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ первый и второй векторы совпадают $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Тогда справедливо равенство

$$1 \cdot \mathbf{x}_1 + (-1) \cdot \mathbf{x}_2 + 0 \cdot \mathbf{x}_3 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_r = \mathbf{0},$$

хотя набор коэффициентов нетривиален. $\boxtimes$

2. $\square$ Действительно, пусть например первый вектор $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ в семействе $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$. Тогда

$$1 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_r = \mathbf{0},$$

хотя набор коэффициентов нетривиален. $\boxtimes$

3. $\square$ Действительно, пусть семейство векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ линейно зависимо. Тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, что

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$, тогда

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{x}_2 - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_1}\mathbf{x}_r.$$

Наоборот пусть

$$\mathbf{x}_1 = \beta_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_r \mathbf{x}_r \Leftrightarrow (-1) \cdot \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}. \quad \boxtimes$$

4. $\square$ Действительно, пусть семейство $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ линейно зависимые, тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_r$, что

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r + 0 \cdot \mathbf{x}_{r+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_s = \mathbf{0}. \quad \boxtimes$$

5. $\square$ Действительно, это следствие утверждения 4. $\boxtimes$

6. $\square$ Действительно, поскольку семейство векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}$ линейно зависимо, то найдется нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha$, что

$$\alpha \mathbf{x} + \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}.$$

Предположим, что $\alpha = 0$, но тогда в силу линейной независимости семейства $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ отсюда получаем, что

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

Пришли к противоречию с условием нетривиальности набора $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha$. Следовательно, $\alpha \neq 0$. ☒

7. ☐ Действительно, это следствие утверждения 6. ☒

Теорема доказана.

§ 4. Линейная зависимость и независимость. Продолжение

Справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 2. *Если векторы* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)$, *причём* $s > r$, *то векторы* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$ *линейно зависимы.*

Доказательство.

Введём обозначения.

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r), \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s). \tag{4.1}$$

Итак, $\mathbf{X}$ — это строчка длины r, а $\mathbf{Y}$ — это строчка длины $s > r$. По условию найдутся такие числа a_k^j при $j = \overline{1, r}$ и $k = \overline{1, s}$, что

$$\begin{array}{l} \mathbf{y}_1 = a_1^1\mathbf{x}_1 + a_1^2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_1^r\mathbf{x}_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{y}_s = a_s^1\mathbf{x}_1 + a_s^2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_s^r\mathbf{x}_r \end{array}. \tag{4.2}$$

Ещё введём обозначение.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_s^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_s^r \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Ясно, что это матрица размера $r \times s$. С учетом обозначений (4.1) и (4.3) выражение (4.2) можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot A. \tag{4.4}$$

Введём столбец переменных

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^s \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

и рассмотрим однородную систему r–уравнений относительно s–неизвестных

$$A \cdot Z = O \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^1 z^1 + a_2^1 z^2 + \dots + a_s^1 z^s = 0, \\ a_1^2 z^1 + a_2^2 z^2 + \dots + a_s^2 z^s = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^r z^1 + a_2^r z^2 + \dots + a_s^r z^s = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Поскольку в однородной системе линейных уравнений (4.6) число переменных s больше числа уравнений r существует нетривиальное решение

$$Z_0 = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^s \end{pmatrix} \neq O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Рассмотрим следующую линейную комбинацию векторов $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$:

$$z_0^1 \mathbf{y}_1 + \dots + z_0^s \mathbf{y}_s = \mathbf{Y} Z_0 = \mathbf{X} A Z_0 = \mathbf{X} O = O. \tag{4.8}$$

Следовательно, векторы $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Следствием этой теоремы является следующая:

Теорема 3. *Если векторы $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$, принадлежащие линейной оболочке $L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r)$, линейно независимы, то $s \leqslant r$.*

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 4. *Пусть матрица A' получена из матрицы A элементарными преобразованиями строк типов $1 - 3$. Тогда*

1. *Если столбцы матрицы A линейно независимы, то столбцы матрицы A' также линейно независимы, и обратное тоже верно.*
2. *Если между столбцами матрицы A имеется линейная зависимость*

$$c^1 A_{k_1} + c^2 A_{k_2} + \dots + c^s A_{k_s} = O, \quad k_1, k_2, \dots, k_s \in \overline{1, n},$$

то для соответствующих столбцов матрицы A' имеет место такая же зависимость

$$c^1 A'_{k_1} + c^2 A'_{k_2} + \dots + c^s A'_{k_s} = O,$$

и обратное тоже верно.

3. *Справедливо следующее равенство*:

$$L(A'^1, A'^2, \dots, A'^m) = L(A^1, A^2, \dots, A^m). \tag{4.9}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть столбцы матрицы $A = \|A_1, \dots, A_n\|$ являются линейно независимыми и матрица A' получена из матрицы A некоторой последовательностью элементарных преобразований первых трех типов.

Тогда, как мы уже отмечали, существует такая невырожденная матрица P размера $m \times m$, что

$$A^{'} = PA \Rightarrow A'_k = PA_k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n}.$$

Отметим, что P — это матрица, полученная произведением матриц последовательности элементарных преобразований. Рассмотрим линейную комбинацию столбцов матрицы $A^{'}$

$$c^1 A_1^{'} + c^2 A_2^{'} + \cdots + c^n A_n^{'} = O \Leftrightarrow c^1 PA_1 + c^2 PA_2 + \cdots + c^n PA_n = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P\left(c^1 A_1 + c^2 A_2 + \cdots + c^n A_n\right) = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P^{-1} P\left(c^1 A_1 + c^2 A_2 + \cdots + c^n A_n\right) = P^{-1} O = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^1 A_1 + c^2 A_2 + \cdots + c^n A_n = O \Leftrightarrow c^1 = c^2 = \cdots = c^n = 0.$$

Итак, столбцы матрицы A' линейно независимы. Теперь заметим, что

$$A' = PA \Leftrightarrow A = P^{-1} A' = RA' \Rightarrow A_k = RA'_k, \quad R = P^{-1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Пусть столбцы матрицы A' линейно независимы и

$$c^1 A_1 + c^2 A_2 + \cdots + c^n A_n = O \Leftrightarrow c^1 RA'_1 + c^2 RA'_2 + \cdots + c^n RA'_n = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow R\left(c^1 A'_1 + c^2 A'_2 + \cdots + c^n A'_n\right) = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow R^{-1} R\left(c^1 A'_1 + c^2 A'_2 + \cdots + c^n A'_n\right) = R^{-1} O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^1 A'_1 + c^2 A'_2 + \cdots + c^n A'_n = O \Leftrightarrow c^1 = c^2 = \cdots = c^n = 0.$$

Следовательно, столбцы матрицы A линейно независимы.

Шаг 2. Умножим обе части равенства

$$c^1 A_{k_1} + c^2 A_{k_2} + \cdots + c^s A_{k_s} = O, \quad k_1, k_2, \ldots, k_s \in \overline{1, n},$$

на P слева и получим

$$P\left(c^1 A_{k_1} + c^2 A_{k_2} + \cdots + c^s A_{k_s}\right) = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^1 PA_{k_1} + c^2 PA_{k_2} + \cdots + c^s PA_{k_s} = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^1 A_{k_1}^{'} + c^2 A_{k_2}^{'} + \cdots + c^s A_{k_s}^{'} = O.$$

Шаг 3. Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$A' = PA, \quad A = RA', \quad R = P^{-1}, \tag{4.10}$$

$$A^{'j} = \sum_{s=1}^{m} \{P\}_s^j A^s, \quad j \in \overline{1, m}, \tag{4.11}$$

$$A^j = \sum_{\sigma=1}^{m} \{R\}_\sigma^j A^{'\sigma}, \quad j \in \overline{1, m}. \tag{4.12}$$

Из равенства (4.11) и результата леммы 2 вытекает вложение $L(A'^1, A'^2, \cdots, A'^m) \subset L(A^1, A^2, \cdots, A^m)$, а из равенства (4.12) и леммы 2 вытекает обратное вложение $L(A^1, A^2, \cdots, A^m) \subset$ $\subset L(A'^1, A'^2, \cdots, A'^m)$. Следовательно, имеем

$$L(A'^1, A'^2, \cdots, A'^m) = L(A^1, A^2, \cdots, A^m).$$

Теорема доказана.

Заметим, что описать результата применения элементарного преобразования четвертого типа можно описать как произведение матрицы P размера $n \times n$ справа на матрицу A :

$$A' = AP \Rightarrow A'^j = A^j P \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 5. *Пусть матрица A' получена из матрицы A элементарными преобразованиями столбцов четвертого типа, но для всех столбцов матрицы A, включая последний. Тогда*

1. *Если строки матрицы A линейно независимы, то строки матрицы A' также линейно независимы, и обратное тоже верно.*
2. *Если между строками матрицы A имеется линейная зависимость*

$$c_1 A^{j_1} + c_2 A^{j_2} + \cdots + c_s A^{j_s} = O, \quad j_1, j_2, \cdots, j_s \in \overline{1, m},$$

то для соответствующих матрицы A' имеет место такая же зависимость

$$c_1 A'^{j_1} + c_2 A'^{j_2} + \cdots + c_s A'^{j_s} = O,$$

и обратное тоже верно.

3. *Справедливо равенство множеств*

$$L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n) = L(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Доказательство.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4. Нужно только умножать не слева на матрицу P элементарных преобразований, а справа.

Теорема доказана.

§ 5. Размерность и базис векторного пространства

Определение 7. *Если для каждого $n \in \mathbb{N}$ в векторном пространстве $\mathcal{L}$ найдется линейно независимое семейство векторов, состоящее из n векторов, то пространство $\mathcal{L}$ называется бесконечномерным.*

Определение 8. *Векторное пространство $\mathcal{L}$ называется конечномерным, если выполнены следующие два условия:*

1. *в $\mathcal{L}$ существует линейно независимое семейство векторов, состоящее из $n \in \mathbb{N}$ векторов;*
2. *любое семейство векторов из $\mathcal{L}$, состоящее из $n+1$ вектора линейно зависимо.*

Число n называется размерностью векторного пространства $\mathcal{L}$ и обозначается $\dim \mathcal{L}$. Векторное пространство $\{\mathbf{0}\}$ называется нульмерным.

Пример 7. Векторное пространство $\{\mathbf{0}\}$ имеет размерность 0. В рамках аксиоматики Гильберта имеем $\dim \mathbb{V}_1 = 1$, $\dim \mathbb{V}_2 = 2$ и $\dim \mathbb{V}_3 = 3$. Однако, в аксиоматике Вейля это нужно положить в основу аксиоматики, которые называются *аксиомами размерности*:

P1: Размерность прямой равна 1: $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.
P2: Размерность плоскости равна 2: $\dim \mathbb{V}_2 = 2$.
P3: Размерность пространства равна 3: $\dim \mathbb{V}_3 = 3$.

Определение 9. *Базисом векторного пространства $\mathcal{L}$ называется линейно независимое семейство векторов $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ этого пространства, через которое может быть линейно выражен произвольный элемент $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$:*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = \mathbf{E} \cdot X, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Набор коэффициентов X называется координатами вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Заметим, что

Лемма 4. *Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$ — это базис, то $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}$.*

Доказательство.

Ясно, что

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L} \Rightarrow L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \subset \mathcal{L};$$

$$x \in \mathcal{L} \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} c^k \mathbf{e}_k \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \Rightarrow \mathcal{L} \subset L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

Лемма доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 5. *Разложение по базису векторного пространства единственно.*

Доказательство.

Действительно, пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} y^k \mathbf{e}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^1 - y^1)\mathbf{e}_1 + (x^2 - y^2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (x^n - y^n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Отсюда в силу линейной независимости базиса имеем

$$x^1 = y^1, \ldots, x^n = y^n.$$

Лемма доказана.

Правило суммирования Эйнштейна. Для компактности записи различных выражений, содержащих знаки суммирования используется *правило Эйнштейна*, состоящее в следующем:

1. если в выражении индекс встречается ровно два раза один раз снизу и один раз сверху, то предполагается суммирование по нему. Например,
$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = x^i \mathbf{e}_i.$$
2. если индекс встречается большее число раз, то по нему не предполагается суммирование. Например,
$$a_k b^k c^k,$$
хотя
$$(a_k + b_k)c^k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)c^k.$$

Напомним важный *символ Кронекера*

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Заметим, что
$$a_j \delta^j_k = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta^j_k = a_k.$$

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 6. *Все базисы конечномерного векторного пространства $\mathcal{L}$ состоят из одинакового числа векторов. Это число равно размерности $\dim \mathcal{L}$ векторного пространства $\mathcal{L}$.*

Доказательство.

Пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ и $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$ — это два базиса векторного пространства $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \in L(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m) = \mathcal{L}, \quad \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m \in L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}.$$

Следовательно, в силу теоремы 3 имеют место два неравенства

$$n \leqslant m \quad \text{и} \quad m \leqslant n \Rightarrow m = n.$$

С другой стороны, любое семейство из $n + 1$ векторов

$$\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1} \in \mathcal{L} = L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n),$$

поэтому в силу теоремы 2 семейство $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1}\}$ линейно зависимо. Таким образом,

$$n = \dim \mathcal{L}.$$

Теорема доказана.

Свойство координат вектора. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — это два вектора из векторного пространства $\mathcal{L}$. Пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} y^k \mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} (x^k + y^k) \mathbf{e}_k, \quad \alpha \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha x^k \mathbf{e}_k.$$

Следовательно, при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Монотонность размерности. Справедлива лемма.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — это два подпространства в $\mathcal{L}$, причём $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. Тогда*

1. $\dim \mathcal{Q} \leqslant \dim \mathcal{P}$;
2. *если* $\dim \mathcal{Q} = \dim \mathcal{P}$, *то* $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

Доказательство.

1. □ Действительно, пусть $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ — это базис в $\mathcal{P}$, а $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$. Тогда в силу условия леммы имеем $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ и поэтому

$$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r).$$

В силу теоремы 3 имеем $\dim \mathcal{Q} = s \leqslant r = \dim \mathcal{P}$. ⊠

2. □ Действительно, пусть $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$, т.е. $s = \dim \mathcal{Q}$. Предположим, что $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$. Тогда найдется такой элемент $\mathbf{z} \in \mathcal{P}$, что $\mathbf{z} \notin \mathcal{Q}$. Этот элемент нельзя представить через базис $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$. Следовательно, семейство

$$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}$$

линейно независимое в $\mathcal{P}$. Таким образом, $\dim \mathcal{P} \geqslant s + 1$. Пришли к противоречию. ⊠

Лемма доказана.

Пример 8. Базис пространства столбцов $\mathbb{K}^n$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dim \mathbb{K}^n = n.$$

Пример 9. Базис пространства $\mathbb{K}^{3\times 2}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\dim \mathbb{K}^{m\times n} = mn.$$

Отметим, что любое линейное подпространство P линейного пространства $\mathcal{L}$ само является линейным пространством. Таким образом, для любого линейного подпространства определено понятие базиса, размерности и координат вектора из этого линейного подпространства. В частности, в продолжение результатов теорем 4 и 5 справедливы следующие результаты:

Теорема 7. *Пусть матрица $A^{'}$ получена из матрицы A элементарными преобразованиями строк типов $1-3$. Тогда*

1. *справедливо равенство размерностей линейных оболочек*

$$\dim L(A^{'1}, A^{'2}, \ldots, A^{'m}) = \dim L(A^1, A^2, \ldots, A^m), \tag{5.1}$$

2. *справедливо равенство размерностей линейных оболочек*

$$\dim L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n) = \dim L(A_1, A_2, \ldots, A_n). \tag{5.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Равенство (5.4) является очевидным следствием равенства множеств (5.6).

Шаг 2. Докажем равенство (5.5). Здесь мы воспользуемся результатом пункта 2 теоремы 4. Пусть $\{A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_s}\}$ — базис линейной оболочки $L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Докажем, что $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$ — базис линейной оболочки $L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$. Прежде всего заметим, что в силу результата 2 теоремы 4 семейство столбцов $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$ — линейно независимое семейство в линейной оболочке $L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$.

$\square$ Действительно, пусть противное и семейство векторов $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$ линейно зависимое. Тогда найдутся такие числа $\{c^1, c^2, \ldots, c^s\} \neq \{0, 0, \ldots, 0\}$, что справедливо равенство

$$c^1 A'_{k_1} + c^2 A'_{k_2} + \cdots + c^s A'_{k_s} = O \Rightarrow c^1 A_{k_1} + c^2 A_{k_2} + \cdots + c^s A_{k_s} = O \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \{c^1, c^2, \cdots, c^s\} = \{0, 0, \cdots, 0\}. \tag{5.3}$$

Пришли к противоречию с линейной независимостью семейства $\{A_{k_1}, A_{k_2}, \cdots, A_{k_s}\}$. $\boxtimes$

Предположим, что линейно независимое семейство столбцов $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$ не образует базис в линейной оболочке $L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$. Но тогда найдется по меньшей мере столбец $A'_{k_{s+1}} \in L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$ такой, что семейство столбцов $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}, A'_{k_{s+1}}\}$ является линейно независимо в линейной оболочке $L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$. Но тогда согласно результату пункта 2 теоремы 4 семейство столбцов $\{A_{k_1}, A_{k_2}, \cdots, A_{k_s}, A_{k_{s+1}}\}$ линейно независимо в линейной оболочке $L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, что противоречит определению базиса. Следовательно, семейство столбцов $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$ является максимальным линейно независимым семейством в линейной оболочке $L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$. Докажем, что любой столбец $B \in L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$ линейно выражается через столбцы $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$.

□ Действительно, пусть противное. Тогда в силу результата пункта 7 теоремы 1 мы приходим к выводу о том, что семейство столбцов

$$\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}, B\} \subset L(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n)$$

является линейно независимым. Противоречие с максимальностью линейно независимого семейства столбцов $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$. ⊠

Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть матрица A' получена из матрицы A элементарными преобразованиями столбцов четвертого типа. Тогда*

1. *справедливо равенство размерностей линейных оболочек*

$$\dim L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n) = \dim L(A_1, A_2, \ldots, A_n), \qquad (5.4)$$

2. *справедливо равенство размерностей линейных оболочек*

$$\dim L(A'^1, A'^2, \ldots, A'^m) = \dim L(A^1, A^2, \ldots, A^m). \qquad (5.5)$$

Доказательство.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7 и основано на применении результатов теоремы 5.

Теорема доказана.

Из теорем 7 и 8 вытекает следующее важное утверждение:

Теорема 9. *Пусть матрица A' получена из матрицы A элементарными преобразованиями в любой последовательности строк первых трех типов и всех столбцов четвертого типа. Тогда справедливы следующие равенства*:

$$\dim L(A'^1, A'^2, \ldots, A'^m) = \dim L(A^1, A^2, \ldots, A^m), \qquad (5.6)$$

$$\dim L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n) = \dim L(A_1, A_2, \ldots, A_n). \qquad (5.7)$$

Доказательство.

После применения элементарного преобразования любого из четырех типов имеют место равенства (5.6) и (5.7). Отсюда вытекает справедливость этих равенств после конечного числа элементарных преобразований первых четырех типов, причем и применения элементарного преобразования четвертого типа для всех столбцов матрицы A.

Теорема доказана.

Лекция 7

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Определитель второго порядка

Рассмотрим следующую систему двух уравнений относительно неизвестных x и y:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Методом исключения переменных построим решение при некотором условии, которое будет указано далее. Найдём выражение для неизвестной x. Умножим обе части первого уравнения на b_2, а второе уравнение умножим на $-b_1$ тогда получим равенства

$$\begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1, \\ -b_1a_2x - b_1b_2y = -b_1c_2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Теперь сложим эти два уравнения и получим равенство

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, x = c_1b_2 - c_2b_1. \tag{1.3}$$

Теперь получим выражение для неизвестной y. Умножим обе части первого уравнения в (1.1) на $-a_2$, а второе на a_1 и сложим полученные равенства. Тогда получим следующее выражение:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, y = a_1c_2 - a_2c_1. \tag{1.4}$$

Предположим, что

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \tag{1.5}$$

тогда из равенств (1.3) и (1.4) получим следующие эквивалентные равенства:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{1.6}$$

Нетрудно проверить непосредственной проверкой, что выражения (1.6) действительно удовлетворяют уравнениям (1.1).

Выражения для неизвестных x и y можно переписать в гораздо более удобном виде. Дадим определение определителя квадратной матрицы 2×2.

Определение 1. *Определителем квадратной матрицы D размера 2×2 называется следующее выражение*:

$$\det D = |D| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{1.7}$$

Замечание 1. Правило, по которому вычисляется определитель квадратной матрицы 2×2, можно схематично представить в следующем виде:

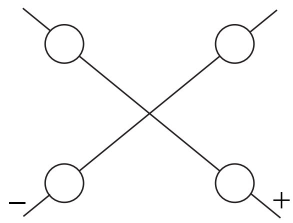

Рис. 45. Правило умножения.

ПРИМЕР 1. Вычислим определитель следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Действительно, согласно определению 1 имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1.$$

Теперь рассмотрим следующие три квадратные матрицы, связанные с коэффициентами и правами частями системы уравнений (1.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Согласно определению 2 имеем

$$|A| = a_1 b_2 - a_2 b_1, \quad |A_1| = c_1 b_2 - c_2 b_1, \quad |A_2| = a_1 c_2 - a_2 c_1. \tag{1.9}$$

Тогда формулы (1.6) можно переписать в следующем виде:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{1.10}$$

ПРИМЕР 2. Решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7, \\ 5x + 4y = 12. \end{cases} \tag{1.11}$$

Составим три квадратные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители этих трёх матриц.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 5 = 23,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = (-7) \cdot 4 - (-3) \cdot 12 = -28 + 36 = 8,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 - (-7) \cdot 5 = 24 + 35 = 59.$$

Поскольку $|A| \neq 0$, то система уравнений (1.11) имеет единственное решение, которое даётся следующими формулами:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{8}{23}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{59}{23}.$$

Мы рассмотрели полностью случай, когда $|A| \neq 0$. Что можно сказать о существовании решения системы уравнений (1.1) в том случае, когда $|A| = 0$? Рассмотрим ряд примеров.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases} \tag{1.12}$$

Матрица A имеет в данном случае вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0.$$

Очевидно, что эта система уравнений не имеет решений. Отметим, что

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A_1| = 1 - 2 = -1, \quad |A_2| = 2 - 1 = 1.$$

ПРИМЕР 4. Рассмотрим теперь следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2. \end{cases} \tag{1.13}$$

Матрица A имеет в данном случае следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0.$$

Эта система уравнений эквивалентна одному уравнению

$$x + y = 1,$$

всё множество решений которой можно записать в следующем виде:

$$x = c, \quad y = 1 - c,$$

где c — это произвольное вещественное число. Отметим, что в данном случае

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A_1| = |A_2| = 0.$$

Замечание 2. Могло бы показаться, что наличие бесконечного множества решений системы уравнений (1.13) связано с тем, что $|A| = |A_1| = |A_2| = 0$. Однако, это не так. Рассмотрим ещё один пример.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1. \end{cases} \tag{1.14}$$

Очевидно, что последнее уравнение противоречиво и поэтому эта система уравнений не имеет решений, хотя

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$|A| = |A_1| = |A_2| = 0.$$

Теперь мы изучим вопрос о том, что можно сказать о матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

в том случае, когда $|A| = 0$. Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Для того, чтобы*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.15}$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлись числа α и β, не равные одновременно нулю, чтобы были выполнены следующие равенства:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha a_1 + \beta b_1 = 0, \quad \alpha a_2 + \beta b_2 = 0. \tag{1.16}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть найдутся такие числа α и β, не равные одновременно нулю, такие что выполнено равенство (1.16). Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \neq 0$. Тогда получим следующие равенства:

$$a_1 = \gamma b_1, \quad a_2 = \gamma b_2, \quad \gamma = -\frac{\beta}{\alpha}. \tag{1.17}$$

Поэтому отсюда вытекает следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \gamma(b_1 b_2 - b_2 b_1) = 0.$$

Необходимость. Пусть $|A| = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть $b_2 \neq 0$. Тогда имеем

$$a_1 = \frac{a_2}{b_2} b_1. \tag{1.18}$$

Положим по определению

$$\lambda := \frac{a_2}{b_2}.$$

Тогда из (1.18) вытекает следующие равенства:

$$a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \alpha = 1, \quad \beta = -\lambda. \tag{1.19}$$

Случай 2. Пусть $b_2 = 0$ и $b_1 \neq 0$. Тогда имеем

$$a_2 b_1 = a_1 b_2 \Leftrightarrow a_2 = \frac{a_1}{b_1} b_2.$$

Введем число

$$\lambda := \frac{a_1}{b_1} \Rightarrow a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2.$$

Далее точно также как в первом случае приходим к следующему равенству:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \alpha = 1, \quad \beta = -\lambda.$$

Случай 3. Пусть $b_2 = b_1 = 0$. Тогда при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ справедливо равенство

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

Определители квадратных матриц 2×2 обладают набором определенных свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 1. Для того чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

соответствующей матрицы 2×2

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

были линейно зависимы.

Доказательство.

Утверждение является непосредственным следствием леммы 1.

Свойство доказано.

Свойство 2. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}. \tag{1.20}$$

Доказательство. Является непосредственным следствием явного выражения определителя (1.7).

Свойство доказано.

Свойство 3. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 c_1 & b_1 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{1.21}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 b_1 + \alpha_2 c_1 \\ a_2 & \alpha_1 b_2 + \alpha_2 c_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{1.22}$$

Доказательство. Докажем только (1.21), поскольку (1.22) доказывается аналогичным образом. Действительно,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 c_1 & b_1 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 c_2 & b_2 \end{vmatrix} &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) b_2 - (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 c_2) b_1 = \\ &= \alpha_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1) + \alpha_2 (c_1 b_2 - c_2 b_1) = \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Свойство доказано.

Свойство 4. Справедливо следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Дадим определение.

Определение 2. *Функция двух вещественных переменных* $f = f(x, y)$ *называется полилинейной, если выполнены следующие равенства*:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y), \tag{1.24}$$

$$f(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f(x, y_1) + \alpha_2 f(x, y_2) \tag{1.25}$$

для любых чисел α_1, α_2 *и вещественных переменных* x, x_1, x_2, y, y_1, y_2.

ПРИМЕР 6. Например, функция $f(x,y) = xy$ является полилинейной.

Понятие полилинейности можно ввести не только для функций вещественных переменных, но и для функций от столбцов. Действительно, пусть

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Дадим определение.

Определение 3. *Вещественная функция* $f(X,Y)$ *от двух столбцов называется полилинейной, если для любых чисел* α_1 *и* α_2 *и любых столбцов* X, X^1, X^2, Y, Y^1, Y^2 *размера* 2×1 *справедливы следующие равенства*:

$$f(\alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2, Y) = \alpha_1 f(X^1, Y) + \alpha_2 f(X^2, Y), \tag{1.27}$$

$$f(X, \alpha_1 Y^1 + \alpha_2 Y^2) = \alpha_1 f(X, Y^1) + \alpha_2 f(X, Y^2). \tag{1.28}$$

ПРИМЕР 7. Самый важный для нас пример полилинейной функции — это определитель:

$$f(X,Y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{1.29}$$

Докажем, например, равенство (1.27). Пусть

$$X^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

Справедливо равенство

$$\alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_1^2 \\ \alpha_1 x_2^1 + \alpha_2 x_2^2 \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

Тогда в силу свойства 3 имеем

$$f(\alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2, Y) = \begin{vmatrix} \alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_1^2 & y_1 \\ \alpha_1 x_2^1 + \alpha_2 x_2^2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} x_1^1 & y_1 \\ x_2^1 & y_2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 \\ x_2^2 & y_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 f(X^1, Y) + \alpha_2 f(X^2, Y). \tag{1.32}$$

Поскольку определитель матрицы 2×2 является полилинейной функцией своих двух столбцов, то в дальнейшем мы будем использовать следующее обозначение для определителя матрицы $A = \|A_1, A_2\|$ размера 2×2 :

$$\det A = |A| = |A_1, A_2|. \tag{1.33}$$

Тогда свойство 1 можно переформулировать так: *для того чтобы определитель* $|A| = |A_1, A_2|$ *был равен нулю, необходимо и достаточно,* *чтобы столбцы A_1 и A_2 были линейно зависимы*; свойство 2 можно переформулировать так $|A_1, A_2| = -|A_2, A_1|$; свойство 3 можно сформулировать так *определитель* $|A| = |A_1, A_2|$ *является полилинейной функцией своих столбцов*.

Заметим, что второе свойство: $|A_1, A_2| = -|A_2, A_1|$ называется свойством *кососимметричности* определителя матрицы A размера 2×2 как функции своих столбцов A_1 и A_2.

ПРИМЕР 8. Кососимметричной по y, z и полилинейной по x, y, z является функция $f(x, y, z) = x(y - z)$.

§ 2. Определитель третьего порядка

Рассмотрим следующую квадратную матрицу размера 3×3:

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \|A, B, C\|, \tag{2.1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Введем понятие определителя квадратной матрицы 3×3.

Определение 4. *Определителем квадратной матрицы D размера 3×3 называется числовая функция $|D| = |A, B, C|$ столбцов A, B и C матрицы $D = \|A, B, C\|$, обладающая следующими свойствами*:

1. *числовая функция $|D| = |A, B, C|$ является полилинейной функцией столбцов A, B и C;*
2. *числовая функция $|D| = |A, B, C|$ является кососимметричной функцией столбцов A, B и C;*
3. *выполнено свойство нормировки $|D| = 1$ для столбцов*

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. Отметим, что в определение определителя матрицы размера 3×3 мы положили свойства 2–4 определителя квадратной матрицы 2×2. Отметим, что из свойства 2 кососимметричности определителя вытекает важное свойство:

Лемма 2. *Если хотя бы два столбца матрицы 2×2 или 3×3 совпадают, то определитель такой матрицы равен нулю.*

Доказательство.

Для случая определителя матрицы 2×2 указанное свойство является прмым следствием формулы (1.7). Рассмотрим случай определителя матрицы $D = \|A, B, C\|$ размера 3×3. Пусть, например, столбцы $A = B$, тогда имеем

$$|D| = |A, A, C|.$$

В силу свойства кососимметричности определителя $|D|$ относительно столбцов матрицы D, то справедливы равенства

$$|D| = |A, B, C| = -|B, A, C| \Rightarrow |A, A, C| = -|A, A, C| \Rightarrow \\ \Rightarrow 2|A, A, C| = 0 \Rightarrow |A, A, C| = 0 \Rightarrow |A, B, C| = 0. \quad (2.3)$$

Лемма доказана.

Теперь наша задача получить явный вид определителя квадратной матрицы размера 3×3. С этой целью рассмотрим множество всех столбцов $\mathbb{K}^{3\times 1}$ длины 3, состоящих из чисел из числового поля $\mathbb{K}$. Напомним, что в нашем курсе числовое поле $\mathbb{K}$ — либо $\mathbb{R}$ либо $\mathbb{C}$. Относительно введённых ранее операций сложения столбцов и умножения столбца на числа из $\mathbb{K}$ множество $\mathbb{K}^{3\times 1}$ является линейным пространством. Введём в этом линейном пространстве так называемый канонический базис.

Определение 5. *Каноническим базисом в* $\mathbb{K}^{3\times 1}$ *называется семейство следующих трёх столбцов*:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Необходимо проверить, что это семейство столбцов действительно образуют базис в $\mathbb{K}^{3\times 1}$.

$\square$ Действительно, семейство $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ является линейно независимым в $\mathbb{K}^{3\times 1}$, поскольку

$$\alpha^1\mathbf{e}_1 + \alpha^2\mathbf{e}_2 + \alpha^3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = 0.$$

Любой столбец можно представить в виде разложения по семейству $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = \alpha^1\mathbf{e}_1 + \alpha^2\mathbf{e}_2 + \alpha^3\mathbf{e}_3. \quad \boxtimes$$

Таким образом справедливы следующие разложения по каноническому базису в $\mathbb{K}^{3\times 1}$ столбцов A, B и C :

$$A = \sum_{\sigma_1=1}^{3} a_{\sigma_1}\mathbf{e}_{\sigma_1}, \quad B = \sum_{\sigma_2=1}^{3} b_{\sigma_2}\mathbf{e}_{\sigma_2}, \quad C = \sum_{\sigma_3=1}^{3} c_{\sigma_3}\mathbf{e}_{\sigma_3}. \quad (2.5)$$

Замечание 4. В равенствах (2.5) мы используем различные индексы суммирования σ_1, σ_2 и σ_3 и это существенно для нас для дальнейшего. Кроме того, мы используем нижние индексы в соответствующих суммах. Это не очень хорошо, но для первого знакомства с теорией определителей допустимо.

Теперь воспользуемся свойством полилинейности определителя как функции от столбцов и получим следующую цепочку равенств:

$$
\begin{aligned}
|D| = |A, B, C| = \left| \sum_{\sigma_1=1}^{3} a_{\sigma_1} \mathbf{e}_{\sigma_1}, B, C \right| = \\
= \sum_{\sigma_1=1}^{3} a_{\sigma_1} |\mathbf{e}_{\sigma_1}, B, C| = \sum_{\sigma_1=1}^{3} a_{\sigma_1} \left| \mathbf{e}_{\sigma_1}, \sum_{\sigma_2=1}^{3} b_{\sigma_2} \mathbf{e}_{\sigma_2}, C \right| = \\
= \sum_{\sigma_1=1}^{3} \sum_{\sigma_2=1}^{3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} |\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, C| = \\
= \sum_{\sigma_1=1}^{3} \sum_{\sigma_2=1}^{3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} \left| \mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \sum_{\sigma_3=1}^{3} c_{\sigma_3} \mathbf{e}_{\sigma_3} \right| = \\
= \sum_{\sigma_1=1}^{3} \sum_{\sigma_2=1}^{3} \sum_{\sigma_3=1}^{3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3} |\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| . \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Рассмотрим отдельно определитель $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ матрицы $\|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\|$.

Наблюдение 1. $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| = 0$, если хотя бы два индекса из трёх $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ совпадают.

□ Действительно, если, например, $\sigma_1 = \sigma_2$, то в определителе $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ первые два столбца совпадают. Но тогда в силу результата леммы 2 $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| = 0$. ⊠

Вывод 1. В итоговой сумме (2.6) для определителя $|D|$ остаётся только следующая часть:

$$
|D| = \sum_{\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \in S_3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3} |\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| , \qquad (2.7)
$$

где S_3 — это конечное множество, состоящее из следующих 6 упорядоченных троек чисел:

$$
\{1,2,3\}, \ \{2,1,3\}, \ \{3,2,1\}, \ \{1,3,2\}, \ \{2,3,1\}, \ \{3,1,2\}. \qquad (2.8)
$$

Описать конечное множество упорядоченных троек чисел S_3 можно при помощи такого понятия как *перестановка*. Но сначала рассмотрим следующий пример из классического учебника П. С. Александрова: **Боря**, **Володя** и **Шурик** сидят в лодке в определённом порядке, считая, например, от носа к корме лодки. Их можно пересадить шестью различными способами:

1. **Боря, Володя, Шурик;**
2. **Боря, Шурик, Володя;**
3. **Володя, Боря, Шурик;**
4. **Володя, Шурик, Боря;**

5. **Шурик, Володя, Боря;**
6. **Шурик, Боря, Володя.**

Теперь сопоставим Боре число 1, Володе число 2, а Шурику числу 3. Тогда упорядоченная тройка чисел $\{1, 2, 3\}$ соответствует исходному расположению Бори, Володи и Шурика в лодке. А например, число $\{2, 1, 3\}$ означает, что Боря и Володя поменялись местами, а Шурик остался на месте. Более сложная ситуация — $\{2, 3, 1\}$ означает, что Боря занял место Шурика, Шурик занял место Володи, а Володя занял место Шурика. Переход от одного порядка расположения мальчиков в лодке к другому порядку, т. е. *само действие*, называется *перестановкой*.

Обсудим теперь важный вопрос о форме записи *перестановки*. Например, перестановка может быть записана в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \textbf{Боря}, & \textbf{Володя}, & \textbf{Шурик} \\ \textbf{Володя}, & \textbf{Шурик}, & \textbf{Боря} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

— эти таблицу следует читать так, **Боря** поменялся местами с **Володей**, **Володя** с **Шуриком**, а **Шурик** с **Борей**. Отметим, что *перестановка* — это *операция*, т. е. *сам процесс пересаживания*, а не результат. Поэтому чтобы задать перестановку совсем не обязательно выписывать ее в виде таблицы, упорядоченной по верхнему ряду, как в (2.9), а, например, так

$$\begin{bmatrix} \textbf{Володя}, & \textbf{Боря}, & \textbf{Шурик} \\ \textbf{Шурик}, & \textbf{Володя}, & \textbf{Боря} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Теперь мы можем дать точное определение перестановки. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$ — это конечное неупорядоченное множество, состоящее из трёх чисел, т.е., например, $\{2, 1, 3\}$ — это другая форма записи того же множества N. [1]

Определение 6. *Перестановкой множества N называется взаимно однозначное отображение множества N в себя*:

$$\widehat{\sigma}: \; N \to N. \tag{2.11}$$

Обозначение. Поскольку множество $N = \{1, 2, 3\}$ — конечное, то для того чтобы задать перестановку достаточно просто указать куда отображение $\widehat{\sigma}$ переводит каждое из чисел $\{1, 2, 3\}$. Например, можно отображение $\widehat{\sigma}$ можно задать следующим образом:

$$\widehat{\sigma}: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \widehat{\sigma}(1) & \widehat{\sigma}(2) & \widehat{\sigma}(3) \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \widehat{\sigma}: \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \widehat{\sigma}(2) & \widehat{\sigma}(1) & \widehat{\sigma}(3) \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

[1] Когда мы будем считать $\{2, 1, 3\}$ упорядоченным множеством в том смысле, что число 2 является первым, число 1 — вторым, а число 3 — третьим — мы будем это особо подчеркивать.

Лемма 3. *На множестве $N = \{1, 2, 3\}$ существует ровно 6 перестановок.*

Доказательство.

Произвольная перестановка может быть записана в виде двухрядной таблицы (2.12). Подсчитаем количество вариантов заполнения второго ряда таблицы. Число $\widehat{\sigma}(1)$ может быть выбрана тремя способами — фиксируем одно из трех значений для $\widehat{\sigma}(1)$; теперь число $\widehat{\sigma}(2)$ может быть выбрано только двумя способами — фиксируем одно из двух значений для $\widehat{\sigma}(2)$; число $\widehat{\sigma}(3)$ тогда выбирается однозначно. Подсчитаем количество вариантов

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Лемма доказана.

Эти шесть перестановок можно записать в виде двухрядных таблиц, для удобства упорядоченных по верхнему ряду.

$$\widehat{\varepsilon} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\tau}_2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\tau}_3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

$$\widehat{\tau}_4 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\tau}_5 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\tau}_6 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Кроме того, можно записать эти шесть перестановок в сокращенном виде, считая *верхний ряд таблицы упорядоченным по возрастанию*:

$$\widehat{\varepsilon} := [\ 1 \ \ 2 \ \ 3\ ], \quad \widehat{\tau}_2 := [\ 2 \ \ 1 \ \ 3\ ], \quad \widehat{\tau}_3 := [\ 3 \ \ 2 \ \ 1\ ], \tag{2.15}$$

$$\widehat{\tau}_4 := [\ 1 \ \ 3 \ \ 2\ ], \quad \widehat{\tau}_5 := [\ 2 \ \ 3 \ \ 1\ ], \quad \widehat{\tau}_6 := [\ 3 \ \ 1 \ \ 2\ ]. \tag{2.16}$$

Применяя эти шесть перестановок к упорядоченному множеству $\{1, 2, 3\}$ мы получим все шесть элементов (2.8) множества S_3.

Наблюдение 2. Среди рассмотренных шести перестановок имеется перестановка, которую естественно назвать единичной, поскольку она оставляет числа 1, 2, и 3 на своих местах:

$$\widehat{\varepsilon} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Наблюдение 3. Для этих шести перестановок определена *операция умножения.*

□ Действительно, рассмотрим две перестановки

$$\widehat{\sigma}_1 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_2 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

Для этих двух перестановок имеем

$$\widehat{\sigma}_1(1) = 2, \quad \widehat{\sigma}_1(2) = 3, \quad \widehat{\sigma}_1(3) = 1, \tag{2.19}$$

$$\widehat{\sigma}_2(1) = 3, \quad \widehat{\sigma}_2(2) = 2, \quad \widehat{\sigma}_2(3) = 1. \tag{2.20}$$

Поэтому определена перестановка $\widehat{\sigma}_3 = \widehat{\sigma}_2\widehat{\sigma}_1$, которая определяется как последовательное применение перестановок $\widehat{\sigma}_1$ и $\widehat{\sigma}_2$:

$$\widehat{\sigma}_3(1) = \widehat{\sigma}_2(\widehat{\sigma}_1(1)) = \widehat{\sigma}_2(2) = 2, \tag{2.21}$$

$$\widehat{\sigma}_3(2) = \widehat{\sigma}_2(\sigma_1(2)) = \widehat{\sigma}_2(3) = 1, \tag{2.22}$$

$$\widehat{\sigma}_3(3) = \widehat{\sigma}_2(\widehat{\sigma}_1(3)) = \widehat{\sigma}_2(1) = 3. \tag{2.23}$$

Итак,

$$\widehat{\sigma}_3 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \quad \boxtimes \tag{2.24}$$

Дадим определение.

Определение 7. *Произведением двух произвольных перестановок $\widehat{\sigma}$ на $\widehat{\tau}$ называется перестановка, которая определяется следующим образом*:

$$\widehat{\sigma}\widehat{\tau} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \widehat{\sigma}(\widehat{\tau}(1)) & \widehat{\sigma}(\widehat{\tau}(2)) & \widehat{\sigma}(\widehat{\tau}(3)) \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Наблюдение 4. Заметим, что, вообще говоря, $\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2 \neq \widehat{\sigma}_2\widehat{\sigma}_1$.

$\square$ Действительно, вычислим $\widehat{\sigma}_4 := \widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2$ для перестановок (2.18). Имеем

$$\widehat{\sigma}_4(1) = \widehat{\sigma}_1(\widehat{\sigma}_2(1)) = \widehat{\sigma}_1(3) = 1, \tag{2.26}$$

$$\widehat{\sigma}_4(2) = \widehat{\sigma}_1(\widehat{\sigma}_2(2)) = \widehat{\sigma}_1(2) = 3, \tag{2.27}$$

$$\widehat{\sigma}_4(3) = \widehat{\sigma}_1(\widehat{\sigma}_2(3)) = \widehat{\sigma}_1(1) = 2. \tag{2.28}$$

Итак,

$$\widehat{\sigma}_4 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Из сравнения (2.24) с (2.29) приходим к выводу о том, что $\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2 \neq \widehat{\sigma}_2\widehat{\sigma}_1$. Это свойство называется *некоммутативностью операции произведения перестановок*. $\boxtimes$

Наблюдение 5. Всегда справедливо следующее равенство $\widehat{\varepsilon}\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}\widehat{\varepsilon}$ для любой перестановки $\widehat{\sigma}$ и единичной перестановки $\widehat{\varepsilon}$.

Наблюдение 6. Для каждой перестановки $\widehat{\sigma}$ определена обратная перестановка $\widehat{\sigma}^{-1}$ в том смысле, что выполняются равенства

$$\widehat{\sigma}\widehat{\sigma}^{-1} = \widehat{\sigma}^{-1}\widehat{\sigma} = \widehat{\varepsilon}. \tag{2.30}$$

Более того, в обозначениях (2.13) справедливы следующие равенства:

$$\widehat{\varepsilon}^2 := \widehat{\varepsilon}\widehat{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon}, \quad \widehat{\tau}_j^2 := \widehat{\tau}_j\widehat{\tau}_j = \widehat{\varepsilon} \quad \text{при} \quad j = 2, 3, 4, \tag{2.31}$$

$$\widehat{\tau}_5\widehat{\tau}_6 = \widehat{\tau}_6\widehat{\tau}_5 = \widehat{\varepsilon}, \tag{2.32}$$

из которых вытекает, что

$$\widehat{\varepsilon}^{-1} = \widehat{\varepsilon}, \quad \widehat{\tau}_j^{-1} = \widehat{\tau}_j \quad \text{при} \quad j = 2, 3, 4, \tag{2.33}$$

$$\widehat{\tau}_5^{-1} = \widehat{\tau}_6, \quad \widehat{\tau}_6^{-1} = \widehat{\tau}_5. \tag{2.34}$$

Вывод 2. Множество перестановок на множестве $N = \{1, 2, 3\}$ образуют некоммутативную группу, которая называется *симметрической группой*.

Теперь рассмотрим конечное множество S_3 и множество (2.13) и (2.14) всех перестановок на множестве $N = \{1, 2, 3\}$. Совершенно понятно, что эти два множества можно отождествить следующим образом:

$$\{1,2,3\} \leftrightarrow \widehat{\varepsilon}, \quad \{2,1,3\} \leftrightarrow \widehat{\tau}_2, \quad \{3,2,1\} \leftrightarrow \widehat{\tau}_3, \quad \{1,3,2\} \leftrightarrow \widehat{\tau}_4, \tag{2.35}$$

$$\{2,3,1\} \leftrightarrow \widehat{\tau}_5, \quad \{3,1,2\} \leftrightarrow \widehat{\tau}_6. \tag{2.36}$$

Как нетрудно заметить, что отождествления (2.35) и (2.36) основаны на результате применения той или иной перестановки к упорядоченному множеству $\{1, 2, 3\}$. Здесь мы приходим к возможности называть операцию и результат её применения к упорядоченному набору чисел $\{1, 2, 3\}$ одним и тем же названием — перестановка. В частности, введенное ранее множество S_3, состоящее из шести упорядоченных наборов чисел, мы имеем полное право называть множеством перестановок.

Для дальнейшего нам нужно ввести понятие *четной* и *нечетной* перестановок. Сначала введём операцию *транспозиции* в упорядоченном множестве $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, которая является перестановкой.

Определение 8. *Транспозицией в упорядоченном множестве* $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ *называется произвольная перестановка соседних чисел.*

Определение 9. *Перестановка* $\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ *называется четной, если она может быть получена из перестановки* $\{1, 2, 3\}$ *четным числом транспозиций, и называется нечётной, если она может быть получена из перестановки* $\{1, 2, 3\}$ *нечётным числом транспозиций.*

Корректность определения. Строго говоря, мы должны доказать, что определение 9 корректно. Действительно, для получения последовательностью транспозиций заданной перестановки мы можем применять разное количество транспозиций и нужно доказать, что для любой фиксированной перестановки число этих перестановок либо чётное либо нечётное. Для рассмотрения этого вопроса мы отсылаем к более специальной литературе, поскольку наш курс является вводным в эту область алгебры.

Поскольку у нас число перестановок равно шести, то мы можем просто описать все *чётные* перестановки и все *нечётные* перестановки. При этом одной транспозицией можно из чётной перестановки сделать нечётную и наоборот. Поэтому число чётных перестановок совпадает с числом нечётных перестановок. Итак, всего три четные и три нечетные перестановки из S_3.

1. Перестановка $\{1, 2, 3\}$ считается чётной по определению;

2. Перестановка $\{2,1,3\}$ является нечётной, поскольку получена следующей транспозицией:

$$\{1,2,3\} \mapsto \{2,1,3\};$$

3. Перестановка $\{3,2,1\}$ является нечётной, поскольку получена тремя следующими транспозициями:

$$\{1,2,3\} \mapsto \{1,3,2\} \mapsto \{3,1,2\} \mapsto \{3,2,1\};$$

4. Перестановка $\{1,3,2\}$ является нечётной, поскольку получена одной следующей транспозицией:

$$\{1,2,3\} \mapsto \{1,3,2\};$$

5. Перестановка $\{2,3,1\}$ является чётной, поскольку получена следующими двумя транспозициями:

$$\{1,2,3\} \mapsto \{2,1,3\} \mapsto \{2,3,1\};$$

6. Перестановка $\{3,1,2\}$ является чётной, поскольку получена следующими двумя транспозициями:

$$\{1,2,3\} \mapsto \{1,3,2\} \mapsto \{3,1,2\}.$$

Дадим определение знака $\operatorname{sign}\widehat{\sigma}$ перестановки $\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \in S_3$.

$$\operatorname{sign}\widehat{\sigma} = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка} \quad \widehat{\sigma} = \{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\} - \text{чётная;} \\ -1, & \text{если перестановка} \quad \widehat{\sigma} = \{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\} - \text{нечётная.} \end{cases} \tag{2.37}$$

Докажем следующее важное утверждение:

Лемма 4. *Справедливо равенство* $\operatorname{sign}(\widehat{\sigma}\widehat{\tau}) = \operatorname{sign}\widehat{\sigma}\operatorname{sign}\widehat{\tau}$.

Доказательство.

Прежде всего заметим, что при транспозиции, очевидно, меняется чётность перестановки. Пусть перестановки $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{\tau}$ можно представить в виде произведения последовательности транспозиций следующим образом:

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}_n\widehat{\sigma}_{n-1}\cdots\widehat{\sigma}_1, \quad \widehat{\tau} = \widehat{\tau}_m\widehat{\tau}_{m-1}\cdots\widehat{\tau}_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \widehat{\sigma}\widehat{\tau} = \widehat{\sigma}_n\widehat{\sigma}_{n-1}\cdots\widehat{\sigma}_1\widehat{\tau}_m\widehat{\tau}_{m-1}\cdots\widehat{\tau}_1. \tag{2.38}$$

Тогда согласно определению знака перестановки (2.37) имеем

$$\operatorname{sign}\widehat{\sigma} = (-1)^n, \quad \operatorname{sign}\widehat{\tau} = (-1)^m, \quad \operatorname{sign}(\widehat{\sigma}\widehat{\tau}) = (-1)^{n+m}. \tag{2.39}$$

Лемма доказана.

Теперь обратимся к полученной ранее формуле (2.7), которую с учетом отождествления перестановок и элементов множества S_3 можно записать в следующем виде:

$$|D| = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}\in S_3} a_{\sigma_1}b_{\sigma_2}c_{\sigma_3}\left|\mathbf{e}_{\sigma_1},\mathbf{e}_{\sigma_2},\mathbf{e}_{\sigma_3}\right|. \tag{2.40}$$

Рассмотрим отдельно определитель $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$.

Наблюдение 7. Определитель $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ в зависимости от перестановки $\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ принимает всего два значения: либо 1 либо -1.

$\square$ Например, рассмотрим перестановку $\widehat{\sigma} = \{2, 1, 3\}$. Тогда определитель имеет следующий вид:

$$|\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3| = -|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = -1,$$

где мы воспользовались свойством 2 кососимметричности определителя и свойством нормировки определителя: $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = 1$. Таким образом, произвольный определитель $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ в случае, когда $\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ — перестановка, отличается от определителя $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3|$ только знаком. $\boxtimes$

Наблюдение 8. Справедливо следующее равенство:

$$|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| = \operatorname{sign} \widehat{\sigma}\, |\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3|, \quad \widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \in S_3. \tag{2.41}$$

$\square$ Действительно, по аналогии с определением 8 дадим определение транспозиции в определителе матрицы D размера 3×3.

Определение 10. *Транспозицией столбцов $|A, B, C|$ определителя матрицы $D = \|A, B, C\|$ называется перестановка двух соседних столбцов.*

Заметим, что, с одной стороны, упорядоченная тройка столбцов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ конечным числом транспозиций столбцов может быть приведена к следующей упорядоченной тройке столбцов: $\{\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\}$, где $\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ — перестановка. Справедливо аналогичного содержание утверждение. Упорядоченная тройка чисел $\{1, 2, 3\}$ конечным числом транспозиций может быть приведена к следующей упорядоченной тройке чисел $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \in S_3$. Эти транспозиции

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \overset{\widehat{\sigma}}{\mapsto} \{\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\},$$
$$\{1, 2, 3\} \overset{\widehat{\sigma}}{\mapsto} \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

можно выбрать в точности совпадающими. Более того, пусть эта итоговая перестановка $\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ является произведением последовательности транспозиций следующего вида: [1])

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}_n \widehat{\sigma}_{n-1} \cdots \widehat{\sigma}_1. \tag{2.42}$$

Справедливо следующее очевидное равенство:

$$|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = \operatorname{sign}\{1, 2, 3\} |\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3|. \tag{2.43}$$

Теперь будем последовательно применять заданную последовательности транспозиций (2.42) в левой части равенства (2.43) к упорядоченной тройке столбцов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в правой части равенства (2.43) к

[1]) Очевидно, каждая транспозиция является перестановкой.

упорядоченной тройке чисел $\{1, 2, 3\}$. Количество этих транспозиций одно и тоже. При этом при транспозиции в определителе в левой части равенства (2.43) в силу кососимметричности меняет знак на противоположный, но и знак полученной перестановки в правой части равенства (2.43) после применения транспозиции тоже меняет знак на противоположный. Таким образом, знак равенства в выражении (2.43) после каждой транспозиции и в правой части и в левой части одновременно меняется на противоположный. В результате применения указанным образом последовательности транспозиций (2.42) мы получим искомое равенство

$$|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| = \mathrm{sign}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \, |\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| \, . \quad \boxtimes$$

Таким образом, из выражения (2.40) для определителя $|D|$ матрицы D и полученного равенства (2.41) мы с учетом свойства 3 нормировки определителя $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = 1$ приходим к следующему выражению для определителя:

$$|D| = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\sigma_3\}\in S_3} \mathrm{sign}\, \widehat{\sigma} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3}. \tag{2.44}$$

Кроме того, знаки всех шести перестановок из S_3 нам известны:

$$\mathrm{sign}\, \widehat{\varepsilon} = \mathrm{sign}\{1, 2, 3\} = 1, \quad \mathrm{sign}\, \widehat{\tau}_2 = \mathrm{sign}\{2, 1, 3\} = -1, \tag{2.45}$$

$$\mathrm{sign}\, \widehat{\tau}_3 = \mathrm{sign}\{3, 2, 1\} = -1, \quad \mathrm{sign}\, \widehat{\tau}_4 = \mathrm{sign}\{1, 3, 2\} = -1, \tag{2.46}$$

$$\mathrm{sign}\, \widehat{\tau}_5 = \mathrm{sign}\{2, 3, 1\} = 1, \quad \mathrm{sign}\, \widehat{\tau}_6 = \mathrm{sign}\{3, 1, 2\} = 1. \tag{2.47}$$

Таким образом, из равенства (2.44) и (2.45)–(2.47) вытекает следующее равенство:

$$|D| = a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2. \tag{2.48}$$

Формулы (2.44) и (2.48) называются формулами полного развёртывания определителя третьего порядка.

П р а в и л о С а р р ю с а. На рисунке указано правило вычисления произведений, входящих в формулу (2.48) со знаком «+» и входящих в формулу (2.48) со знаком «−»:

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_1} & b_1 & c_1 \\ a_2 & \boxed{b_2} & c_2 \\ a_3 & b_3 & \boxed{c_3} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} & c_1 \\ a_2 & b_2 & \boxed{c_2} \\ \boxed{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boxed{c_1} \\ \boxed{a_2} & b_2 & c_2 \\ a_3 & \boxed{b_3} & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.49}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boxed{c_1} \\ a_2 & \boxed{b_2} & c_2 \\ \boxed{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \boxed{a_1} & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \boxed{c_2} \\ a_3 & \boxed{b_3} & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} & c_1 \\ \boxed{a_2} & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \boxed{c_3} \end{vmatrix}. \tag{2.50}$$

Со знаком «+» в формулу (2.48) входят слагаемые, полученные произведением элементов, указанных в (2.49), а со знаком «-» — входят слагаемые, полученные произведением элементов, указанных в (2.50). Можно заметить, что со знаком «+» входят слагаемые, полученные произведением элементов, расположенных на глдавной диагонали и двух «малых» диагоналей, параллельных главной, а со знаком «-» входят слагаемые, полученные произведением элементов, расположенных на побочной диагонали, и двух «малых» диагоналей, параллельных побочной.

Определитель матрицы 2×2. Заметим, что определитель матрицы 2×2 может быть записан в форме, аналогичной форме (2.44) для определителя матрицы 3×3. Прежде всего, рассмотрим множество S_2, состоящее из двух упорядоченных пар чисел

$$\{1, 2\} \quad \text{и} \quad \{2, 1\}. \tag{2.51}$$

Точно также как в случае определителя 3×3 мы можем ввести перестановки на неупорядоченном множестве $N = \{1, 2\}$ — этих перестановок всего две:

$$\widehat{\varepsilon}: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \tau_2: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.52}$$

которые можно отождествить с результатом их применения к упорядоченной паре чисел $\{1, 2\}$. Точно также как и ранее вводится определение транспозиции в перестановке и знака перестановки. При этом

$$\operatorname{sign} \widehat{\varepsilon} = 1, \quad \operatorname{sign} \widehat{\tau}_2 = -1. \tag{2.53}$$

Теперь мы можем формулу (1.7) для определителя матрицы D размера 2×2 переписать в следующем эквивалентном виде:

$$|D| = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \sum_{\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2\} \in S_2} \operatorname{sign} \widehat{\sigma} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} = |A, B|, \tag{2.54}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $n \times n$. Определитель матрицы D размера $n \times n$ при $n > 3$ вводится точно также как и определитель матрицы размера 3×3 как полилинейная, кососимметричная функция столбцов $|D| = |A_1, A_2, \ldots, A_n|$ матрицы $D = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\|$, удовлетворяющая условию нормировки

$$|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n| = 1.$$

Далее точно также рассматривается множество S_n, состоящее из $n!$ различных упорядоченных наборов из первых n натуральных чисел, полученных перестановками из упорядоченного множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Знак перестановки вводится точно также как и в трехмерном случае и мы приходим к формуле полного развертывания определителя n–го порядка [1])

$$|D| = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n\}\in S_n} \operatorname{sign}\widehat{\sigma} a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2}\cdots a_n^{\sigma_n}, \tag{2.55}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}, \tag{2.56}$$

$$A_1 = \sum_{\sigma_1=1}^{n} a_1^{\sigma_1}\mathbf{e}_{\sigma_1}, \quad A_2 = \sum_{\sigma_2=1}^{n} a_2^{\sigma_2}\mathbf{e}_{\sigma_2}, \dots, A_n = \sum_{\sigma_n=1}^{n} a_n^{\sigma_n}\mathbf{e}_{\sigma_n}, \tag{2.57}$$

причём справедливо следующее равенство, аналогичное (2.41):

$$|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma_n}| = \operatorname{sign}\widehat{\sigma}\,|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n| = \operatorname{sign}\widehat{\sigma}, \tag{2.58}$$

$$\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \in S_n, \tag{2.59}$$

поскольку по третьему свойству нормировки $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n| = 1$.

§ 3. Свойства определителей

Докажем следующее вспомогательное утверждение:
Лемма 5. *Если $F = F(A, B, C)$ — произвольная полилинейная и кососимметрическая функция столбцов матрицы $D = \|A, B, C\|$, тогда справедливо следующее равенство*:

$$F(A, B, C) = |D| F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \tag{3.1}$$

Доказательство.
Достаточно проследить за выводом формулы полного развертывания определителя и получить следующую формулу:

$$F(A, B, C) = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\sigma_3\}\in S_3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3} F(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}). \tag{3.2}$$

Теперь можно доказать следующее равенство, аналогичное равенству (2.41)

$$F(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}) = \operatorname{sign}\widehat{\sigma} F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \tag{3.3}$$

Из формул (3.2) и (3.3) вытекает следующее равенство:

$F(A, B, C) =$

[1]) В этой формуле мы вынуждены перейти к правильным обозначениям и, в частности, использовать два индекса — один снизу, нумерующий столбец A_k матрицы D, и один вверху, нумерующий строчку в столбце, в которой расположен элемент.

$$= \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\sigma_3\}\in S_3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3} \operatorname{sign} \widehat{\sigma} F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)|D|. \quad (3.4)$$

Лемма доказана.

Введём операцию транспонирования матрицы.

Определение 11. *Матрица* $A^T = \{\widetilde{a}_j^k\}_m^n$ *называется транспонированной к матрице* $A = \{a_k^j\}_n^m$, *если элементы этих матриц связаны следующим равенством*:

$$\widetilde{a}_j^k = a_k^j \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (3.5)$$

ПРИМЕР 9. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для дальнейшего нам понадобится явный вид для транспонированной матрицы D^T к матрице D :

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad D^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 6. $|D^T| = |D|$.

Доказательство.

Введём следующие обозначения:

$$D^T = \|\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}\|,$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \widetilde{a}_2 \\ \widetilde{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \widetilde{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Согласно формулам (2.44) и (2.48) справедливы следующие равенства:

$$|D^T| = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}\in S_3} \operatorname{sign} \widehat{\sigma} \widetilde{a}_{\sigma_1} \widetilde{b}_{\sigma_2} \widetilde{c}_{\sigma_3} =$$
$$= \widetilde{a}_1 \widetilde{b}_2 \widetilde{c}_3 - \widetilde{a}_2 \widetilde{b}_1 \widetilde{c}_3 - \widetilde{a}_3 \widetilde{b}_2 \widetilde{c}_1 - \widetilde{a}_1 \widetilde{b}_3 \widetilde{c}_2 + \widetilde{a}_2 \widetilde{b}_3 \widetilde{c}_1 + \widetilde{a}_3 \widetilde{b}_1 \widetilde{c}_2 =$$
$$= a_1 b_2 c_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 = |D|. \quad (3.7)$$

Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает следующая:

Лемма 7. *При перестановке любых строк в определителе матрицы* D *размера* 3×3 *определитель меняет знак.*

Доказательство.

В силу результата леммы 6 справедливо равенство $|D| = |D^T|$. При этом строки матрицы D являются столбцами матрицы D^T с теми же самыми номерами. При этом перестановка строк матрицы D соответствует перестановка соответствующих столбцов матрицы D^T и при этом $|D^T|$ меняет знак. Но тогда в силу равенства $|D| = |D^T|$ определитель $|D|$ тоже меняет знак.

Лемма доказана.

Справедлива следующая:

Лемма 8. *Имеет место следующее равенство*:

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{3.8}$$

Доказательство.

Воспользуемся формулой (2.48) полного развёртывания определителя, в которой положим $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ и $a_3 = 0$ и получим следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{3.9}$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.7) полного развертывания определителя второго порядка.

Лемма доказана.

§ 4. Алгебраические дополнения и дополнительные миноры

Отметим, что формулы (2.44) и (2.55) полного развертывания определителей третьего и n–го порядков удобны для теоретических рассуждений, но не всегда удобны для вычисления определителей. В этом разделе мы получим рекуррентные формулы для вычисления определителей. Для этого нам понадобятся понятия *алгебраического дополнения* и *дополнительного минора*. Пусть задана матрица $D = \|A, B, C\|$, где столбцы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Разложим сначала столбец A по каноническому базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$A = \sum_{k=1}^{3} a_k \mathbf{e}_k. \tag{4.1}$$

С учётом (4.1) и определения 4 определителя третьего порядка мы приходим к следующей цепочки равенств:

$$|D| = |A, B, C| = \left|\sum_{k=1}^{3} a_k \mathbf{e}_k, B, C\right| = \sum_{k=1}^{3} a_k A_{a_k}, \quad A_{a_k} := |\mathbf{e}_k, B, C|. \tag{4.2}$$

Вычислим определитель A_k для каждого $k = 1, 2, 3$.

□ Действительно, имеем

$$A_{a_1} = |\mathbf{e}_1, B, C| = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{4.3}$$

где мы воспользовались формулой (3.8). Справедлива цепочка равенств

$$A_{a_2} = |\mathbf{e}_2, B, C| = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{4.4}$$

где мы переставили местами первую и вторую строчки определителя и воспользовались результатом леммы 7. Далее, имеем

$$A_{a_3} = |\mathbf{e}_3, B, C| = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & b_3 & c_3 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_3 & c_3 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \tag{4.5}$$

где мы совершили две перестановки строк в определителе. ⊠

Итак, из формул (4.7)–(4.10) вытекает искомая *формула разложения определителя третьего порядка по первому столбцу*:

$$|D| = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

Замечание 5. Давайте обсудим знаки в формуле (4.11) при трёх слагаемых. С этой целью заметим, что знак при определителе второго порядка в формуле (4.8) для A_{a_1} совпадает с выражением $(-1)^{1+1}$, причём элемент a_1 располагается на пересечении 1–й строчки и 1–го столбца в матрице D. Аналогичным образом убеждаемся, что в формуле (4.9) для A_{a_2} знак при определителе второго порядка совпадает с числом $(-1)^{1+2}$, причём элемент a_2 располагается на пересечении первого столбца и второй строчки в матрице D. Наконец, в формуле (4.10) для A_{a_3} знак при определителе второго порядка совпадает с числом $(-1)^{1+3}$, причём элемент a_3 располагается на пересечении первого столбца и третьей строчки.

Формулу (4.11) можно переписать в следующем виде:

$$|D| = \sum_{k=1}^{3} a_k A_{a_k}, \quad A_{a_k} := (-1)^{1+k} M_{a_k}, \tag{4.7}$$

$$M_{a_1} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad M_{a_2} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad M_{a_3} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{4.8}$$

Дадим определение.

Определение 12. *Определитель A_{a_k} называется алгебраическим дополнением элемента a_k первого столбца A матрицы $D = \|A, B, C\|$, а определитель M_{a_k} называется дополнительным минором к элементу a_k.*

Правило вычисления дополнительных миноров. Для того чтобы получить дополнительный минор M_{a_1} элемента нужно из определителя третьего порядка вычеркнуть первый столбец и первую строчку. Собрать в определитель второго порядка оставшиеся элементы в том же порядке и этот определитель второго порядка и будет дополнительным минором. Аналогичным образом для того чтобы получить дополнительный минор M_{a_2} нужно из определителя третьего порядка вычеркнуть первый столбец и вторую строчку, а для того чтобы получить M_{a_3} нужно из определителя второго порядка вычеркнуть первый столбец и третью строчку:

$$M_{a_1}: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$M_{a_2}: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$M_{a_3}: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Получим теперь формулы разложения определителя матрицы $D = \|A, B, C\|$ по второму и третьему столбцу. Сначала получим формулу разложения по второму столбцу.

$$B = \sum_{k=1}^{3} b_k \mathbf{e}_k, \quad |D| = |A, B, C| = \left| A, \sum_{k=1}^{3} b_k \mathbf{e}_k, C \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} b_k B_{b_k}, \quad B_{b_k} = |A, \mathbf{e}_k, C| = -|\mathbf{e}_k, A, C|, \tag{4.9}$$

где последнее равенство получено перестановкой первого и второго столбцов. Справедливы следующие равенства:

$$B_{b_1} = -|\mathbf{e}_1, A, C| = -\begin{vmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{4.10}$$

$$B_{b_2} = -|\mathbf{e}_2, A, C| = -\begin{vmatrix} 0 & a_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{4.11}$$

$$B_{b_3} = -|\mathbf{e}_3, A, C| = -\begin{vmatrix} 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_3 & c_3 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{4.12}$$

Таким образом, из равенств (4.9)–(4.12) приходим к следующей формуле:

$$|D| = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{4.13}$$

Введём дополнительные миноры M_{b_1}, M_{b_2} и M_{b_3} как определители матриц 2×2, полученных из матрицы D вычёркиванием соответствующих строк и столбцов, на пересечении которых располагаются элементы b_1, b_2 и b_3 второго столбца B:

$$M_{b_1}: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$M_{b_2}: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$M_{b_3}: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

По аналогии с определением 12 определители B_{b_1}, B_{b_2} и B_{b_3} назовём *алгебраическими дополнениями* соответствующих элементов второго столбца матрицы D, а определители M_{b_1}, M_{b_2} и M_{b_3} назовём *дополнительными минорами* к соответствующим элементам второго столбца матрицы D. Нетрудно заметить, что имеют место следующие равенства:

$$B_{b_k} = (-1)^{2+k} M_{b_k} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3. \tag{4.14}$$

Наконец, аналогичным образом устанавливаются следующие формулы разложения определителя матрицы D по элементам третьего столбца:

$$C = \sum_{k=1}^{3} c_k \mathbf{e}_k, \quad |D| = |A, B, C| = \sum_{k=1}^{3} c_k C_{c_k}, \tag{4.15}$$

$$C_{c_k} := |A, B, \mathbf{e}_k| = -|A, \mathbf{e}_k, B| = |\mathbf{e}_k, A, B|, \tag{4.16}$$

$$C_{c_1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{4.17}$$

$$C_{c_2} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{4.18}$$

$$C_{c_3} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a_3 & b_3 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_1 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{4.19}$$

$$|D| = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{4.20}$$

По аналогии введём дополнительные миноры M_{c_1}, M_{c_2} и M_{c_3} к соответствующим элементам последнего столбца, как определители матриц 2×2, полученных вычеркиванием столбца и строчки, на пересечении которых расположены соответствующие элементы третьего столбца C:

$$M_{c_1} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{4.21}$$

$$M_{c_2} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{4.22}$$

$$M_{c_3} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{4.23}$$

$$C_{c_k} = (-1)^{3+k} M_{c_k}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{4.24}$$

Определители C_{c_k} называются *алгебраическими дополнениями* к элементам c_k третьего столбца C, а определители M_{c_k} называются *дополнительными минорами* к соответствующим элементам третьего столбца.

Теперь наша задача получить разложение определителя матрицы D по её строчкам. Сначала получим формулу разложения определителя матрицы D по первой строчке. С этой целью воспользуемся равенством

$$|D| = |D^T|, \quad D^T = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{b}_1 & \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{a}_2 & \widetilde{b}_2 & \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{a}_3 & \widetilde{b}_3 & \widetilde{c}_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \widetilde{a}_2 \\ \widetilde{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \widetilde{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Теперь воспользуемся формулой (4.11) разложения определителя по первому столбцу и получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} |D| = |D^T| = \widetilde{a}_1 \begin{vmatrix} \widetilde{b}_2 & \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{b}_3 & \widetilde{c}_3 \end{vmatrix} - \widetilde{a}_2 \begin{vmatrix} \widetilde{b}_1 & \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{b}_3 & \widetilde{c}_3 \end{vmatrix} + \widetilde{a}_3 \begin{vmatrix} \widetilde{b}_1 & \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{b}_2 & \widetilde{c}_2 \end{vmatrix} = \\ = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ = a_1 A_{a_1} + b_1 B_{b_1} + c_1 C_{c_1}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Аналогичным образом получаем из формул (4.13) и (4.20) получаем следующие формулы разложения определителя матрицы D по второй и третьей строчке:

$$|D| = a_2 A_{a_2} + b_2 B_{b_2} + c_2 C_{c_2}, \tag{4.26}$$

$$|D| = a_3 A_{a_3} + b_3 B_{b_3} + c_3 C_{c_3}. \tag{4.27}$$

Ф а л ь ш и в ы е р а з л о ж е н и я о п р е д е л и т е л я. Рассмотрим матрицу 3×3, полученной из матрицы D заменой первого столбца столбцом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \widetilde{D} = \begin{pmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_2 \\ z & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $\widetilde{D}$ мы разложим по первому столбцу и получим следующее равенство:

$$|\widetilde{D}| = x A_{a_1} + y A_{a_2} + z A_{a_3}. \tag{4.28}$$

Отметим, что если

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

то определитель $|\widetilde{D}| = 0$, поскольку у него в этих случаях будут два одинаковых столбца. Отсюда и из (4.28) приходим к следующим равенствам:

$$b_1 A_{a_1} + b_2 A_{a_2} + b_3 A_{a_3} = 0, \quad c_1 A_{a_1} + c_2 A_{a_2} + c_3 A_{a_3} = 0. \tag{4.30}$$

Эти равенства называются *фальшивыми разложениями* определителя. Аналогичным образом можно получить и все оставшиеся фальшивые разложения по столбцам:

$$a_1 B_{b_1} + a_2 B_{b_2} + a_3 B_{b_3} = 0, \quad c_1 B_{b_1} + c_2 B_{b_2} + c_3 B_{b_3} = 0, \tag{4.31}$$

$$a_1 C_{c_1} + a_2 C_{c_2} + a_3 C_{c_3} = 0, \quad b_1 C_{c_1} + b_2 C_{c_2} + b_3 C_{c_3} = 0. \tag{4.32}$$

Кроме того, справедливы следующие фальшивые разложения определителя по строчкам:

$$a_2 A_{a_1} + b_2 B_{b_1} + c_2 C_{c_1} = 0, \quad a_3 A_{a_1} + b_3 B_{b_1} + c_3 C_{c_1} = 0, \tag{4.33}$$

$$a_1 A_{a_2} + b_1 B_{b_2} + c_1 C_{c_2} = 0, \quad a_3 A_{a_2} + b_3 B_{b_2} + c_3 C_{c_2} = 0, \tag{4.34}$$

$$a_1 A_{a_3} + b_1 B_{b_3} + c_1 C_{c_3} = 0, \quad a_2 A_{a_3} + b_2 B_{b_3} + c_2 C_{c_3} = 0. \tag{4.35}$$

Алгебраические дополнения и дополнительные миноры в случае определителя порядка n. Рассмотрим определитель матрицы $D = \|A_1, A_2, \cdots, A_n\|$ размера $n \times n$: $|D| = |A_1, A_2, \cdots, A_n|$. Разложим k-й столбец A_k по базису

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_k = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathbf{e}_j.$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$|D| = \left| A_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathbf{e}_j, \ldots, A_n \right| = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j, \quad \mathcal{A}_k^j := |A_1, \ldots, \mathbf{e}_j, \ldots, A_n|.$$

Теперь вычислим алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_k^j$ элемента a_k^j.

□ Действительно,

$$\mathcal{A}_k^j = |A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & 0 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & 0 & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ a_1^j & \cdots & a_{k-1}^j & 1 & a_{k+1}^j & \cdots & a_n^j \\ a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & 0 & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & 0 & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Теперь многократно переставляя k–й столбец мы получим следующий определитель

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_k^j &= |A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \\
&= (-1)^{k-1}\, |\mathbf{e}_j, A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \\
&= (-1)^{k-1}
\begin{vmatrix}
0 & a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\
1 & a_1^{j} & \cdots & a_{k-1}^{j} & a_{k+1}^{j} & \cdots & a_n^{j} \\
0 & a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n
\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Теперь многократно мы должны переставить j–ую строчку. В результате получим равенство

$$
\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k-1}(-1)^{j-1}
\begin{vmatrix}
1 & a_1^{j} & \cdots & a_{k-1}^{j} & a_{k+1}^{j} & \cdots & a_n^{j} \\
0 & a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\
0 & a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n
\end{vmatrix}.
$$

Теперь мы можем воспользоваться формулой для вычисления блочной матрицы, аналогичной формуле (8), и получить следующую формулу:

$$
\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k+j}\overline{M}_k^j, \tag{4.36}
$$

где символом $\overline{M}_k^j$ мы обозначили *дополнительный минор* к элементу a_k^j. Черта сверху означает, что мы из определителя $\det A$ вычеркнули j–ю строчку и k–й столбец:

$$
\overline{M}_k^j =
\left|\begin{array}{ccc|ccc}
a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\
\hline
a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n
\end{array}\right|.
$$

Минор $\overline{M}_k^j$ — это определитель $(n-1)$–го порядка.
Теорема 1. *Справедливы следующие формулы*:

$$|D| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \overline{M}_k^j a_k^j = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \overline{M}_k^j a_k^j. \tag{4.37}$$

Фальшивое разложение определителя порядка n. Рассмотрим определитель

$$|A_1, \ldots, A_{k-1}, B_p, A_{k+1}, \ldots, A_n|, \tag{4.38}$$

у которого вместо столбца A_k находится столбец B_p, который зададим его разложением по арифметическому базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ следующим образом:

$$B_p = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \mathbf{e}_j. \tag{4.39}$$

После подстановки (4.39) в (4.38) получим равенство

$$|A_1, \ldots, A_{k-1}, B_p, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \\ = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \, |A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \mathcal{A}_k^j, \tag{4.40}$$

где $\mathcal{A}_k^j$ — это алгебраическое дополнение элемента a_k^j матрицы A.

Теперь возьмём в качестве $B_p = A_p$. Тогда если $p \neq k$ мы получим равенство

$$0 = |A_1, \ldots, A_{k-1}, A_p, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} a_p^j \mathcal{A}_k^j,$$

поскольку в определителе два столбца равны в этом случае.

Таким образом, справедлива следующая теорема:
Теорема 2. *Справедливы следующие формулы*:

$$\sum_{j=1}^{n} a_p^j \mathcal{A}_k^j = \begin{cases} |D|, & \textit{если} \quad p = k; \\ 0, & \textit{если} \quad p \neq k. \end{cases} \tag{4.41}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^q \mathcal{A}_k^j = \begin{cases} |D|, & \textit{если} \quad q = j; \\ 0, & \textit{если} \quad q \neq j. \end{cases} \tag{4.42}$$

§ 5. Важные теоремы об определителях

Справедлива следующая:

Теорема 3. *Для того чтобы определитель квадратной матрицы* 3×3

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие числа α, β, γ, *не равные одновременно нулю, что*

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = O, \tag{5.2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 6. Выражение (5.2) эквивалентно следующим равенствам:

$$\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 0, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = 0, \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = 0. \end{cases}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполнено равенство (5.2). Без ограничения общности предположим, что $\alpha \neq 0$, тогда справедливо следующее равенство:

$$A = -\frac{\beta}{\alpha}B - \frac{\gamma}{\alpha}C.$$

Подставим это выражение для определителя, записанного как функция от столбцов матрицы:

$$|D| = |A, B, C| = \left|-\frac{\beta}{\alpha}B - \frac{\gamma}{\alpha}C, B, C\right| = \\ = -\frac{\beta}{\alpha}|B, B, C| - \frac{\gamma}{\alpha}|C, B, C| = 0,$$

поскольку в определителях $|B, B, C|$ и $|C, B, C|$ имеются два одинаковых столбца.

Необходимость. Пусть $|D| = 0$. Рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть $a_1 = b_1 = c_1 = 0$. Докажем, что в этом случае найдутся такие числа α, β, γ, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

$\square$ Действительно, рассмотрим следующее уравнение с неизвестными x, y, z :

$$x\begin{pmatrix}0\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \qquad (5.4)$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$\begin{pmatrix}0\\a_2x+b_2y+c_2z\\a_3x+b_3y+c_3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a_2x+b_2y+c_2z=0,\\a_3x+b_3y+c_3z=0.\end{cases} \qquad (5.5)$$

Поскольку эта система однородных уравнений, в которой число неизвестных больше числа уравнений, то существует нетривиальное решение этой системы уравнений

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \quad \boxtimes$$

Второй случай. Пусть $|a_1|+|b_1|+|c_1|>0$. Без ограничения общности пусть $a_1\neq 0$. В противном случае мы можем переставить местами столбцы. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$0=|D|=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=|A,B,C|=\left|A,B-\frac{b_1}{a_1}A,C-\frac{c_1}{a_1}A\right|. \qquad (5.6)$$

Проведём вычисления.

$$B-\frac{b_1}{a_1}A=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}-\frac{b_1}{a_1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\\dfrac{b_1}{a_1}a_2\\\dfrac{b_1}{a_1}a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b_2-\dfrac{b_1}{a_1}a_2\\b_3-\dfrac{b_1}{a_1}a_3\end{pmatrix}, \qquad (5.7)$$

$$C-\frac{c_1}{a_1}A=\begin{pmatrix}0\\c_2-\dfrac{c_1}{a_1}a_2\\c_3-\dfrac{c_1}{a_1}a_3\end{pmatrix}. \qquad (5.8)$$

Продолжим цепочку равенств (5.6).

$$0 = |D| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 & c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ a_3 & b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 & c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 & c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 & c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{vmatrix} = a_1|D_1, D_2| \Rightarrow |D_1, D_2| = 0, \quad (5.9)$$

поскольку $a_1 \neq 0$, где

$$D_1 = \begin{pmatrix} b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix}.$$

В силу результата леммы 1 этой лекции найдутся такие числа β и γ, не равные одновременно нулю, что

$$\beta D_1 + \gamma D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta\left(b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2\right) + \gamma\left(c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2\right) = 0, \\ \beta\left(b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3\right) + \gamma\left(c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3\right) = 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Но тогда будет выполнено следующее равенство тоже

$$\beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Заметим, что

$$\beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix} = \beta\left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \frac{b_1}{a_1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right] = \beta\left[B - \frac{b_1}{a_1}A\right], \quad (5.12)$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix} = \gamma\left[C - \frac{c_1}{a_1}A\right]. \quad (5.13)$$

Таким образом, в силу равенств (5.11)–(5.13) вытекает следующее равенство:

$$\beta\left[B - \frac{b_1}{a_1}A\right] + \gamma\left[C - \frac{c_1}{a_1}A\right] = O, \quad (5.14)$$

из которого вытекает равенство

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = O, \quad \alpha = -\frac{b_1}{a_1}\beta - \frac{c_1}{a_1}\gamma, \tag{5.15}$$

причём $|\beta| + |\gamma| > 0$ и тем более $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0$.

Теорема доказана.

Важным следствием этой теоремы является следующая:

Лемма 9. *Для того чтобы однородная система уравнений $DX = O$ имело нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы $|D| = 0$.*

Доказательство.

В силу результата леммы 3 необходимое и достаточное условие существования нетривиального решения у однородной системы уравнений — это линейная зависимость столбцов матрицы $D = \|A, B, C\|$, что в силу теоремы 3 эквивалентно равенству $|D| = 0$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая:

Теорема 4. *Если $A = \|A_1, A_2, A_3\|$ и $B = \|B_1, B_2, B_3\|$ — две квадратные матрицы размера 3×3, то $|AB| = |A||B|$.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы нам удобно использовать два индекса в формуле (2.55) полного развертывания определителя. Итак, пусть

$$A = \|A_1, A_2, A_3\| \quad \text{и} \quad B = \|B_1, B_2, B_3\|,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \\ b_1^3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_2^1 \\ b_2^2 \\ b_2^3 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} b_3^1 \\ b_3^2 \\ b_3^3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $C := AB$, тогда согласно известному результату первой лекции имеем

$$C = \|C_1, C_2, C_3\|, \quad C_k = AB_k = \sum_{\sigma_k=1}^{3} A_{\sigma_k} b_k^{\sigma_k} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3. \tag{5.16}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$|C| = |C_1, C_2, C_3| = \left| \sum_{\sigma_1=1}^{3} A_{\sigma_1} b_1^{\sigma_1}, \sum_{\sigma_2=1}^{3} A_{\sigma_2} b_2^{\sigma_2}, \sum_{\sigma_3=1}^{3} A_{\sigma_3} b_3^{\sigma_3} \right| =$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^{3} \sum_{\sigma_2=1}^{3} \sum_{\sigma_3=1}^{3} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} b_3^{\sigma_3} \left| A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3} \right|. \tag{5.17}$$

При выводе этого равенства мы воспользовались полилинейностью определителя, а в силу кососимметричности определителя имеем

$$|A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3}| = 0 \quad \text{для всех} \quad \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \tag{5.18}$$

с повторениями, поскольку тогда в этом определителе будет по меньшей мере два одинаковых столбца. Следовательно, точно также как и при выводе формулы полного развёртывания определителя из (5.17) приходим к следующей формуле:

$$|C| = |C_1, C_2, C_3| = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\sigma_3\}\in S_3} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} b_3^{\sigma_3} \, |A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3}| \,. \tag{5.19}$$

Точно также как при доказательстве формулы (2.41) приходим к равенству

$$|A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3}| = \operatorname{sign} \widehat{\sigma} \, |A_1, A_2, A_3| \,. \tag{5.20}$$

Следовательно, из формул (5.19) и (5.20) вытекает следующая цепочка равенств:

$$|C| = |C_1, C_2, C_3| = \\ = |A_1, A_2, A_3| \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\sigma_3\}\in S_3} \operatorname{sign} \widehat{\sigma} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} b_3^{\sigma_3} = |A||B|. \tag{5.21}$$

Теорема доказана.

§ 6. Обратная матрица

Справедлива следующая:

Теорема 5. *Квадратная матрица D размера 3×3 обратима, тогда и только тогда, когда $|D| \neq 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть матрица D обратима и D^{-1} — обратная. Тогда имеет место следующее равенство:

$$DD^{-1} = I_3 \Rightarrow |D||D^{-1}| = |I_3| = 1 \Rightarrow |D| \neq 0. \tag{6.1}$$

Достаточность. Пусть $|D| \neq 0$ и матрица D имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow D^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Рассмотрим матрицу $D^\vee$, составленную из соответствующих алгебраических дополнений к элементам матрицы D^T :

$$D^\vee = \begin{pmatrix} A_{a_1} & A_{a_2} & A_{a_3} \\ B_{b_1} & B_{b_2} & B_{b_3} \\ C_{c_1} & C_{c_2} & C_{c_3} \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Докажем, что справедливы следующие равенства:

$$DD^\vee = D^\vee D = |D| I_3. \tag{6.4}$$

□ Действительно, докажем, например, равенство $DD^{\vee} = |D|I_3$. В силу (4.7), (4.9), (4.15), (4.25)–(4.27), (4.30)–(4.35) справедливы следующие равенства:

$$\begin{gathered}
\{DD^{\vee}\}^1_1 = a_1 A_{a_1} + b_1 B_{b_1} + c_1 C_{c_1} = |D|,\\
\{DD^{\vee}\}^1_2 = a_1 A_{a_2} + b_1 B_{b_2} + c_1 C_{c_2} = 0,\\
\{DD^{\vee}\}^1_3 = a_1 A_{a_3} + b_1 B_{b_3} + c_1 C_{c_3} = 0,\\
\{DD^{\vee}\}^2_1 = a_2 A_{a_1} + b_2 B_{b_1} + c_2 C_{c_1} = 0,\\
\{DD^{\vee}\}^2_2 = a_2 A_{a_2} + b_2 B_{b_2} + c_2 C_{c_2} = |D|,\\
\{DD^{\vee}\}^2_3 = a_2 A_{a_3} + b_2 B_{b_3} + c_2 C_{c_3} = 0,\\
\{DD^{\vee}\}^3_1 = a_3 A_{a_1} + b_3 B_{b_1} + c_3 C_{c_1} = 0,\\
\{DD^{\vee}\}^3_2 = a_3 A_{a_2} + b_3 B_{b_2} + c_3 C_{c_2} = 0,\\
\{DD^{\vee}\}^3_3 = a_3 A_{a_3} + b_3 B_{b_3} + c_3 C_{c_3} = |D|. \quad \boxtimes
\end{gathered}$$

Итак, если $|D| \neq 0$, то обратная матрица существует и имеет следующий вид:

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} D^{\vee} \Rightarrow |D^{\vee}| = |D|^2.$$

Теорема доказана.

Формулы Крамера. Справедлива следующая важная теорема, которая носит название формулы Крамера вычисления решения системы трёх уравнений относительно трёх переменных:

Теорема 6. *Если определитель*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{6.5}$$

то система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3, \end{cases} \tag{6.6}$$

имеет единственное решение этой системы уравнений, которое имеет следующий вид:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \tag{6.7}$$

Доказательство.

Сейчас ограничимся доказательством единственности. Именно,докажем, что если решение существует, то оно даётся указанными формулами. Запишем систему уравнений (6.6) в следующем эквивалентном виде:

$$xA + yB + zC = d, \quad D = \|A, B, C\|, \tag{6.8}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} |d, B, C| &= |xA + yB + zC, B, C| = \\ &= x\,|A, B, C| + y\,|B, B, C| + z\,|C, B, C| = x\,|A, B, C|\,, \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned} |A, d, C| &= |A, xA + yB + zC, C| = \\ &= x|A, A, C| + y|A, B, C| + z|A, C, C| = y|A, B, C|, \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} |A, B, d| &= |A, B, xA + yB + zC| = \\ &= x|A, B, A| + y|A, B, B| + z|A, B, C| = z|A, B, C|. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Поскольку при $|D| \neq 0$ решение рассматриваемой системы уравнений существует, а значит имеет вид (6.7).

Теорема доказана.

§ 7. Необходимые и достаточные условия коллинеарности и компланарности векторов

Справедлива следующая важная:

Теорема 7. *Для того чтобы два вектора* $\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ *и* $\mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, *заданные координатами относительно общей декартовой системе координат в пространстве* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, *были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены равенства*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.1}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны. Тогда они линейно зависимы и поэтому найдутся такие числа α_1 и α_2, что выполнено равенство

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0, \tag{7.2}$$

которое в координатах можно переписать в следующем виде:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\mathbf{e}_2 + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \tag{7.3}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис, то из (7.3) вытекают следующие равенства:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0, \tag{7.4}$$

которые можно переписать в виде равенств для столбцов

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} z_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Но тогда из леммы 1 вытекает, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.8}$$

Осталось воспользоваться равенством $|D^T| = |D|$.

Достаточность. Пусть выполнены равенства (7.1). Если все числа $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, то вектор $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ и поэтому коллинеарен любому вектору, в частности, вектору $\mathbf{a}_2$. Пусть теперь хотя бы одно число из трёх отлично от нуля. Пусть, например, $x_1 \neq 0$. Тогда имеем

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y_2 = \frac{x_2}{x_1} y_1 \Leftrightarrow \lambda := \frac{x_2}{x_1}, \quad x_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda y_1. \tag{7.9}$$

Кроме того,

$$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_2 x_1 = z_1 x_2 \Leftrightarrow z_2 = \lambda z_1. \tag{7.10}$$

Итак, имеем

$$\mathbf{a}_2 = x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + z_2 \mathbf{e}_3 = \lambda (x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3) = \lambda \mathbf{a}_1. \tag{7.11}$$

Значит, векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны.

Теорема доказана.

Справедливо следующее важное следствие:

Лемма 10. *Для того чтобы два вектора $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ на плоскости, заданные координатами $\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2\}$ относительно общей декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ на плоскости, были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.12}$$

Доказательство. Рассмотрим общую декартову систему координат в пространстве $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$, где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к рассматриваемой плоскости. Векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ имеют координаты

$$\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1, 0\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2, 0\}.$$

Осталось теперь применить результат теоремы 7 при $z_1 = z_2 = 0$ и получить утверждение леммы.

Лемма доказана.

Справедлива следующая:

Теорема 8. *Для того чтобы три вектора* $\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\mathbf{a}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$, *заданные своими координатами относительно общей декартовой системы координат в пространстве* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.13}$$

Доказательство.

Как нами было ранее доказано, три вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ компланарны, тогда и только тогда, когда найдутся такие числа α_1, α_2 и α_3, что

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0. \tag{7.14}$$

Из (7.14) вытекает следующее равенство:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\mathbf{e}_1 + \\ + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3)\mathbf{e}_2 + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \tag{7.15}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис, то из (7.15) вытекают следующие равенства:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \\ = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0, \tag{7.16}$$

которые можно переписать в виде столбцов

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0. \tag{7.17}$$

Из результата теоремы 3 вытекает, что равенство (7.17) эквивалентно равенству

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Осталось воспользоваться равенством $|D^T| = |D|$.

Лемма доказана.

Лекция 8

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Различные уравнения прямой на плоскости

Определение 1. *Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой.*

Пусть O — это некоторая фиксированная точка плоскости, точка M_0 с радиус–вектором $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ лежит на данной прямой с направляющим вектором $\mathbf{a}$. Нетрудно заметить, что точка M с радиус–вектором $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ лежит на этой прямой, тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, т. е. найдётся такое число t, что имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}, \tag{1.1}$$

а поскольку $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

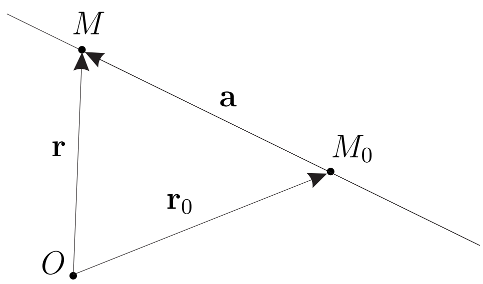

Рис. 46. Векторное уравнение прямой.

Определение 2. *Уравнение* (1.2) *называется векторным параметрическим уравнением прямой.*

Пусть на плоскости задан произвольный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Пусть все введённые векторы заданы своими разложениями по базису:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2. \tag{1.3}$$

После подстановки равенств (1.3) в (1.2) получим следующее уравнение:

$$(x - x_0 - lt)\mathbf{e}_1 + (y - y_0 - mt)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \tag{1.4}$$

а поскольку $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — это базис, то приходим к следующим равенствам:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Эти равенства можно записать в виде одного равенства

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *В общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *на плоскости уравнения прямой* (1.5) *эквивалентно равенству*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & l \\ y - y_0 & m \end{vmatrix} = 0. \tag{1.7}$$

Доказательство.

Из уравнений (1.5), записанных в виде одного равенства (1.6), вытекает равенство (1.7). Обратно, если выполнено равенство (1.7), то в силу результата леммы 1 шестой лекции найдутся такие числа α, β, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\alpha = 0$, то $\beta \neq 0$ и имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда направляющий вектор $\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ — это противоречит определению 1 направляющего вектора. Следовательно, $\alpha \neq 0$ и мы приходим к равенству (1.6), которое равносильно равенствам (1.5).

Теорема доказана.

Из равенства (1.7) вытекает следующее уравнение:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad \text{если} \quad l \neq 0, \quad m \neq 0. \tag{1.8}$$

Замечание 1. Заметим, что одновременно числа l и m в ноль обращаться не могут. Если $l = 0$, то из равенства (1.7) получим $x = x_0$, если же $m = 0$, то получим $y = y_0$. Уравнения $x = x_0$ и y_0 — это уравнения прямых, проходящих через точки $(x_0, 0)$ и $(0, y_0)$, и параллельных оси Oy и Ox соответственно. При этом мы распространим равенства (1.8) и на эти два случая:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \tag{1.9}$$

где если знаменатель равен нулю, то и числитель тоже равен нулю.

Определение 3. *Уравнения* (1.7) *и* (1.9) *называются каноническими уравнениями прямой на плоскости.*

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *В общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *канонические уравнения прямой могут быть записаны следующим образом*:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0. \tag{1.10}$$

Доказательство.

Из уравнения (1.7) вытекает равенство

$$m(x - x_0) = l(y - y_0) \Leftrightarrow mx - ly - mx_0 + ly_0 = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C + 0,$$

где

$$A = m, \quad B = -l, \quad C = -mx_0 + ly_0, \quad A^2 + B^2 > 0.$$

Обратно пусть задано уравнение (1.10) и поскольку $A^2 + B^2 > 0$, то существует такая точка $M_0(x_0, y_0)$, что

$$Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

но тогда

$$C = -Ax_0 - By_0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & -B \\ y - y_0 & A \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. имеет место равенство (1.7) при $l = -B$, $m = A$. В частности, одним из направляющих векторов прямой является вектор

$$\mathbf{a} = -B\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2. \tag{1.11}$$

Теорема доказана.

Определение 4. *Уравнение* (1.10) *называется общим уравнением прямой на плоскости.*

Замечание 2. Числа A и B не могут одновременно обращаться в ноль.

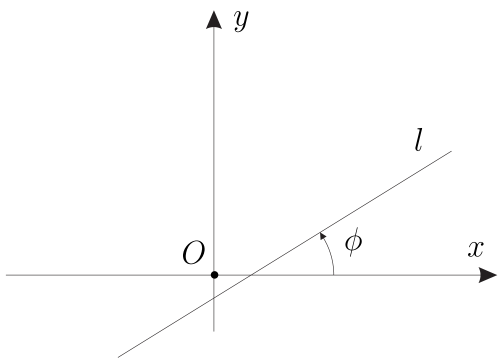

Рис. 47. Уравнение прямой.

Если $B \neq 0$, то из общего уравнения прямой в прямоугольной декартовой системе координат можно получить уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b, \quad k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}. \tag{1.12}$$

Можно доказать, что $k = \tan\varphi$, где $\varphi \in [0, 2\pi)$ — это угол между осью Ox и направляющим вектором прямой $\mathbf{a}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

§ 2. Направляющий вектор прямой

Пусть прямая задана своим общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0, \tag{2.1}$$

в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, то как мы выяснили в процессе доказательства теоремы 2 в силу теоремы 1 вектор $\mathbf{a} = -B\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2$ является одним из направляющих векторов прямой (см. формулу 1.11). Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Для того чтобы вектор $\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2$ был коллинеарен прямой, заданной уравнением*

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0$$

в общей декартовой системе координат, необходимо и достаточно, чтобы

$$Al + Bm = 0. \tag{2.2}$$

Доказательство.

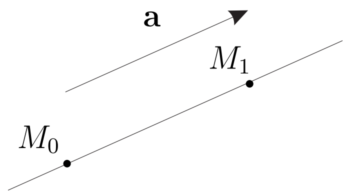

Рис. 48. К теореме 3.

Отложим вектор $\mathbf{a} = \{l, m\}$ от точки $M_0 = (x_0, y_0)$ данной прямой; конец полученного направленного отрезка имеет координаты $M_1 = (x_0 + l, y_0 + m)$.

□ Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{OM_1},$$

$$\overrightarrow{OM_0} = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{M_0M_1} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2,$$

тогда

$$\overrightarrow{OM_1} = (x_0 + l)\mathbf{e}_1 + (y_0 + m)\mathbf{e}_2 = \{x_0 + l, y_0 + m\}. \quad \boxtimes$$

Вектор $\mathbf{a}$ коллинеарен прямой, тогда и только тогда, когда точка M_1 принадлежит прямой, т. е.

$$A(x_0 + l) + B(y_0 + m) + C = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Al + Bm + Ax_0 + By_0 + C = 0 \Leftrightarrow Al + Bm = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Если рассматриваемая декартова система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ является прямоугольной, то вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$ ортогонален направляющему вектору $\mathbf{a} = \{l, m\}$:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = Al + Bm = 0.$$

Докажем, что вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$ в прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ является вектором нормали к прямой.

$\square$ Действительно, пусть прямая задана своим общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0,$$

в котором $M = (x, y)$ — это координаты точки M, лежащей на прямой. Поскольку $A^2 + B^2 > 0$, то существует точка $M_0 = (x_0, y_0)$ такая, что

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Тогда приходим к равенству

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0,$$

но точки M и M_0 лежат на прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен прямой, но тогда из последнего равенства вытекает, что вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярен прямой. $\boxtimes$

Замечание 4. В общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$, вообще говоря, не будет нормалью к прямой.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, заданных в общей декартовой системе координат, имеет один из следующих видов*:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{2.5}$$

Доказательство.

В качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ возьмём точку $M_1(x_1, y_1)$, а в качестве направляющего вектора $\mathbf{a}$ искомой прямой возьмём вектор

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2, \quad l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1.$$

Тогда уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющую направляющий вектор $\mathbf{a}$ примет следующий вид (см. формулы (1.5)):

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t.$$

Далее нужно переписать равенства (1.7) и (1.9) для данного случая. Кроме того, нужно воспользоваться свойством определителя квадратной матрицы.

Теорема доказана.

§ 3. Частные случаи расположения прямой

Пусть уравнение прямой в общей декартовой системе координат задано своим общим уравнением:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0. \tag{3.1}$$

Сделаем следующие наблюдения:

Наблюдение 1. Прямая $Ax + By + C = 0$ параллельна оси Ox тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\mathbf{a} = \{-B, A\}$ коллинеарен оси Ox, т. е. когда $A = 0$.

Наблюдение 2. Прямая $Ax + By + C = 0$ параллельна оси Oy тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\mathbf{a} = \{-B, A\}$ коллинеарен оси Oy, т. е. когда $B = 0$.

Наблюдение 3. Прямая $Ax + By + C = 0$ проходит через начало координат, тогда и только тогда, когда $C = 0$.

§ 4. Взаимное расположения двух прямых

Пусть две прямые заданы своими общими уравнениями в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$l_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \tag{4.1}$$

где $A_1^2 + B_1^2 > 0$ и $A_2^2 + B_2^2 > 0$. Введём направляющие векторы этих прямых (см. формулу (1.11)):

$$\mathbf{a}_1 = (-B_1)\mathbf{e}_1 + A_1\mathbf{e}_2 = \{-B_1, A_1\}, \quad \mathbf{a}_2 = (-B_2)\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 = \{-B_2, A_2\}.$$

Наблюдение 1. Прямые l_1 и l_2 пересекаются, тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

□ Действительно, как мы доказали ранее векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы, т. е. найдутся такие числа α и β, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha(-B_1) + \beta(-B_2))\mathbf{e}_1 + (\alpha A_1 + \beta A_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0},$$

а поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ линейно независимое семейство, то

$$\alpha(-B_1) + \beta(-B_2) = 0, \quad \alpha A_1 + \beta A_2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а поскольку числа α и β не равны одновременно нулю приходим к следующему необходимому и достаточному условию коллинеарности векторов

$$\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

По условию векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ неколлинеарны, поэтому

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad \boxtimes$$

Наблюдение 2. Прямые l_1 и l_2 параллельны или совпадают, тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны, т. е. если

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.2}$$

Заметим, что

$$0 = \begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_2 & A_1 \\ B_2 & B_1 \end{vmatrix}. \tag{4.3}$$

Воспользуемся результатом леммы 1 шестой лекции и получим, что существуют такие числа α и β, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0. \tag{4.4}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \neq 0$. Тогда из (4.4) вытекают следующие два равенства:

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad \lambda = -\frac{\beta}{\alpha}. \tag{4.5}$$

Теперь нам нужно рассмотреть систему уравнений (4.6), которая с учётом (4.5) примет следующий вид:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \lambda(A_1x + B_1y) + C_2 = 0. \tag{4.6}$$

Эта система уравнений не имеет решений, тогда и только тогда, когда $C_2 \neq \lambda C_1$ и имеет бесконечно много решений, тогда и только тогда, когда $C_2 = \lambda C_1$. Итак, если

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 \neq \lambda C_1, \tag{4.7}$$

то прямы параллельны, но не совпадают, а если

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1, \tag{4.8}$$

то прямые совпадают.

§ 5. Полуплоскости, определяемые прямой

Справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть в общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *прямая линия задана общим уравнением*:

$$Ax + By + C = 0.$$

Тогда для координат x, y *всех точек* $M(x, y)$, *лежащих по одну сторону от прямой*, *выполняется неравенство*

$$Ax + By + C > 0,$$

а для координат x, y *всех точек* $M(x, y)$, *лежащих по другую сторону от прямой*, *выполняется неравенство*

$$Ax + By + C < 0.$$

Доказательство.

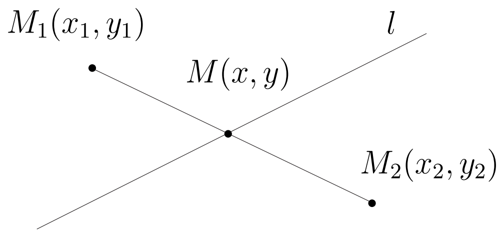

Рис. 49. К теореме 5.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — это две произвольные точки, лежащие по разные стороны от прямой l, заданной общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0,$$

в общей декартовой системе координат. Это означает, что существует внутренняя точка $M(x, y)$ отрезка M_1M_2, лежащая на прямой l. Тогда найдётся такое $\lambda > 0$, что справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}, \tag{5.1}$$

поскольку направленные отрезки $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ коллинеарны и сонаправлены. Запишем равенство (5.1) в координатах:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \tag{5.2}$$

Из (5.2) вытекают следующие равенства:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Точка $M(x, y) \in l$, поэтому имеет место следующее равенство:

$$A\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} + B\frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} + C = 0,$$

из которого вытекает равенство

$$0 < \lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} \Rightarrow (Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0.$$

Сначала фиксируем точку $M_1(x_1, y_1)$, а точку $M_2(x_2, y_2)$ будем менять, оставаясь в заданной полуплоскости. Ясно, что знак выражения $Ax_2 + By_2 + C$ будет оставаться неизменным. Теперь зафиксируем точку $M_2(x_2, y_2)$, а точку $M_1(x_2, y_2)$ будем менять, оставаясь в заданной полуплоскости. Ясно, что знак выражения $Ax_1 + By_1 + C$ будет тоже оставаться неизменным.

Следовательно, одна полуплоскость задаётся неравенством $Ax + By + C > 0$, а другая полуплоскость — уравнением $Ax + By + C < 0$.

Теорема доказана.

Справедлива ещё одна теорема в этом направлении.

Теорема 6. *Пусть прямая l задана общим уравнением*

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 = B^2 > 0$$

в общей декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Если от произвольной точки $M_0(x_0, y_0)$ прямой l отложить вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$, то конец $M_1(x_1, y_1)$ полученного направленного отрезка $\overrightarrow{M_0M_1}$ будет лежать в полуплоскости, определяемой неравенством:

$$Ax_1 + By_1 + C > 0.$$

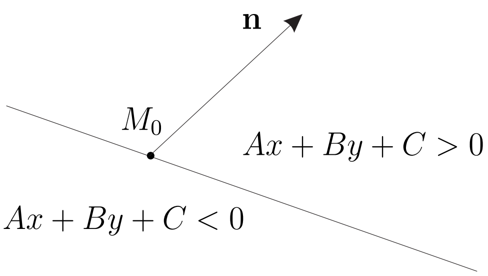

Рис. 50. К теореме 6.

Доказательство.

Согласно условию теоремы имеем

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M_1} = \\ = \mathbf{r}_0 + \mathbf{n} = (x_0 + A)\mathbf{e}_1 + (y_0 + B)\mathbf{e}_2 = \{x_0 + A, y_0 + B\}.$$

Далее

$$M_1(x_1, y_1), \quad x_1 = x_0 + A, \quad y_1 = y_0 + B \Rightarrow \\ \Rightarrow Ax_1 + By_1 + C = Ax_0 + By_0 + C + A^2 + B^2 = A^2 + B^2 > 0.$$

Теорема доказана.

Наблюдение. Можно сделать более общее наблюдение в направлении этой теоремы. Пусть относительно общей декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ задан произвольный вектор $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$ и задано общее уравнение прямой

$$l: \quad Ax + By + C = 0.$$

Пусть произвольная точка $M_0(x_0, y_0) \in l$. Тогда отложим от этой точки вектор $\mathbf{b}$ и в результате получим направленный отрезок $\overrightarrow{M_0M_1}$, где

$$M_1(x_1, y_1), \quad x_1 = x_0 + b_1, \quad y_1 = y_0 + b_2.$$

Справедлива цепочка равенств

$$Ax_1 + By_1 + C = Ax_0 + By_0 + C + Ab_1 + Bb_2 = Ab_1 + Bb_2.$$

Если $Ab_1 + Bb_2 > 0$, то вектор $\mathbf{b}$ направлен в сторону «положительной» полуплоскости $Ax + By + C > 0$, а если $Ab_1 + Bb_2 < 0$, то $\mathbf{b}$ направлен в сторону «отрицательной» полуплоскости $Ax + By + C < 0$.

§ 6. Нормальное уравнение прямой

Справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 7. *В произвольной общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *общее уравнение прямой*

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0 \tag{6.1}$$

эквивалентно нормальному уравнение прямой:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + C = 0, \tag{6.2}$$

где вектор $\mathbf{n}$ *однозначно определяется упорядоченной двойкой* A, B.

Доказательство. Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — общая декартова система координат на плоскости π, в которой задано общее уравнение прямой

(6.1) на плоскости π в пространстве и $\mathbf{e}_3$ — это произвольный вектор нормали к плоскости π. Введём следующий вектор

$$\mathbf{n} = \frac{A[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + B[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \tag{6.3}$$

Заметим, что

$$(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = A, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) = B.$$

В силу линейности скалярного произведения имеем

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1)x + (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2)y + C = 0 \Rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{r}) + C = 0,$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$.

Обратно, пусть задано уравнение (6.2), тогда в силу линейности скалярного произведения из этого уравнения вытекает уравнение (6.1), в котором

$$A = (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1), \quad B = (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2).$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 8. *Пусть на плоскости даны точка $M_1(\mathbf{r}_1)$ и прямая, заданная уравнением $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + C = 0$. Тогда*

1. *радиус–вектор $\mathbf{r}_2$ точки M_2, являющейся ортогональной проекцией точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ на прямую l, выражается формулой*

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}; \tag{6.4}$$

2. *расстояние от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до прямой l выражается формулой*

$$d(M_1, l) = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C|}{|\mathbf{n}|}; \tag{6.5}$$

3. *Радиус вектор $\mathbf{r}_3$ точки M_3, симметричной точке $M_1(\mathbf{r}_1)$ относительно прямой l, выражается формулой*

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 - 2\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}. \tag{6.6}$$

Доказательство.

Пункт 1. Имеет место равенство

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \lambda\mathbf{n} \tag{6.7}$$

при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$(\mathbf{r}_2, \mathbf{n}) + C = 0,$$

поэтому умножим скалярно на $\mathbf{n}$ обе части равенства (6.7) и получим равенство

$$-C - (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = \lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \Rightarrow \lambda = -\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}. \tag{6.8}$$

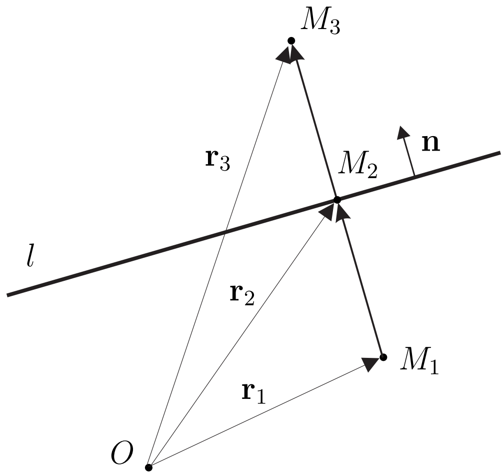

Рис. 51. К теореме 8.

Из (6.7) и (6.8) получим искомое равенство

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}. \tag{6.9}$$

Пункт 2. Из формул (6.7) и (6.9) получим цепочку равенств

$$d(M_1, l) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \left|\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}\right| = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C|}{|\mathbf{n}|}.$$

Пункт 3. Действительно,

$$\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_3} = \mathbf{r}_1 + 2\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_1 - 2\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}.$$

Теорема доказана.

Наконец, дадим определение нормированного уравнения прямой в декартовой прямоугольной системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$:

Определение 5. *Нормированным уравнением прямой называется уравнение следующего вида*:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - p = 0, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad p \geqslant 0. \tag{6.10}$$

Пусть $p > 0$. Перепишем нормированное уравнение (6.10) в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \quad A = (\mathbf{n}, \mathbf{i}), \quad B = (\mathbf{n}, \mathbf{j}), \quad C = -p < 0.$$

Поскольку $C < 0$, то начало координат $O = (0, 0)$ лежит в отрицательной полуплоскости

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C < 0.$$

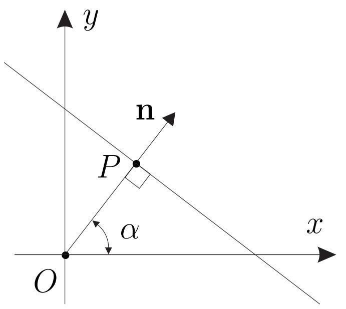

Рис. 52. Нормированное уравнение прямой.

Опустим из начала координат перпендикуляр к прямой. Обозначим через P основание перпендикуляра. Заметим, что вектор нормали $\mathbf{n} = \{A, B\}$ к прямой направлен в сторону положительной полуплоскости

$$Ax + By + C > 0.$$

Но тогда направленный отрезок $\overrightarrow{OP}$ и вектор $\mathbf{n}$ не только коллинеарны но и сонаправлены. Пусть $\alpha \in [0, \pi]$ — угол между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{i}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \cos\alpha, \tag{6.11}$$

$$(\mathbf{n}, \mathbf{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \text{если} \quad (\mathbf{n}, \mathbf{j}) > 0, \tag{6.12}$$

$$(\mathbf{n}, \mathbf{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha, \quad \text{если} \quad (\mathbf{n}, \mathbf{j}) < 0. \tag{6.13}$$

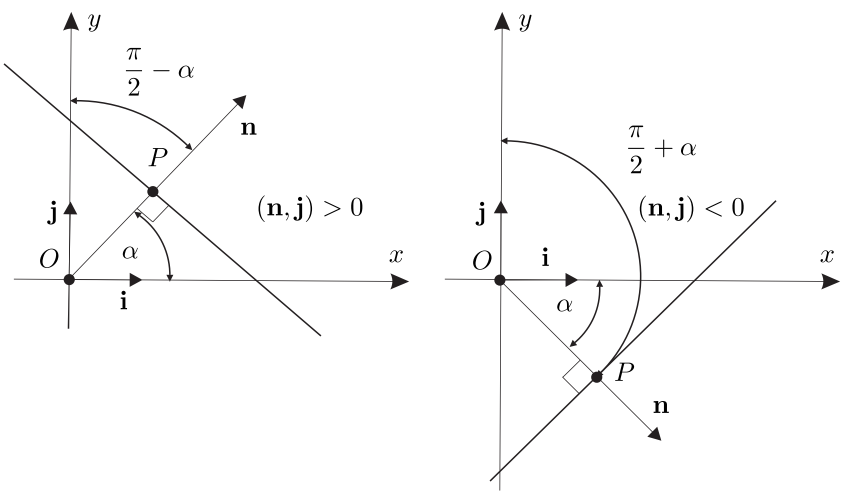

Рис. 53. К выводу нормального уравнения прямой.

Теперь наша задача записать формулы (6.12) и (6.13) единообразно. С этой целью введём угол $\vartheta \in [0, 2\pi)$ между вектором $\mathbf{n}$ и осью Ox, отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox. Тогда

$$\alpha = \vartheta, \quad \text{если} \quad (\mathbf{n}, \mathbf{j}) > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \cos\vartheta, \quad \sin\alpha = \sin\vartheta, \tag{6.14}$$

$$\alpha = 2\pi - \vartheta, \quad \text{если} \quad (\mathbf{n}, \mathbf{j}) < 0 \Rightarrow \cos\alpha = \cos\vartheta, \quad \sin\alpha = -\sin\vartheta. \tag{6.15}$$

Следовательно, из равенств (6.11)–(6.15) имеем

$$(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \cos\vartheta, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{j}) = \sin\vartheta. \tag{6.16}$$

Итак, из уравнения (6.10) получаем равенства:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{i})x + (\mathbf{n}, \mathbf{j})y - p = 0, \tag{6.17}$$

из которого и из равенств (6.16) приходим к следующему равенству:

$$x\cos\vartheta + y\sin\vartheta - p = 0, \quad p \geqslant 0, \tag{6.18}$$

где $\vartheta \in [0, 2\pi)$ — угол между вектором $\mathbf{n}$ и осью Ox, отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox. Причём из формулы (7.2) вытекает, что параметр p равен расстоянию от начало координат, до прямой, заданной уравнением (6.18).

Лекция 9

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Различные уравнения прямой в пространстве

Уравнение прямой в векторной параметрической форме было получено нами в предыдущей лекции:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t. \tag{1.1}$$

Пусть в пространстве фиксирована общая декартова система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и справедливы следующие разложения векторов по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

Из равенств (1.1)–(1.3) вытекает следующее равенство:

$$(x - x_0 - lt)\mathbf{e}_1 + (y - y_0 - mt)\mathbf{e}_2 + (z - z_0 - nt)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}, \tag{1.4}$$

которое эквивалентно следующим трём равенствам:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt, \quad l^2 + m^2 + n^2 > 0. \tag{1.5}$$

Определение 1. *Уравнения* (1.5) *называются параметрическими уравнениями прямой в пространстве.*

Из уравнений (1.5) вытекает следующее уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \tag{1.6}$$

причём если в этом равенстве знаменатель обращается в ноль, то и числитель тоже обращается в ноль. При этом все знаменатели в ноль обратится не могут, так как тогда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. А вот два знаменателя в ноль могут обратиться. Предположим, что это числа $l = m = 0$ и $n \neq 0$. Тогда

$$x = x_0, \quad y = y_0.$$

Уравнения $x = x_0$ и $y = y_0$ определяют две пересекающиеся по прямой плоскости в пространстве.

Определение 2. *Уравнение* (1.6) *называется каноническим уравнением прямой в пространстве.*

Справедливо следующее важное утверждение:
Теорема 1. *Уравнение прямой* (1.1) *эквивалентно уравнению*

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{m}, \quad (\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0. \tag{1.7}$$

Доказательство.

Пусть нам задано векторное параметрическое уравнение прямой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t \Leftrightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a} \Rightarrow [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0} \Leftrightarrow [\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}],$$

причём $(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0$.

Пусть теперь нам задано уравнение (1.7) при указанном условии, что $(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0$. Пусть

$$\mathbf{r}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{m}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}[[\mathbf{a}, \mathbf{m}], \mathbf{a}] = -\frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{m}]] =$$
$$= -\frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\{\mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{m}) - \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{a})\} = \mathbf{m},$$

поскольку по условию $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = 0$. Тогда уравнение (1.7) эквивалентно следующему уравнению:

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \Leftrightarrow [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0}.$$

Из последнего равенства вытекает, что векторы $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, т. е. линейно зависимы. Следовательно, найдутся такие числа α и β, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, что

$$\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \beta\mathbf{a} = \mathbf{0}. \tag{1.8}$$

Докажем, что $\alpha \neq 0$.

□ Действительно, в противном случае из (1.8) получаем равенство $\beta\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\beta \neq 0$. Следовательно, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, но вектор $\mathbf{a}$ является направляющим вектором прямой и поэтому $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Следовательно, $\alpha \neq 0$. ⊠

Итак, из (1.8) приходим к следующему равенству:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}, \quad t = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Для того чтобы уравнение*

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{m} \tag{1.9}$$

имело решение $\mathbf{r}$, *необходимо и достаточно*, *чтобы было выполнено равенство* $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = 0$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть уравнение (1.9) имеет решение $\mathbf{r}_0$, т. е. имеет место равенство $[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{m}$. Тогда по свойству векторного произведения векторов $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$ вектор

$$[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \perp \mathbf{r}_0 \quad \text{и} \quad [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \perp \mathbf{a}.$$

Но тогда

$$([\mathbf{r}_0, \mathbf{a}], \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0.$$

Достаточность. Пусть выполнено условие $(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0$. Тогда как было доказано в теореме 1 уравнение (1.9) имеет решение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 := \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{m}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Следствие доказано.

§ 2. Различные уравнения плоскости в пространстве

Дадим вывод векторного параметрического уравнения плоскости. Пусть π — это некоторая плоскость в пространстве. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — это два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости. Пусть O — это произвольная точка пространства и нам заданы радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ фиксированной точки $M_0 \in \pi$ и радиус-вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки $M \in \pi$. Очевидно, что $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — это базис на плоскости и поэтому найдутся такие числа t, s, что

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a} + s\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}. \tag{2.1}$$

Заметим, что если точка M не лежит на плоскости π, то тройка векторов $\{\overrightarrow{M_0M}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ является не компланарной тройкой векторов и поэтому вектор $\overrightarrow{M_0M}$ разложить по базису на плоскости $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ нельзя, т. е. в этом случае равенство (2.1) не имеет место. Таким образом, векторное равенство (2.1) является необходимым и достаточным условием того, чтобы точка $M(\mathbf{r})$ лежала на плоскости π.

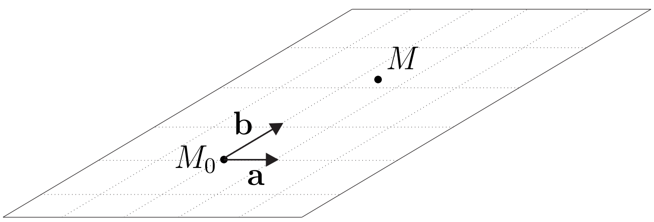

Рис. 54. Плоскость.

Определение 3. *Уравнение* (2.1) *называется векторным параметрическим уравнением плоскости в пространстве.*

Пусть в пространстве задана общая декартова система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть радиус–векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ точек M и M_0 заданы своими разложениями по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3. \tag{2.2}$$

И заданы направляющие векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ плоскости π :

$$\mathbf{a} = l_1\mathbf{e}_1 + m_1\mathbf{e}_2 + n_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = l_2\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + n_2\mathbf{e}_3. \tag{2.3}$$

Справедлива следующая теорема:
Т е о р е м а 2. *В общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *векторное параметрическое уравнение плоскости* (2.1) *эквивалентно следующим уравнениям*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_0 & l_1 & l_2 \\ y - y_0 & m_1 & m_2 \\ z - z_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Шаг 1. Из уравнений (2.1)–(2.3) вытекает векторное равенство

$$(x - x_0 - tl_1 - sl_2)\mathbf{e}_1 + (y - y_0 - tm_1 - sm_2)\mathbf{e}_2 + \\ + (z - z_0 - tn_1 - sn_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \tag{2.5}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис в пространстве из (2.5) вытекают следующие три равенства:

$$x - x_0 - tl_1 - sl_2 = 0, \quad y - y_0 - tm_1 - sm_2 = 0, \quad z - z_0 - tn_1 - sn_2$$

или в форме одного равенства для столбцов

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

Но тогда по свойствам определителя третьего порядка имеют место следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & l_1 & l_2 \\ y - y_0 & m_1 & m_2 \\ z - z_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

Шаг 2. Теперь предположим, что имеет место равенство (2.4). Тогда найдутся такие числа α, β, γ, не равные одновременно нулю, что имеет место следующее равенство

$$\alpha \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если предположить, что $\alpha = 0$, то из последнего равенства получим следующее:

$$\beta \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\beta| + |\gamma| > 0. \tag{2.6}$$

Докажем, что тогда справедливо следующее векторное равенство:

$$\beta\mathbf{a} + \gamma\mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad |\beta| + |\gamma| > 0. \tag{2.7}$$

□ Действительно, с одной стороны, (2.6) равносильно трём равенствам

$$\beta l_1 + \gamma l_2 = \beta m_1 + \gamma m_2 = \beta n_1 + \gamma n_2 = 0. \tag{2.8}$$

С другой стороны, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\beta\mathbf{a} + \gamma\mathbf{b} = \beta(l_1\mathbf{e}_1 + m_1\mathbf{e}_2 + n_1\mathbf{e}_3) + \gamma(l_2\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + n_2\mathbf{e}_3) = \\ = (\beta l_1 + \gamma l_2)\mathbf{e}_1 + (\beta m_1 + \gamma m_2)\mathbf{e}_2 + (\beta n_1 + \gamma n_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \quad \boxtimes \tag{2.9}$$

Но по определению плоскости векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, а значит, линейно независимы. Противоречие. Итак, $\alpha \neq 0$ и мы приходим к равенству

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}, \quad t = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad s = -\frac{\gamma}{\alpha},$$

т. е. к параметрическому уравнению плоскости в координатах.

Теорема доказана.

Разложим определитель в левой части равенства (2.4) по первой строчке и получим следующее уравнение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{2.10}$$

где

$$A = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Числа A, B и C, определенные равенствами* (2.11), *одновременно в ноль не обращаются.*

Доказательство.

Отметим, что по условию векторы $\mathbf{a} = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\mathbf{b} = \{l_2, m_2, n_2\}$ являются неколлинеарными. Предположим, что

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.12}$$

Если $l_1 = m_1 = n_1 = 0$, то вектор $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ и, следовательно, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Поэтому хотя бы одно из чисел l_1, m_1 и n_1 отлично от нуля. Пусть, например, $l_1 \neq 0$. Тогда, с одной стороны, из последнего равенства (2.12) приходим к равенствам

$$l_1 m_2 = l_2 m_1 \Leftrightarrow m_2 = \frac{l_2}{l_1} m_1 \Leftrightarrow \lambda := \frac{l_2}{l_1}, \quad l_2 = \lambda l_1, \quad m_2 = \lambda m_1. \quad (2.13)$$

С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow n_2 l_1 = n_1 l_2 \Leftrightarrow n_2 = \frac{l_2}{l_1} n_1 = \lambda n_1. \quad (2.14)$$

Из полученных равенств (2.13) и (2.14) вытекает векторное равенство $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, т. е. векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны. Противоречие.

Лемма доказана.

Уравнение (2.10) с учётом леммы 1 можно переписать в следующей форме:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0. \quad (2.15)$$

Определение 4. *Уравнение* (2.15) *называется общим уравнением плоскости в пространстве.*

Теорема 3. *Уравнение плоскости в форме* (2.4) *эквивалентно общему уравнению плоскости в форме* (2.15).

Доказательство.

Осталось доказать, что из общего уравнения плоскости в форме (2.15) вытекает уравнение вида (2.4). Поскольку $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, то существует по меньшей мере одна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяющая общему уравнению плоскости (2.15), т. е. справедливо равенство

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \Leftrightarrow D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Поэтому общее уравнение плоскости примет следующий вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Без ограничения общности предположим, что $A \neq 0$. Введём вещественные параметры t и s следующим не однозначным образом:

$$y - y_0 = t, \quad z - z_0 = s, \quad (2.16)$$

тогда

$$x - x_0 = \beta \cdot t + \gamma \cdot s, \quad \beta := -\frac{B}{A}, \quad \gamma := -\frac{C}{A}. \quad (2.17)$$

Равенства (2.16) и (2.17) можно записать в виде одного равенства для соответствующих столбцов:

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

из которого вытекают следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & \beta & \gamma \\ y-y_0 & 1 & 0 \\ z-z_0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Эти равенства совпадают с равенствами (2.4) при

$$l_1 = \beta, \quad m_1 = 1, \quad n_1 = 0, \quad l_2 = \gamma, \quad m_2 = 0, \quad n_2 = 1,$$

т. е. в частности, направляющие векторы плоскости имеют следующий вид:

$$\mathbf{a} = -\frac{B}{A} \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{b} = -\frac{C}{A} \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3.$$

Можно проверить, что эти два векторы линейно независимые.

Теорема доказана.

§ 3. Нормальное уравнение плоскости

Дадим определение.

Определение 5. *Нормальным уравнением плоскости в общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *называется следующее уравнение*:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D, \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ *— это радиус–вектор точки* M, *лежащей на данной плоскости.*

Корректность определения. Прежде всего нужно проверить корректность этого определения. Докажем, что уравнение (3.1) действительно описывает плоскость. Пусть

$$\mathbf{r}_0 := \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} D. \tag{3.2}$$

Очевидно, что

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = D.$$

Поэтому уравнение (3.1) эквивалентно следующему уравнению:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) \Leftrightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0.$$

Вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$, где точка M_0 — это некоторая фиксированная точка. Теперь заметим, что конец M направленного отрезка $\overrightarrow{M_0M}$ лежит на плоскости, тогда и только тогда, когда направленный отрезок $\overrightarrow{M_0M}$ ортогонален вектору нормали к плоскости. В данном случае — это вектор $\mathbf{n}$.

Итак, в любой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ вектор $\mathbf{n}$ в нормальном уравнении плоскости (3.1) — это вектор нормали к плоскости.

Для дальнейшего нам нужно рассмотреть *взаимный базис* к базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в пространстве.

В з а и м н ы й б а з и с. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это правая тройка некомпланарных векторов в пространстве. Отметим, что смешанное произведение $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) > 0$. Введём так называемый взаимный базис в пространстве $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, определённый формулами

$$\mathbf{f}_1 := \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{f}_2 := \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{f}_3 := \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

1. Прежде всего докажем, что векторы $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, образуют базис.

□. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\alpha \mathbf{f}_1 + \beta \mathbf{f}_2 + \gamma \mathbf{f}_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + \beta[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + \gamma[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{0}.$$

Умножая скалярно обе части последнего уравнения на векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, с учётом свойств векторных произведений получим равенства

$$\alpha(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0, \quad \beta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0, \quad \gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Следовательно, векторы семейства $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ образуют базис в пространстве. ⊠

2. Скалярно умножая векторы взаимного базиса $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ на векторы семейства $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ получим следующие равенства:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1) = 1, \quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2) = 0, \quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_3) = 0; \tag{3.3}$$

$$(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1) = 0, \quad (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_2) = 1, \quad (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_3) = 0; \tag{3.4}$$

$$(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1) = 0, \quad (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2) = 0, \quad (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_3) = 1. \tag{3.5}$$

3. Векторно умножая между собой векторы взаимного базиса $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ получим следующие равенства:

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \frac{\mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] = \frac{\mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad [\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1] = \frac{\mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

□ Действительно, докажем, например, первое равенство. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}[][\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]] &= \{\mathbf{x} := [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]\} = [\mathbf{x}, [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]] = \mathbf{e}_3(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = \\ &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = 0\} = \mathbf{e}_3([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{3.6}$$

4. В том случае, когда векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ образуют правый ортонормированный базис имеют место равенства

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Лемма 2. *Если* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ *— это взаимный базис к базису* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *и* $\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_1 + a_y\mathbf{e}_2 + a_z\mathbf{e}_3$, *то*

$$a_x = (\mathbf{a}, \mathbf{f}_1), \quad a_y = (\mathbf{a}, \mathbf{f}_2), \quad a_z = (\mathbf{a}, \mathbf{f}_3).$$

Доказательство.

Для доказательства нужно воспользоваться линейностью скалярного произведения по первому аргументу и формулами из второго пункта.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *В произвольной общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *общее уравнение плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

эквивалентно нормальному уравнению плоскости

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0$$

с некоторым вектором нормали к плоскости $\mathbf{n}$.

Доказательство.

Шаг 1. Сначала рассмотрим случай прямоугольной декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Введём вектор $\mathbf{n}$ с координатами $(A, B, C):$

$$\mathbf{n} = A\mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2 + C\mathbf{e}_3.$$

Тогда

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{r}) + D = 0,$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ — это радиус–вектор произвольной точки плоскости с координатами (x, y, z). Это выполнено в силу доказанного нами ранее представления скалярного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе.

Шаг 2. Теперь мы рассмотрим случай общей декартовой системы координат. В этом случае тройку векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ будем считать произвольным базисом.

1. Пусть в рассматриваемой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ задано уравнение

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0$$

и радиус–вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки задается задаётся своим разложением по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Заметим, что в силу линейности скалярного произведения по первому аргументу справедливо равенство

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n})x + (\mathbf{e}_2, \mathbf{n})y + (\mathbf{e}_3, \mathbf{n})z.$$

Итак,

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0,$$

где
$$A = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}), \quad B = (\mathbf{e}_2, \mathbf{n}), \quad C = (\mathbf{e}_3, \mathbf{n}).$$

2. Пусть в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ нам задана плоскость общим уравнением
$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Найдём такой вектор $\mathbf{n}$, чтобы были справедливы следующие равенства:
$$(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = A, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) = B, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) = C.$$

Будем искать вектор $\mathbf{n}$ в виде разложения по взаимному базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:
$$\mathbf{n} = A\mathbf{f}_1 + B\mathbf{f}_2 + C\mathbf{f}_3.$$

Умножая последовательно это равенство на $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ мы получим следующие равенства:
$$(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = A, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) = B, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) = C.$$

Итак,
$$\mathbf{n} = \frac{A[\mathbf{e_2}, \mathbf{e}_3] + B[\mathbf{e_3}, \mathbf{e}_1] + C[\mathbf{e_1}, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

Но тогда имеют место следующие выражения:
$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1)x + (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2)y + (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3)z + D = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{r}) + D = 0, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Теорема доказана.

В качестве следствия из теоремы 4 можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 5. *Для того чтобы две плоскости, заданные общими уравнениями*
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, *были параллельны или совпадали необходимо и достаточно, чтобы*
$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2 \quad \text{при} \quad \lambda \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — это взаимный базис с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Необходимость. Пусть плоскости параллельны. Уравнения плоскостей можно записать в следующем нормальном виде:
$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2,$$
$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3, \quad \mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3$$

Векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — это векторы нормалей к соответствующим плоскостям. В силу параллельности плоскостей вектора нормалей коллинеарны. Итак, найдется такое число $\lambda \neq 0$, что

$$\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow (A_1 - \lambda A_2)\mathbf{f}_1 + (B_1 - \lambda B_2)\mathbf{f}_2 + (C_1 - \lambda C_2)\mathbf{f}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2.$$

Достаточность. Пусть $A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2$. Тогда из тех же формул для векторов нормалей получим равенство $\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$. Это означает, что плоскости параллельны.

Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. *Для того чтобы вектор $\mathbf{a} = \{l, m, n\}$ был компланарен плоскости, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{3.7}$$

Доказательство.

Запишем уравнение плоскости в нормальном виде

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D, \quad \mathbf{n} = A\mathbf{f}_1 + B\mathbf{f}_2 + C\mathbf{f}_3,$$

а вектор $\mathbf{a}$ задан разложением по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3.$$

Искомое необходимое и достаточное условие — это равенство

$$(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = 0. \tag{3.8}$$

Осталось воспользоваться линейностью скалярного произведения по обоим аргументам и доказанными ранее равенствами (3.3)–(3.5) и получить равенство

$$(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n. \tag{3.9}$$

Итак,из равенств (3.8) и (3.9) вытекает условие (3.7).

Лемма доказана.

Непосредственным следствием этой леммы является следующее утверждение:

Лемма 4. *Два из возможных неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, которые являются направляющими векторами плоскости, заданной общим уравнением*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A \neq 0,$$

в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, имеют следующий вид:

$$\mathbf{a} = -B\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = -C\mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + A\mathbf{e}_3. \tag{3.10}$$

Доказательство.

Непосредственно можно проверить, что векторы (3.10) удовлетворяют равенству (3.7).

□ Действительно, имеем $\mathbf{a} = \{-B, A, 0\}$ и $\mathbf{b} = \{-C, 0, A\}$. Справедливы следующие равенства:

$$-AB + AB + 0C = 0 \quad \text{и} \quad -AC + 0B + AC = 0. \quad \boxtimes$$

Теперь рассмотрим их линейную комбинацию

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = (-\alpha B - \beta C)\mathbf{e}_1 + \alpha A\mathbf{e}_2 + \beta A\mathbf{e}_3,$$

но тогда равенство

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

возможно, тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta = 0$. Значит, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно независимы при $A \neq 0$.

Лемма доказана.

ПРИМЕР 1. Нужно составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и компланарной вектору $\mathbf{a} = \{l, m, n\}$, при условии что направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ не коллинеарен вектору $\mathbf{a}$. Очевидно, в качестве точки M_0 можно взять точку M_1, а в качестве вектора $\mathbf{b}$ можно взять вектор, порождённый направленным отрезком $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тогда уравнение следующее (см. (2.4)):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

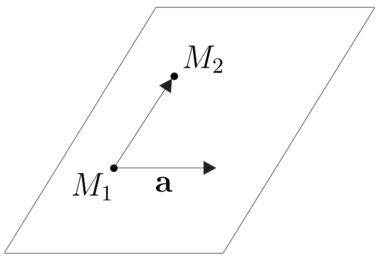

Рис. 55. Плоскость, проходящая через две точки и не коллинеарный им вектор.

ПРИМЕР 2. Провести плоскость через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Положим $M_0 = M_1$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$. Тогда уравнение следующее (см. (2.4)):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

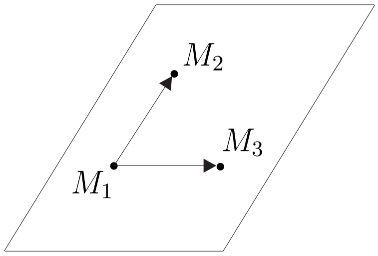

Рис. 56. Плоскость, проходящая через три точки.

ПРИМЕР 3. Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Положим $M_0 = M_1$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ (см. (1.6)):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

§ 4. Взаимное расположение двух прямых

Пусть нам заданы две прямые:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 \tau, \quad \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}, \quad t, \tau \in \mathbb{R}. \qquad (4.1)$$

Из геометрических соображений вытекает наличие четырёх случаев в пространстве, в отличие от трёх случаев на плоскости: 1. прямые совпадают, 2. прямые параллельны, 3. прямые пересекаются, 4. прямые скрещиваются, т. е. не параллельны и не пересекаются.

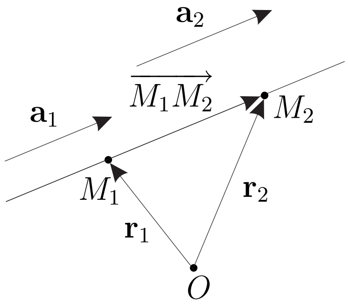

Рис. 57. Прямые совпадают.

Первый случай. Прямые совпадают, если уравнения (4.1) являются эквивалентными. Эти уравнения эквивалентны, если направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны и вектор $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ коллинеарен обеим прямым:

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1] = \mathbf{0}.$$

Второй случай. Прямые параллельны, если направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны, но вектор $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ не коллинеарен обеим прямым:

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1] \neq \mathbf{0}.$$

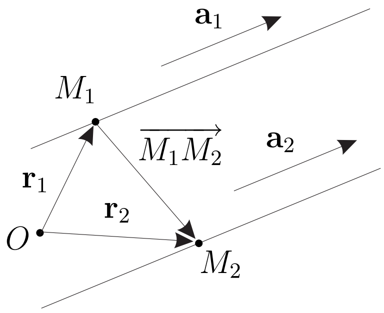

Рис. 58. Прямые параллельны.

Третий случай. Прямые пересекаются, т. е. в частности лежат в одной некоторой плоскости, если направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны, а векторы $\mathbf{r_1} - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ компланарны:

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0.$$

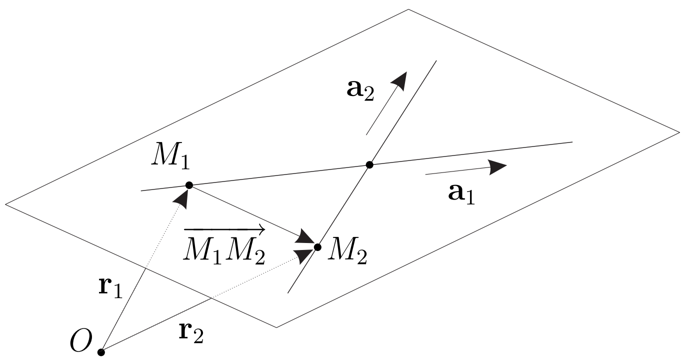

Рис. 59. Прямые пересекаются.

Четвёртый случай. Прямые скрещиваются, если направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны и векторы $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не компланарны:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) \neq 0.$$

Замечание 3. Для первых трёх случаев имеет место равенство $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0$, а для третьего случая $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \neq 0$.

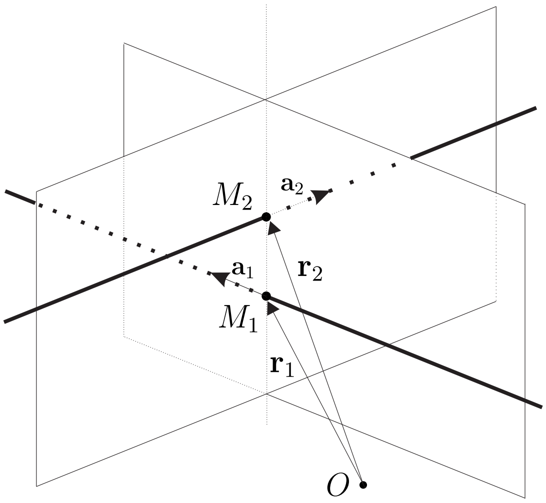

Рис. 60. Скрещивающиеся прямые.

§ 5. Прямая как пересечение двух плоскостей

Пусть сначала плоскости заданы общими уравнениями в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{5.1}$$

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0.$$

Пусть эти плоскости пересекаются. Условие того, чтобы эти плоскости пересекались будет получено вместе с координатами направляющего вектора прямой, по которой пересекаются плоскости.

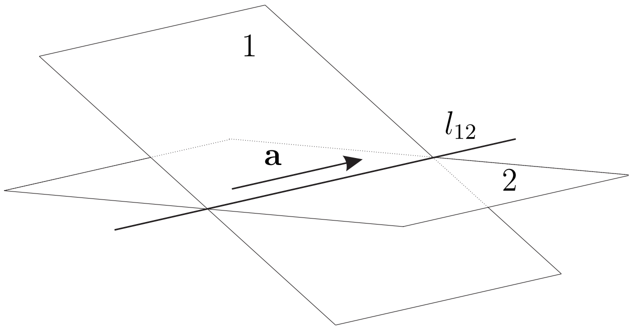

Рис. 61. Пересекающиеся плоскости.

Ясно, что направляющий вектор искомой прямой пересечения двух плоскостей может быть найден как такой вектор

$$\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3,$$

который одновременно компланарен и первой и второй плоскостям, т. е. в силу леммы 3 может быть найден как решение следующей системы двух уравнений:

$$A_1 l + B_1 m + C_1 n = 0, \quad A_2 l + B_2 m + C_2 n = 0. \tag{5.2}$$

Рассмотрим сначала следующий равный нулю определитель:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{5.3}$$

который равен нулю, поскольку у него две одинаковые строчки. Разложим его по первой строчке и получим равенство

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.4}$$

Теперь рассмотрим следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{5.5}$$

у которого тоже две одинаковые строчки. Разложим его по первой строчке и получим следующее равенство:

$$A_2 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_2 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.6}$$

Значит, направляющий вектор искомой прямой равен

$$\mathbf{a} = \{l, m, n\}, \quad l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \tag{5.7}$$

И необходимое и достаточное условие пересечения данных плоскостей имеет следующий вид:

$$l^2 + m^2 + n^2 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 > 0. \tag{5.8}$$

□ Действительно, как мы установили в теореме 5 для того чтобы плоскости (5.1) были параллельны или совпадали, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие равенства

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1, \quad \lambda \neq 0.$$

Но тогда

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, плоскости пересекаются, тогда и только тогда, когда выполнено неравенство в формуле (5.8). ⊠

Далее осталось найти какую–либо точку пересечения плоскостей. Действительно, без ограничения общности можно считать, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда систему уравнений (5.1) можно переписать в следующем виде:

$$A_1x + B_1y = -C_1z - D_1, \quad A_2x + B_2y = -C_2z - D_2. \tag{5.9}$$

Эта система уравнений имеет бесконечное множество решений и пусть $M_0(x_0, y_0z_0)$ — это одно из решений, тогда уравнение прямой имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{5.10}$$

§ 6. Полупространства, определяемые плоскостью

Справедлива следующая теорема, доказательство которой в точности повторяет доказательства соответствующих утверждений из предыдущей лекции:

Т е о р е м а 6. *Пусть относительно общей декартовой системы координат задано уравнение плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Тогда для координат x, y, z точки $M(x, y, z)$, лежащих по одну сторону от плоскости, выполнено неравенство

$$Ax + By + Cz + D > 0,$$

а для координат точек $M(x, y, z)$, лежащих по другую сторону от плоскости, выполнено неравенство

$$Ax + By + Cz + D < 0.$$

Вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ направлен в сторону «положительного» полупространства $Ax + By + Cz + D > 0$.

§ 7. Некоторые метрические задачи

Справедливо следующее утверждение:

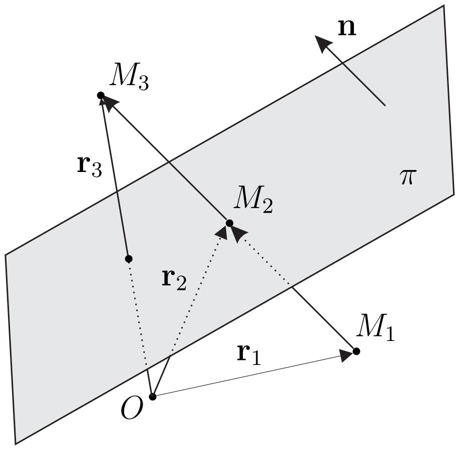

Рис. 62. К теореме 7.

Теорема 7. *Пусть в пространстве даны точка $M_1(\mathbf{r}_1)$ и плоскость, заданная нормальным уравнением $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. Тогда*

1. *радиус–вектор $\mathbf{r}_2$ точки M_2, являющейся ортогональной проекцией точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ на плоскость π, выражается формулой*
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}; \tag{7.1}$$
2. *расстояние от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до плоскости π выражается формулой*
$$d(M_1, \pi) = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + D|}{|\mathbf{n}|}; \tag{7.2}$$
3. *Радиус вектор $\mathbf{r}_3$ точки M_3, симметричной точке $M_1(\mathbf{r}_1)$ относительно плоскости π, выражается формулой*
$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 - 2\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}. \tag{7.3}$$

Доказательство. В точности повторяет доказательство результата теоремы 8 шестой лекции.

Теорема доказана.

Лекция 10

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА–КАПЕЛЛИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ следующего общего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\| = \begin{Vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix},$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \cdots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix},$$

$$A^1 = \left(a_1^1, a_2^1, \cdots, a_n^1\right), \ldots, A^m = \left(a_1^m, a_2^m, \cdots, a_n^m\right).$$

Рассмотрим линейные оболочки столбцов и строк матрицы A:

$$L(A_1, ..., A_n) \subset \mathbb{K}^m, \quad L(A^1, ..., A^m) \subset \mathbb{K}_n.$$

Пусть $A^{'}$ — это матрица, полученная из матрицы A элементарными преобразованиями строк первых четырёх типов. В силу результата теоремы 9 имеют место следующие равенства:

$$\dim L(A_1^{'}, A_2^{'}, \ldots, A_n^{'}) = \dim L(A_1, A_2, \ldots, A_n), \tag{1.1}$$

$$\dim L(A^{'1}, A^{'2}, \ldots, A^{'m}) = \dim L(A^1, A^2, \ldots, A^m). \tag{1.2}$$

Определение 1. *Размерность линейной оболочки $L(A_1, ..., A_n)$ столбцов матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ называется рангом матрицы A.*

Обозначение. $\operatorname{rk} A$, $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rg} A$, $\operatorname{rang} A$, $\operatorname{r}(A)$.

Теорема 1. *Для любой матрицы A размерность линейной оболочки её столбцов равна размерности линейной оболочки её строк*:

$$\dim L(A_1, ..., A_n) = \dim L(A^1, ..., A^m).$$

Доказательство.

Используя метод Гаусса–Жордана элементарными преобразованиями первых четырёх типов матрицу A можно преобразовать к матрице A' следующих четырёх типов: либо к нулевой матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

либо к блочным матрицам

$$\left\| \begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{array} \right\|, \quad 1 \leqslant r < \min\{m,n\};$$

$$\left\| I_m | O_{m\times(n-m)} \right\| \quad \text{при} \quad n > m;$$

$$\left\| \begin{array}{c} I_n \\ O_{(m-n)\times n} \end{array} \right\| \quad \text{при} \quad m > n,$$

где

$$O_{r\times(n-r)}, \quad O_{(m-r)\times r}, \quad O_{(m-r)\times(n-r)}, \quad O_{m\times(n-m)}$$

— это нулевые матрицы соответствующих размеров, а I_r, I_m, I_n — это единичные (квадратные) матрицы соответствующего порядка. В первом случае получаем, что

$$\dim L(A_1^{'}, ..., A_n^{'}) = \dim L(A^{'1}, ..., A^{'m}) = 0.$$

Во втором случае

$$\dim L(A_1^{'}, ..., A_n^{'}) = \dim L(A^{'1}, ..., A^{'m}) = r;$$

в третьем случае

$$\dim L(A_1^{'}, ..., A_n^{'}) = \dim L(A^{'1}, ..., A^{'m}) = m, \quad m < n;$$

в четвертом случае

$$\dim L(A_1^{'}, ..., A_n^{'}) = \dim L(A^{'1}, ..., A^{'m}) = n, \quad n < m.$$

Осталось воспользоваться равенствами (1.1) и (1.2).

Теорема доказана.

Следствие. *Для ранга* $\operatorname{rang} A$ *матрицы* A *имеет место следующее неравенство*:

$$\operatorname{rang} A \leqslant \min\{m, n\}.$$

Доказательство. Независимое доказательство основано на следующих неравенствах:

$$L(A_1, ..., A_n) \subset \mathbb{K}^m \Rightarrow \dim L(A_1, ..., A_n) \leqslant m;$$
$$L(A^1, \ldots, A^m) \subset \mathbb{K}_n \Rightarrow \dim L(A^1, ..., A^m) \leqslant n.$$

Следствие доказано.

Теорема Кронекера–Капелли:
Теорема 2. *Неоднородная система* $AX = B$ *совместна тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang}\|A\| = \operatorname{rang}\|A \mid B\|.$$

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть система $AX = B$ совместна. Тогда найдутся такие числа $c^1, \ldots, c^n \in \mathbb{K}$, что

$$B = c^1 A_1 + \cdots + c^n A_n \Rightarrow B \subset L(A_1, ..., A_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow L(A_1, ..., A_n, B) \subset L(A_1, ..., A_n).$$

Обратное вложение очевидно. Таким образом,

$$L(A_1, ..., A_n) = L(A_1, ..., A_n, B) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim L(A_1, ..., A_n) = \dim L(A_1, ..., A_n, B) \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{rang}\|A\| = \operatorname{rang}\|A \mid B\|.$$

Шаг 2. Достаточность. Пусть

$$\dim\|A\| = \dim\|A \mid B\|.$$

Вложение

$$L(A_1, ..., A_n) \subset L(A_1, ..., A_n, B)$$

очевидно. Докажем, что $L(A_1, ..., A_n) = L(A_1, ..., A_n, B)$.

$\square$ Пусть $\{A_{\sigma_1}, ..., A_{\sigma_r}\}$ — это базис $(0 \leqslant r \leqslant n)$ в $L(A_1, ..., A_n)$ и столбец B не выражается линейно через столбцы $\{A_1, ..., A_n\}$. Тогда тем более столбец B линейно не выражается через столбцы $\{A_{\sigma_1}, ..., A_{\sigma_r}\}$. Тогда семейство $\{A_{\sigma_1}, ..., A_{\sigma_r}, B\}$ линейно независимое и образует базис в линейной оболочке $L(A_1, ..., A_n, B)$, т.е.

$$\dim L(A_1, ..., A_n, B) = \dim L(A_1, ..., A_n) + 1.$$

Противоречие. $\boxtimes$

$$L(A_1, ..., A_n) = L(A_1, ..., A_n, B) \Rightarrow \exists\, c^1, \ldots, c^n, \quad B = c^1 A_1 + \cdots + c^n A_n.$$

Система $AX = B$ совместна, поскольку имеет решение

$$X = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если существует произведение матриц A и B, то*

$$\operatorname{rang}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}. \tag{1.3}$$

Доказательство.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$. Обозначим через $C \in \mathbb{K}^{m\times n}$ произведение $A \cdot B$. Поэтому

$$C_k = A \cdot B_k = \sum_{l=1}^{p} A_l b_k^l,\ k = \overline{1,n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(C_1, \ldots, C_n) \in L(A_1, \ldots, A_p) \Rightarrow \operatorname{rang} C \leqslant \operatorname{rang} A,$$

$$C^j = A^j \cdot B = \sum_{l=1}^{p} a_l^j B^l,\ j = \overline{1,m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(C^1, \ldots, C^m) \subset L(B^1, \ldots, B^p) \Rightarrow \operatorname{rang} C \leqslant \operatorname{rang} B.$$

Теорема доказана.

§ 2. Теорема о базисном миноре

Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Выберем в этой матрице произвольные k строк с номерами $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ и k столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

$$\begin{pmatrix}
a_1^1 & \cdots & a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_2}^1 & \cdots & a_{i_k}^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_1} & \cdots & a_{i_1}^{j_1} & \cdots & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} & \cdots & a_n^{j_1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_2} & \cdots & a_{i_1}^{j_2} & \cdots & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} & \cdots & a_n^{j_2} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_k} & \cdots & a_{i_1}^{j_k} & \cdots & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k} & \cdots & a_n^{j_k} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^m & \cdots & a_{i_1}^m & \cdots & a_{i_2}^m & \cdots & a_{i_k}^m & \cdots & a_n^m
\end{pmatrix}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
a_{i_1}^{j_1} & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} \\
a_{i_1}^{j_2} & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_1}^{j_k} & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k}
\end{pmatrix}.$$

Построенную матрицу будем называть подматрицей матрицы A и обозначать следующим образом:

$$A\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k\times k}.$$

Определение 2. *Определитель матрицы*

$$A\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

называется минором порядка k *матрицы* A.

Матрицу, из которой удалили указанные строки и столбцы, будем обозначать следующим образом:

$$\overline{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(m-k)\times(n-k)}.$$

Определение 3. *Если $m = n$, то определитель матрицы*

$$\overline{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

называется дополнительным минором порядка $n - k$ квадратной матрицы A.

Обозначение. При этом в литературе используются следующие обозначения:

$$M^{j_1 j_2 \cdots j_k}_{i_1 i_2 \cdots i_k} := \det A\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix},$$

$$\overline{M}^{j_1 j_2 \cdots j_k}_{i_1 i_2 \cdots i_k} := \det \overline{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}.$$

Определение 4. *Минор порядка $k \leqslant \min\{m, n\}$ матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ называется базисным, если он отличен от нуля, а любой минор большего порядка, если он существует, равен нулю.*

Пример 1. У матрицы может быть не один базисный минор. Действительно, у матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

имеется три базисных минора второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2.$$

Определение 5. *Будем говорить, что подматрица $\widehat{\widehat{A}}$ матрицы A окаймляет подматрицу $\widehat{A}$ матрицы A, если $\widehat{A}$ получается из матрицы $\widehat{\widehat{A}}$ вычеркиванием последнего столбца и последней строчки.*

Например, матрица

$$\widehat{\widehat{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \quad \text{окаймляет матрицу} \quad \widehat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема о базисном миноре.

Теорема 4. *Справедливы следующие свойства:*

1. *Столбцы (строки) матрицы, образующие её базисный минор, линейно независимы.*
2. *Любой столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией столбцов (строк), образующих базисный минор.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что базисный минор матрицы A порядка r расположен в левом верхнем угле матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

то столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Но тогда тем более линейно независимыми будут столбцы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^r \\ a_1^{r+1} \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^r \\ a_r^{r+1} \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix}$$

исходной матрицы A.

Шаг 2. Пусть A_k — это произвольный столбец матрицы. Если $k \leqslant r$, то имеет место равенство

$$A_k = 0 \cdot A_1 + \cdots + 0 \cdot A_{k-1} + 1 \cdot A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \cdots + 0 \cdot A_r$$

и, следовательно, столбец A_k линейно выражается через базисные столбцы. Если же $k > r$, то рассмотрим минор порядка $r + 1$, полученный окаймлением базисного минора столбцом A_k и какой либо строчкой A^s:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_k^r \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & a_k^s \end{vmatrix}$$

Нужно рассмотреть два случая: $s \in \overline{1, r}$ и $s \in \overline{r+1, m}$. В первом случае у этого определителя заведомо две одинаковые строчки. Поэтому он равен нулю. Во втором случае указанный минор $r+1$–го порядка составлен из элементов, находящихся на пересечении первых r строк и s–ой строчки и первых r столбцов и k–го столбца:

$$
\begin{pmatrix}
a_1^1 & \cdots & a_r^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^r & \cdots & a_r^r & \cdots & a_k^r & \cdots & a_n^r \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^s & \cdots & a_r^s & \cdots & a_k^s & \cdots & a_n^s \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^m & \cdots & a_r^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m
\end{pmatrix}.
$$

Соответствующий минор $r+1$–го порядка равен нулю по определению базисного минора.

Теперь мы можем разложить этот определитель по s–й строчке и получить следующее равенство:

$$
0 = a_1^s \mathcal{M}_1 + \cdots + a_r^s \mathcal{M}_r + a_k^s \mathcal{M}, \quad s = \overline{1, m},
$$

причём $\mathcal{M} \neq 0$, а $\mathcal{M}_1, ..., \mathcal{M}_r$ — это алгебраические дополнения элементов последней строчки. Итак, имеем

$$
a_k^s = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} a_1^s - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} a_r^s, \quad s = \overline{1, m}.
$$

Отсюда получаем

$$
A_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^s \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix} = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^s \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^s \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix} =
$$

$$
= -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} A_1 - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} A_r.
$$

Теорема доказана.

§ 3. Фундаментальное Семейство Решений

Применим теорему о базисном миноре к решению однородных систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим следующую систему

$$
A \cdot X = O,
$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}.$$

Пусть $\operatorname{rang} A = r \leqslant \min\{m, n\}$.

1. Перестановками строк и перестановками столбцов, что соответствует переобозначению переменных, можно добиться, чтобы базисный минор (если он существует) матрицы системы A расположился на пересечении первых r строк и первых r столбцов. Для того чтобы не загромождать рассуждения будем считать, что базисный минор расположен на пересечении первых r строк и первых r столбцов.

2. Согласно теореме о базисном миноре последние $n-r$ строк матрицы A линейно выражаются через первые r строк. Но тогда применяя к каждой из последних $n-r$ строк элементарное преобразование третьего типа, а именно вычитая соответствующую линейную комбинацию первых r строк, мы приведём последние $n-r$ строк к следующему тривиальному виду:

$$0 \cdot x^1 + \cdots + 0 \cdot x^r + 0 \cdot x^{r+1} + \cdots + 0 \cdot x^n = 0.$$

Таким образом, используя элементарное преобразование 5–го типа — вычёркивание нулевых строк матрицы системы мы приходим к следующей системе из r уравнений относительно n неизвестных:

$$\begin{aligned} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r + a_{r+1}^1 x^{r+1} + \cdots + a_n^1 x^n = 0, \\ a_1^2 x^1 + \cdots + a_r^2 x^r + a_{r+1}^2 x^{r+1} + \cdots + a_n^2 x^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r + a_{r+1}^r x^{r+1} + \cdots + a_n^r x^n = 0. \end{aligned}$$

Здесь и ниже мы опять используем те же обозначения для переменных, хотя могли воспользоваться элементарным преобразованием четвёртого типа, т. е. ввести переобозначения среди первых r переменных $x^1, \ldots, x^r$.

3. Поскольку

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

то используя алгоритм Гаусса–Жордана элементарными преобразованиями первых четырёх типов (в том числе переобозначениями переменных $x^1, \ldots, x^r$), мы можем привести эту систему к следующему эквивалентному виду:

$$
\begin{gathered}
x^1 + \overline{a}^1_{r+1} x^{r+1} + \cdots + \overline{a}^1_n x^n = 0, \\
x^2 + \overline{a}^2_{r+1} x^{r+1} + \cdots + \overline{a}^2_n x^n = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x^r + \overline{a}^r_{r+1} x^{r+1} + \cdots + \overline{a}^r_n x^n = 0.
\end{gathered}
$$

Система уравнений приняла упрощенный вид. Выберем переменные $x^1, \ldots, x^r$ как базисные, а переменные $x^{r+1}, \ldots, x^n$ как свободные. Положим

$$
x^{r+1} = c_1, \quad x^{r+2} = c_2, \ldots, x^{n-r} = c_{n-r}.
$$

Тогда общее решение последней системы уравнений, а значит, в силу эквивалентных преобразований и исходной системы уравнений можно представить в следующем виде:

$$
X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_{r+1} c_1 - \cdots - \overline{a}^1_n c_{n-r} \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_{r+1} c_1 - \cdots - \overline{a}^r_n c_{n-r} \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 X_1 + \cdots + c_{n-r} X_{n-r},
$$

где

$$
X_1 = \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_{r+1} \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, X_{n-r} = \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_n \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

4. Нетрудно убедиться в том, что столбцы $X_1, \ldots, X_{n-r}$ являются линейно независимыми, а по построению произвольное решение X исходной системы уравнений линейно выражается через эти столбцы. Следовательно, эти столбцы образуют базис пространства решений исходной однородной системы уравнений.

§ 4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Рассмотрим две прямые на плоскости, заданные уравнениями

$$
l_1: \ A_1 x + +B_1 y = C_1, \quad l_2: \ A_2 x + B_2 y = C_2, \tag{4.1}
$$

где $A_j^2 + B_j^2 > 0$, $j = 1, 2$. Рассмотрим матрицу и расширенную матрицы системы уравнений (4.1).

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Ранг $\operatorname{rang} A$ матрицы A может принимать значения 1 и 2, поскольку матрица ненулевая и поэтому $\operatorname{rang} A \neq 0$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Система уравнений (4.1) имеет единственное решение — прямые пересекаются. Это означает, что $|A| \neq 0$, т. е. ранг матрицы A максимален: $\operatorname{rang} A = 2$. Заметим, что $\operatorname{rang} \widetilde{A}$ не может быть меньше 2, поскольку содержит базисный минор

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = 2$.

Случай 2. Система уравнений (4.1) не имеет решений — это означает, что $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} \widetilde{A}$. Как мы уже указывали, $\operatorname{rang} A \geqslant 1$. Поскольку случай $\operatorname{rang} A = 2$ соответствует уже рассмотренной ситуации, то поэтому $\operatorname{rang} A = 1$. Так как $\operatorname{rang} \widetilde{A}$ может быть больше только на единицу, то $\operatorname{rang} \widetilde{A} = 2$. По теореме Кронекера–Капелли система уравнений (4.1) не имеет решений.

Случай 3. Система уравнений (4.1) имеет бесконечно много решений — прямые совпадают. После рассмотрения первых двух случаев осталась только единственная ситуация: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = 1$. По теореме Кронекера–Капелли система уравнений (4.1) бесконечно много решений.

§ 5. Взаимное расположение трех прямых на плоскости

Пусть прямые l_1, l_2 и l_3 заданы общими уравнениями в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$

$$l_1: \quad A_1x + B_1y = C_1, \tag{5.1}$$

$$l_2: \quad A_2x + B_2y = C_2, \tag{5.2}$$

$$l_3: \quad A_3x + B_3y = C_3. \tag{5.3}$$

Случай 1. Прямые пересекаются в единственной точке.

С одной стороны, это означает, что каждые две прямые из трёх пересекаются в единственной точке (смотри первый случай предыдущего параграфа), т. е.

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 2.$$

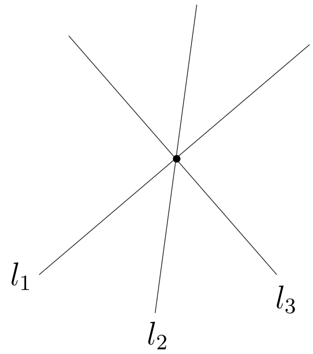

Рис. 63. Три прямые пересекаются в одной точке.

С другой стороны, система всех трех уравнений совместна, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2.$$

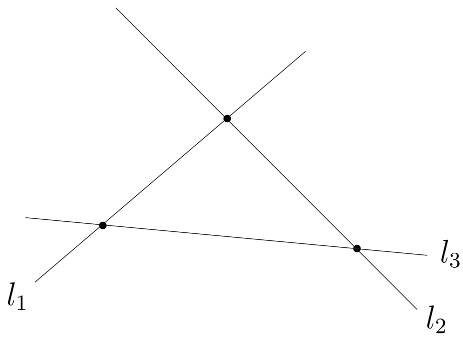

Рис. 64. Три прямые попарно пересекаются.

Случай 2. Прямые попарно пересекаются, но все три прямые не имеют общих точек. С одной стороны, любые два уравнения из трёх имеют единственное решение, что означает

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, все три уравнения не имеют решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3, \qquad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 3. Две прямые из трёх параллельны, а оставшаяся прямая их пересекает.

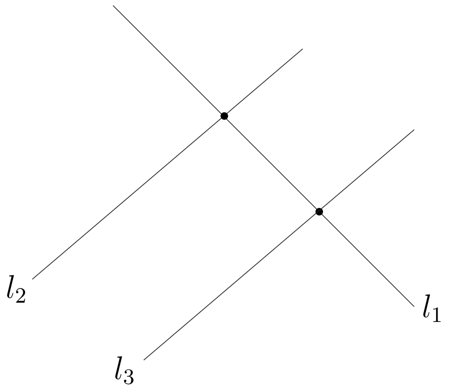

Рис. 65. Две прямые параллельны, а третья их пересекает.

Без ограничения общности можно считать, что прямые l_2 и l_3 параллельны, а прямая l_1 их пересекает. С одной стороны, это означает, что системы уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2$$

и

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют единственные решения. А система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

решений не имеет. Итак,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2,$$

но (смотри второй случай предыдущего параграфа)

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4. Две прямые совпадают, а третья их пересекает. Без ограничения общности пусть прямые l_2 и l_3 совпадают, а прямая l_1 их пересекает.

Тогда, с одной стороны, это означает, что системы уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2$$

и

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют каждая единственное решение. А система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

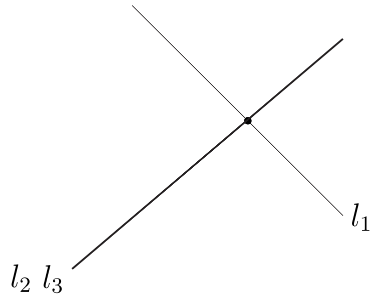

Рис. 66. Две прямые совпадают, а третья их пересекает.

имеет бесконечное число решений. Итак,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2,$$

но (смотри третий случай предыдущего параграфа)

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Случай 5. Три прямые параллельны.

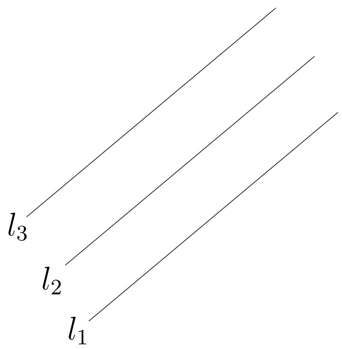

Рис. 67. Три прямые параллельны.

Это означает, что каждые два уравнения из трёх не имеют решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 1,$$

но

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 6. Две прямые из трёх совпадают, а третья им параллельна.

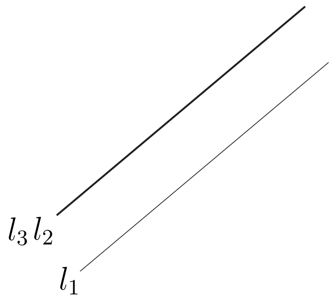

Рис. 68. Две прямые совпадают, а третья им параллельна.

Без ограничения общности, пусть прямые l_2 и l_3 совпадают, а первая прямая им параллельна. С одной стороны, система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют бесконечно много решений, а, с другой стороны, каждая система уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2$$

и

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

не имеют решений. Поэтому

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 7. Все три прямые совпадают.

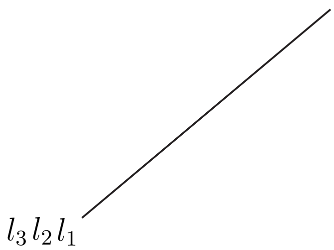

Рис. 69. Три прямые совпадают.

Это означает, что совпадают прямые l_1 и l_2 и совпадают прямые l_2 и l_3, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1,$$
$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

§ 6. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, причём

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0.$$

Векторы нормалей к плоскостям p_1 и p_2 имеют следующий вид:

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3, \quad \mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3, \tag{6.1}$$

где $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2\}$ взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

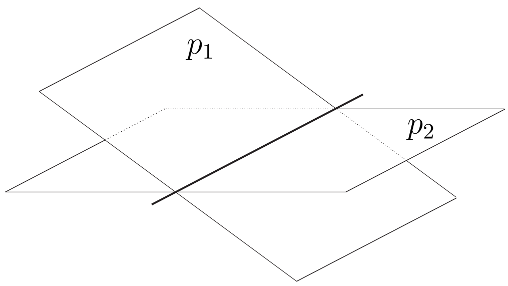

Рис. 70. Две плоскости пересекаются по прямой.

Случай 1. Плоскости пересекаются. Это означает, что система уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \tag{6.2}$$

имеет решение, но плоскости не совпадают. Значит

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

□ Действительно, во–первых,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \geqslant 1,$$

поскольку $A_j^2 + B_j^2 + C_j^2 > 0$ при $j = 1, 2$. Поскольку плоскости не параллельны и не совпадают, то их векторы нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ не коллинеарны, а значит, не являются линейно зависимыми:

$$\alpha \mathbf{n}_1 + \beta \mathbf{n}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0. \tag{6.3}$$

В силу (6.1) равенство (6.3) эквивалентно следующим равенствам:

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = \alpha B_1 + \beta B_2 = \alpha C_1 + \beta C_2 = 0, \tag{6.4}$$

которое можно записать в свою очередь в виде строчек

$$\alpha(A_1, B_1, C_1) + \beta(A_2, B_2, C_2) = (0, 0, 0), \tag{6.5}$$

которое в силу (6.3) возможно тогда и только тогда когда $\alpha = \beta = 0$. Следовательно, строчки у матрицы системы линейно независимы. ⊠

Очевидно, что

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

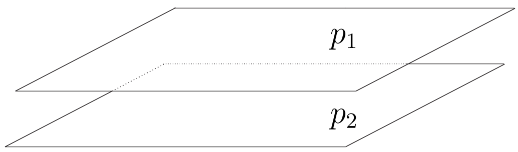

Рис. 71. Две плоскости параллельны.

Случай 2. Плоскости параллельны. Это означает, что система уравнений (6.2) не имеет решений, т. е.

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$$

□ Действительно, в этом случае векторы нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к плоскостям p_1 и p_2 коллинеарны. В этом случае точно также рассуждая, что и в предыдущем случае можно доказать, что строчки матрицы системы линейно зависимы. ⊠

При этом

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

□ Действительно, случай 2 — это случай не совместности системы уравнений и поэтому согласно теореме Кронекера–Капелли ранг расширенной матрицы ложен быть больше ранга основной матрицы системы. ⊠

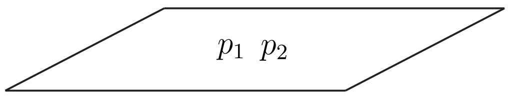

Рис. 72. Две плоскости совпадают.

Случай 3. Плоскости совпадают. Это означает, что система уравнений (6.2) имеет решения, но это не случай 1, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$$

и

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1.$$

□ Во–первых, это последняя ситуация из возможных. Во–вторых, поскольку плоскости совпадают, то их векторы коллинеарны и поэтому строчки основной матрицы системы линейно зависимы. В третьих, это случай совместности системы уравнений и, значит, в силу теоремы Кронекера–Капелли ранг расширенной матрицы системы должен совпадать с рангом основной матрицы. ☒

§ 7. Взаимное расположение трёх плоскостей в пространстве

Пусть три плоскости заданы общими уравнениями

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \tag{7.1}$$

$$p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \tag{7.2}$$

$$p_3: \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \tag{7.3}$$

в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — это взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Введём векторы нормалей к плоскостям

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3, \tag{7.4}$$

$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3, \tag{7.5}$$

$$\mathbf{n}_3 = A_3\mathbf{f}_1 + B_3\mathbf{f}_2 + C_3\mathbf{f}_3. \tag{7.6}$$

Случай 1. Три плоскости пересекаются в единственной точке. Это означает, что система уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \tag{7.7}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \tag{7.8}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \tag{7.9}$$

имеет единственное решение. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3.$$

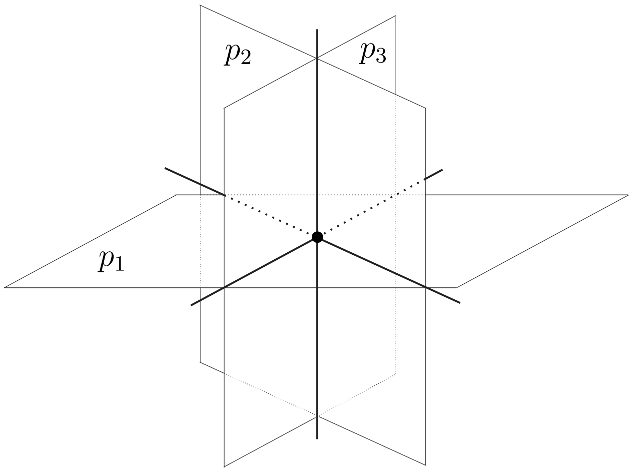

Рис. 73. Три плоскости пересекаются в одной точке.

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3.$$

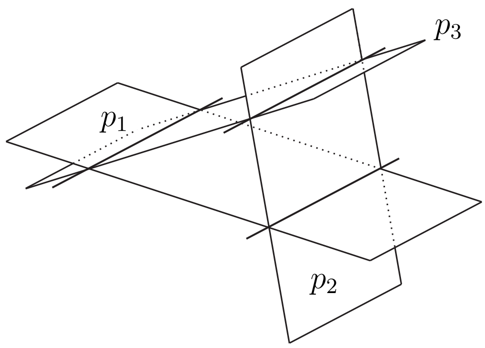

Рис. 74. Плоскости попарно пересекаются.

Случай 2. Плоскости попарно пересекаются, но три плоскости не имеют общих точек. Это означает, что любые два уравнения из трёх (7.7)–(7.9) имеют решения, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2. \tag{7.10}$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, система уравнений (7.7)–(7.9) трёх уравнений не имеет решений. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

□ Во–первых, в матрице системы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

любые две строчки линейно не зависимы и поэтому

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \geqslant 2.$$

Во–вторых, случай максимального ранга — это рассмотренный выше случай. ⊠

При этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3,$$

поскольку три плоскости не пересекаются, а значит, система уравнений (7.7)–(7.9) не имеет решений. Значит, по теореме Кронекера–Капелли ранг расширенной матрицы должен быть больше ранга основной матрицы. ⊠

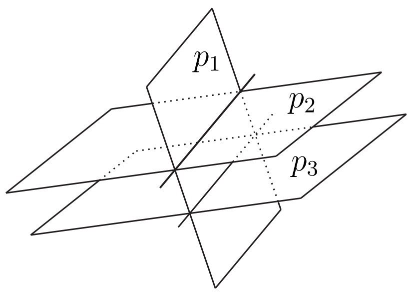

Рис. 75. Две плоскости параллельна, а третья их перескает.

Случай 3. Две плоскости параллельны параллельны, а третья их пересекает. Без ограничения общности будем считать, что плоскости

p_2 и p_3 параллельны, а плоскость p_1 их пересекает. Это означает, что система уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

не имеет решений, а системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

имеют решения, но соответствующие плоскости не совпадают (см. предыдущий параграф). Итак, с одной стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

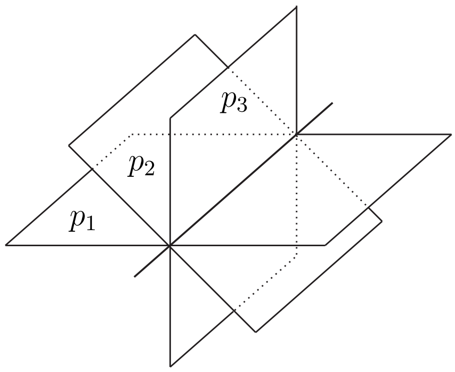

Рис. 76. Три плоскости пересекаются по общей прямой.

Случай 4. Три плоскости пересекаются по прямой. Это означает, что каждые две плоскости из двух пересекаются по прямой, т.е. каждые два уравнения из трёх (7.7)–(7.9) имеют решение — прямую (см. предыдущий параграф). Стало быть, с одной стороны, имеем

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, поскольку система уравнений (7.7)–(7.9) совместна, поэтому

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

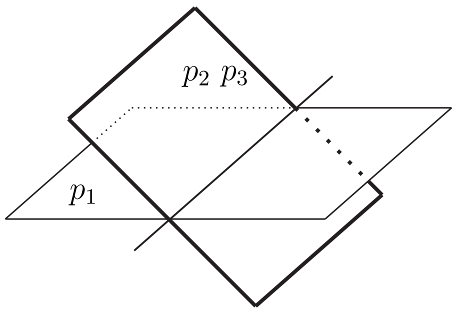

Рис. 77. Две плоскости совпадает, а третья из пересекает.

Случай 5. Две плоскости совпадают, а третья их пересекает. Без ограничения будем считать, что плоскости $p_2 = p_3$, а плоскость p_1 их пересекает. Это означает, что система уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

имеет бесконечно много решений (см. предыдущий параграф) и поэтому имеем

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

□ Действительно, одно из уравнений является следствием другого. Поэтому строчки

$$(A_2, B_2, C_2, D_2) \quad \text{и} \quad (A_3, B_3, C_3, D_3)$$

линейно зависимы. ⊠

С другой стороны, системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

и
$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$
имеют решение — прямую (пересекаются, но не совпадают). Тогда
$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$
Очевидно, что при этом
$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

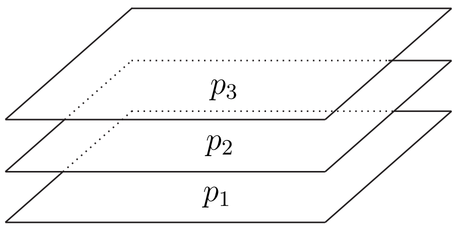

Рис. 78. Три плоскости параллельны.

Случай 6. Три плоскости параллельны. Это означает, что каждые два уравнения из системы трёх уравнений (7.7)–(7.9) не имеют решений (см. предыдущий параграф). Это означает, что
$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 1$$
и при этом
$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} =$$
$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

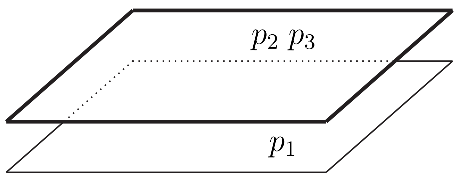

Рис. 79. Две плоскости совпадают, а третья им параллельна.

Случай 7. Две плоскости из трёх совпадают, а третья им параллельна. Без ограничения общности можно считать, что плоскости

$p_2 = p_3$, а плоскость p_1 им параллельна. Действительно, равенство $p_2 = p_3$ означает, что для системы уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

справедливы следующие выражения (см. предыдущий параграф):

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

☐ Одно из уравнений является следствием другого, т.е. строчки

$$(A_2, B_2, C_2, D_2) \quad \text{и} \quad (A_3, B_3, C_3, D_3)$$

линейно зависимы. ☒

С другой стороны, системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

не имеют решение вовсе. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1,$$

но при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

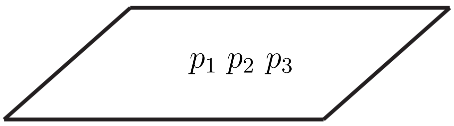

Рис. 80. Три плоскости совпадают.

Случай 8. Три плоскости совпадают. Это означает, что каждое уравнение из трёх является следствием любого из оставшихся уравнений, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

§ 8. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть прямые заданы своими векторными параметрическими уравнениями. Для удобства запишем эти уравнения в следующей форме:

$$l_1: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{a}t, \quad l_2: \quad \mathbf{r} = -\mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\tau, \quad t, \tau \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

Приравняем эти уравнения и получим уравнение

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}\tau. \tag{8.2}$$

Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это общая декартова система координат. Пусть в этой системе координат

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Тогда из (8.2) приходим к системе трёх уравнений относительно двух неизвестных t и τ :

$$a_x t + b_x \tau = c_x, \tag{8.3}$$

$$a_y t + b_y \tau = c_y, \tag{8.4}$$

$$a_z t + b_z \tau = c_z. \tag{8.5}$$

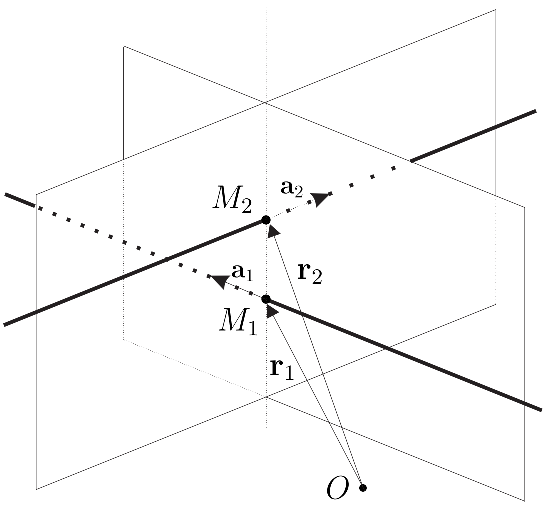

Рис. 81. Скрещивающиеся прямые.

Случай 1. Прямые скрещиваются. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 2,$$

а система уравнений (8.3)–(8.5) не имеет решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 3.$$

Случай 2. Прямые параллельны. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 1,$$

а система уравнений (8.3)–(8.5) не имеет решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 3. Прямые пересекаются. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 2,$$

а система уравнений (8.3)–(8.5) имеет единственное решение, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4. Прямые совпадают. Это означает, что направляющие векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 1,$$

а система уравнений (8.3)–(8.5) имеет бесконечное множество решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 1.$$

Лекция 11

ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА И ПАРАБОЛА

§ 1. Каноническое уравнение эллипса

Определение 1. *Эллипсом называется геометрическое место точек M на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами эллипса, есть постоянная величина, которая больше расстояния между фокусами.*

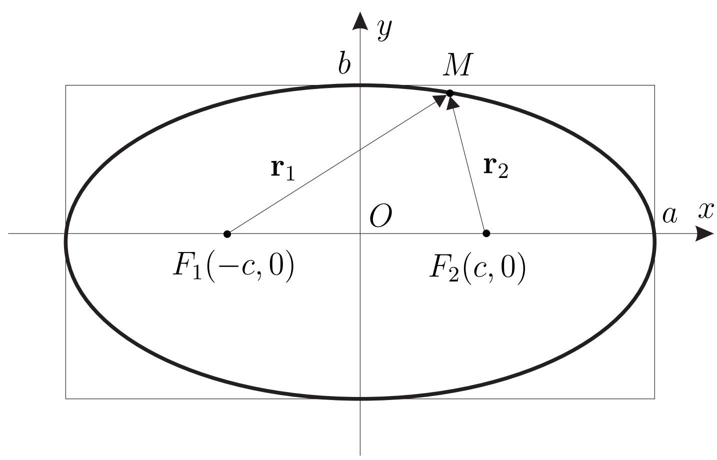

Рис. 82. Эллипс в канонической системе координат.

Замечание 4. Заметим из рисунка 1, что из треугольника $\triangle F_1MF_2$ вытекает, что эта сумма расстояний не может быть меньше расстояния между точками F_1F_2. С другой стороны, эта сумма расстояний может быть равна расстоянию между точками F_1F_2 — тогда точка M лежит на отрезке $[F_1F_2]$.

Особенно просто уравнение эллипса записывается в так называемой правой ортогональной декартовой системе координат. Пусть $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ — это прямоугольная правая декартова система координат, полученная следующим образом: точка O является серединой отрезка F_1F_2, образованного указанными в определении эллипса фокусами F_1 и F_2; в качестве орта $\mathbf{i}$ возьмём вектор

$$\mathbf{i} = \frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|},$$

а орт $\mathbf{j}$ ортогонален вектору $\mathbf{i}$ и такой, что на заданной плоскости базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ является правым.

Определение 2. *Построенная прямоугольная декартова система координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ называется канонической.*

Замечание 5. Таким образом, в канонической системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ ось Ox проходит через фокусы F_1F_2 с положительным направлением, совпадающим с направлением вектора $\overrightarrow{F_1F_2}$. Ось Oy перпендикулярна оси Ox и получается на заданной ориентированной в пространстве плоскости (на которой лежит эллипс) поворотом оси Ox на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

Вывод канонического уравнения эллипса в канонической системе координат. Пусть в канонической системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ фокусы F_1 и F_2 эллипса имеют следующие координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, а точка $M(x, y)$ — это точка принадлежащая эллипсу. Согласно определению эллипса имеем

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a > 0, \tag{1.1}$$

где

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

причём по определению эллипса имеем $2a > 2c$. После избавления от радикалов мы получим такое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \tag{1.2}$$

причём $a > c$.

□ Действительно, имеем следующую цепочку выражений:

$$\begin{gathered}
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow xc = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow (xc - a^2)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2y^2 + a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2xc \Leftrightarrow
\end{gathered}$$

$$\Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \quad \boxtimes$$

Введём обозначение $b := \sqrt{a^2-c^2}$, тогда уравнение (1.2) примет окончательный вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b>0. \tag{1.3}$$

Нам нужно теперь доказать, что все точки $M(x,y)$, удовлетворяющие уравнению (1.3), удовлетворяют уравнению (1.1).

□ Действительно, введём эксцентриситет

$$\varepsilon := \frac{c}{a} < 1. \tag{1.4}$$

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{x^2+2xc+c^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \\ = \sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+c^2+b^2}\,.$$

$$b^2=a^2-c^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=1-\frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1-\frac{b^2}{a^2}=\varepsilon^2,$$

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+c^2+b^2} = \\ = \sqrt{\varepsilon^2x^2+2\varepsilon ax+a^2} = |\varepsilon x+a| = \varepsilon x+a>0, \tag{1.5}$$

поскольку $|x| \leqslant a$ и $0<\varepsilon<1$. Аналогичным образом получаем равенство

$$\left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \\ = \sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-2xc+c^2+b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2} = \\ = \sqrt{\varepsilon^2x^2+2a\varepsilon x+a^2} = |\varepsilon x-a| = a-\varepsilon x>0. \tag{1.6}$$

Поэтому

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \varepsilon x+a+a-\varepsilon x=2a. \quad \boxtimes$$

Ф о р м а э л л и п с а. Заметим, что из уравнения (1.3) вытекает

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b.$$

□ Действительно,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \Rightarrow |x| \leqslant a \quad \text{и} \quad |y| \leqslant b. \quad \boxtimes$$

Следовательно, эллипс расположен в этом прямоугольнике.

Директориальное свойство эллипса. Из уравнений (1.5) и (1.6) вытекают равенства:

$$|\mathbf{r}_1| = \left|\overrightarrow{F_1M}\right| = a + x\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} + x\right) = \varepsilon d_1 \Rightarrow \frac{|\mathbf{r}_1|}{d_1} = \varepsilon,$$

$$|\mathbf{r}_2| = \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = a - x\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right) = \varepsilon d_2 \Rightarrow \frac{|\mathbf{r}_2|}{d_2} = \varepsilon.$$

Докажем, что d_1 — это расстояние от точки $M(x,y)$ до прямой $x = -a/\varepsilon$, а d_2 — это расстояние от точки $M(x,y)$ до прямой $x = a/\varepsilon$.

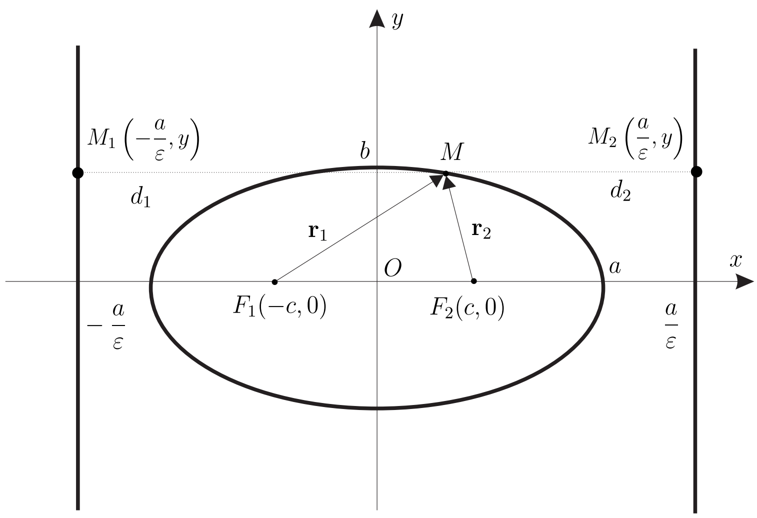

Рис. 83. Эллипс и его директрисы.

□ Действительно, сначала найдём расстояние от произвольной точки $M(x,y)$ эллипса в канонической декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ до прямой l_1, заданной уравнением

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

С этой целью опустим перпендикуляр из точки $M(x,y)$ на эту прямую. Точка M_1 пересечения прямой l_1 и этого перпендикуляра имеет координаты

$$M_1\left(-\frac{a}{\varepsilon}, y\right).$$

Но тогда искомое расстояние равно

$$d_1 = \left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \sqrt{\left(x + \frac{a}{\varepsilon}\right)^2 + (y-y)^2} = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{a}{\varepsilon} + x,$$

поскольку для точек $M(x,y)$ эллипса имеем $|x| \leqslant 1$ и $\varepsilon \in (0,1)$. Найдём теперь расстояние от точки $M(x,y)$ до прямой l_2, заданной уравнением

$$x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

С этой целью опустим перпендикуляр из точки $M(x,y)$ на прямую l_2. Пусть M_2 — это точка пересечения перпендикуляра и прямой l_2. Тогда точка M_2 имеет следующие координаты:

$$M_2\left(\frac{a}{\varepsilon}, y\right).$$

Но тогда искомое расстояние равно

$$d_2 = \left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{a}{\varepsilon}\right)^2 + (y-y)^2} = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{a}{\varepsilon} - x,$$

поскольку для точек $M(x,y)$ эллипса имеем

$$|x| \leqslant a \quad \text{и} \quad \varepsilon \in (0,1). \quad \boxtimes$$

О п р е д е л е н и е 3. *Прямые, в канонической системе координат имеющие уравнения $x = \pm a/\varepsilon$, называются директрисами.*

Т е о р е м а 1. *Отношение расстояния $|\mathbf{r}_j|$ от фокуса F_j до точки $M(x,y)$ эллипса к расстоянию d_j от этой точки до соответствующей директрисы при $j = 1,2$ в канонической системе координат есть величина постоянная, равная ε.*

§ 2. Каноническое уравнение гиперболы

О п р е д е л е н и е 4. *Гиперболой называется геометрическое место точек M на плоскости, модуль разности расстояний от которой до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемые полюсами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами и не равная нулю.*

З а м е ч а н и е 6. Отметим, что геометрическое место точек M таких, что

$$\left|\left|\overrightarrow{MF_1}\right| - \left|\overrightarrow{MF_2}\right|\right| = \left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|$$

— это два непересекающихся луча прямой (F_1F_2), исходящих из точек F_1 и F_2 и противоположно направленных. Кроме того, геометрическое место точек M :

$$\left|\left|\overrightarrow{MF_1}\right| - \left|\overrightarrow{MF_2}\right|\right| = 0$$

— это прямая, проходящая через середину отрезка $[F_1F_2]$ и перпендикулярно этому отрезку.

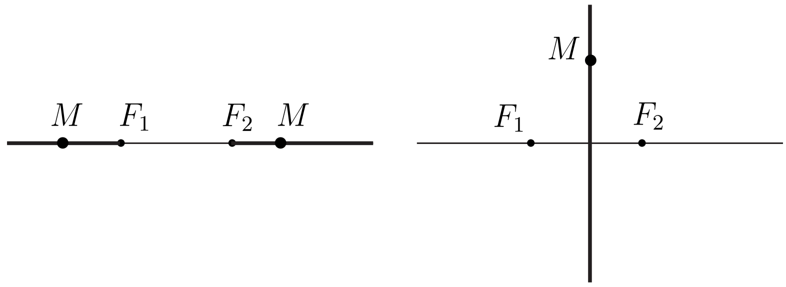

Рис. 84. Исключительные случаи.

Определение 5. *Канонической системой декартовых прямоугольных координат называется та же система координат* $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, *что и в случае эллипса.*

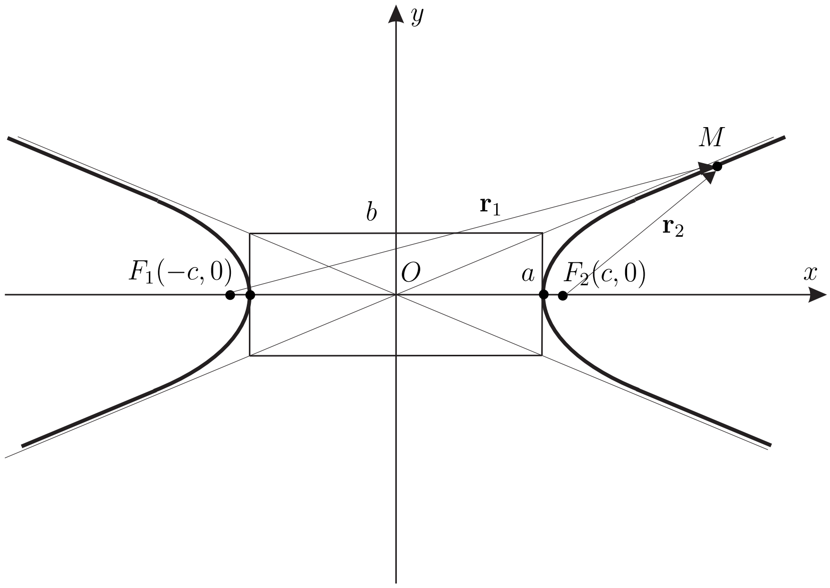

Рис. 85. Гипербола в канонической системе координат.

Уравнение гиперболы в канонической системе координат. Согласно определению 5 координаты фокусов имеют вид $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Тогда расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы до фокусов имеют следующий вид:

$$|\mathbf{r}_1| = \left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,, \quad |\mathbf{r}_2| = \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Тогда согласно определению 4 имеем

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a>0, \quad a<c. \tag{2.1}$$

Уничтожив радикалы мы получим равенство

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1. \tag{2.2}$$

☐ Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a, \quad 2a<2c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4xc=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow (xc-a^2)^2=a^2((x-c)^2+y^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2c^2+a^4-2xca^2=a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2-2xca^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1. \quad \boxtimes$$

Введём обозначение $b^2=c^2-a^2$ и получим искомое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.3}$$

Обратно покажем, что из уравнения (2.3) вытекает уравнение (2.1).

☐ Действительно, сначала введём эксцентриситет

$$\varepsilon := \frac{c}{a}>1.$$

$$\frac{b^2}{a^2}+1=\frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}+1=\varepsilon^2.$$

$$|\mathbf{r}_1|^2=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|^2=(x+c)^2+y^2=(x+c)^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=$$
$$=x^2+2xc+c^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2=\varepsilon^2x^2+2a\varepsilon x+a^2=|\varepsilon x+a|^2. \tag{2.4}$$

Аналогичным образом для фокуса $F_2(0,c)$ получаем следующую цепочку равенств:

$$|\mathbf{r}_2|^2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|^2=(x-c)^2+y^2=x^2-2xc+c^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=$$

$$= \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 - 2xc + c^2 - b^2 = \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon a x + a^2 = |\varepsilon x - a|^2. \quad (2.5)$$

Заметим, что $|\varepsilon x| > |x| \geqslant a$ и поэтому из формул (2.4) и (2.5) вытекают равенства

$$|\mathbf{r}_1| = \begin{cases} x\varepsilon + a, & \text{если} \quad x > 0; \\ -x\varepsilon - a, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases} \quad |\mathbf{r}_2| = \begin{cases} x\varepsilon - a, & \text{если} \quad x > 0; \\ -x\varepsilon + a, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

Таким образом, из равенств (2.6) имеем

$$|\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2| = 2a, \quad \text{если} \quad x > 0,$$
$$|\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2| = -2a, \quad \text{если} \quad x < 0.$$

Следовательно, во всех случаях

$$||\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2|| = 2a. \quad \boxtimes$$

А н а л и з ф о р м ы г и п е р б о л ы. Из уравнения гиперболы (2.3) вытекает равенство

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \geqslant 1 \Rightarrow |x| \geqslant |a| \Rightarrow |x| \geqslant a.$$

Если $|x| \neq a$, то

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \Rightarrow |y| = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = b\frac{|x|}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} < \frac{b}{a}|x|.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$-\frac{b}{a}x < y < \frac{b}{a}x \quad \text{при} \quad |x| > a,$$

а случаю $x = \pm a$ соответствует только $y = 0$. Обе ветви гиперболы лежат внутри области, заключённой между двумя прямыми

$$y = -\frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x \quad (2.7)$$

и вне полосы $|x| < a$. Эти прямые являются асимптотами гиперболы.

□ Действительно, имеем

$$|y| = b\frac{|x|}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = b\frac{|x|}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2} + \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{|x|^2}\right)\right) =$$
$$= b\frac{|x|}{a} - \frac{ab}{2}\frac{1}{|x|} + \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{|x|}\right). \quad \boxtimes$$

Д и р е к т о р и а л ь н о е с в о й с т в о г и п е р б о л ы. Заметим, что формулы (2.6) можно объединить следующим образом:

$$\begin{cases} |\mathbf{r}_1| = \varepsilon\,(x + a/\varepsilon) \\ |\mathbf{r}_2| = \varepsilon\,(x - a/\varepsilon) \end{cases} \quad \text{при} \quad x > 0, \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} |\mathbf{r}_1| = \varepsilon\,(-x - a/\varepsilon) \\ |\mathbf{r}_2| = \varepsilon\,(-x + a/\varepsilon) \end{cases} \quad \text{при} \quad x < 0. \tag{2.9}$$

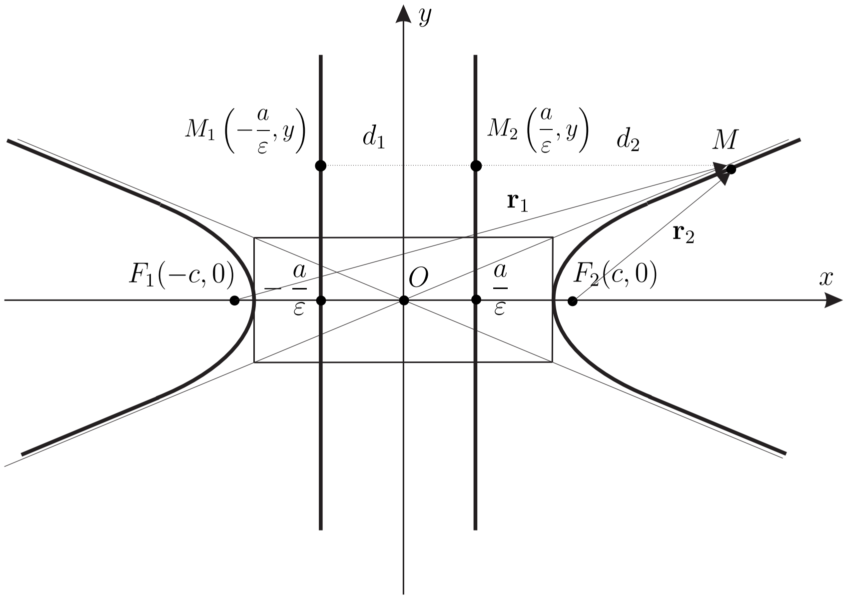

Рис. 86. Гипербола и её директрисы.

Дадим определение.

Определение 6. *Прямые, заданные в канонической системе координат* $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ *уравнениями*

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon},$$

называются директрисами.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Отношение расстояния* $|\mathbf{r}_j|$ *от фокуса* F_j *до точки* $M(x, y)$ *гиперболы к расстоянию* d_j *от этой точки до соответствующей директрисы при* $j = 1, 2$ *есть величина постоянная, равная* ε.

Доказательство.

Найдём расстояние от точки $M(x, y)$ гиперболы в канонической декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ до прямой

$$l_1: \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

Опустим перпендикуляр из точки $M(x, y)$ на эту прямую. Пусть M_1 — это основание этого перпендикуляра. Эта точка имеет следующие координаты:

$$M_1 = \left(-\frac{a}{\varepsilon}, y\right),$$

а расстояние от точки M до прямой l_1 равно

$$|\overrightarrow{MM_1}| = \sqrt{\left(x+\frac{a}{\varepsilon}\right)^2 + (y-y)^2} = \left|x+\frac{a}{\varepsilon}\right| = \begin{cases} x+\dfrac{a}{\varepsilon}, & \text{если} \quad x>0; \\ -x-\dfrac{a}{\varepsilon}, & \text{если} \quad x<0, \end{cases}$$

поскольку если $x > 0$, то

$$x + \frac{a}{\varepsilon} > 0.$$

Если же $x < 0$, то для точек гиперболы имеем $-x \geqslant a$ и при этом

$$-x - \frac{a}{\varepsilon} \geqslant a - \frac{a}{\varepsilon} = a\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \geqslant 0,$$

поскольку $\varepsilon > 1$.

Найдём теперь расстояние от точки $M(x, y)$ гиперболы до прямой

$$l_2: \quad x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

С этой целью опустим перпендикуляр из точки $M(x, y)$ перпендикуляр на прямую l_2. Пусть M_2 — это основание этого перпендикуляра. Это точка имеет следующие координаты:

$$M_2 = \left(\frac{a}{\varepsilon}, y\right).$$

Искомое расстояние от точки $M(x, y)$ до прямой l_2 равно

$$|\overrightarrow{MM_2}| = \sqrt{\left(x-\frac{a}{\varepsilon}\right)^2 + (y-y)^2} = \left|x-\frac{a}{\varepsilon}\right| = \begin{cases} x-\dfrac{a}{\varepsilon}, & \text{если} \quad x>0; \\ -x+\dfrac{a}{\varepsilon}, & \text{если} \quad x<0, \end{cases}$$

поскольку при $x > 0$ для точек гиперболы имеем $x > a$ и поэтому

$$x - \frac{a}{\varepsilon} \geqslant a - \frac{a}{\varepsilon} = a\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) > 0, \quad \varepsilon > 1.$$

Если же $x < 0$, то для точек гиперболы имеем $x \leqslant -a$ при этом имеем

$$-x + \frac{a}{\varepsilon} \geqslant a + \frac{a}{\varepsilon} > 0.$$

Теорема доказана.

Взаимно сопряжённые гиперболы.

Определение 7. *Две гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \textit{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

называются взаимно сопряжёнными.

Нетрудно заметить, что фокусы сопряженных гипербол лежат на окружности

$$|x| = c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

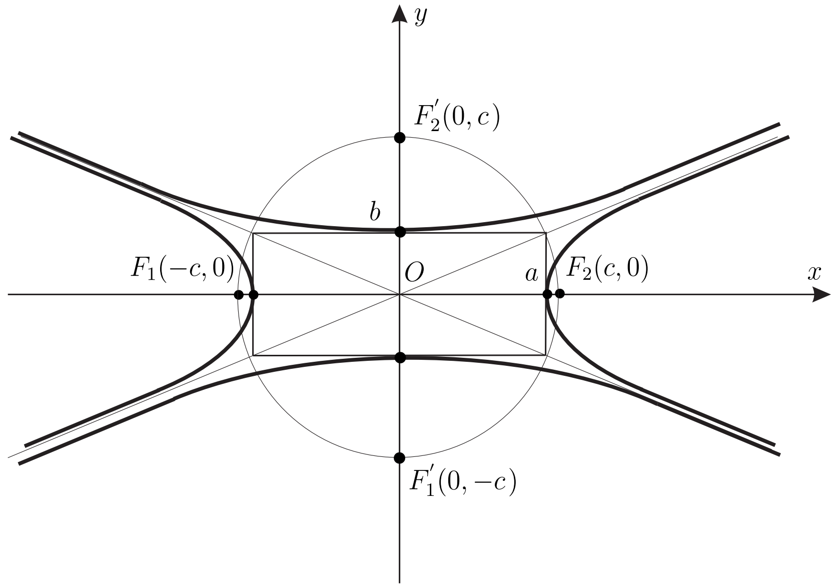

Рис. 87. Взаимно сопряжённые гиперболы.

§ 3. Каноническое уравнение параболы

Определение 8. *Параболой называется геометрическое множество точек M на плоскости, расстояние от каждой из которых до некоторой точки F, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой прямой, называемой директрисой.*

Замечание 7. Опустим из точки F перпендикуляр на директрису. Пусть F_1 — это основание перпендикуляра. Пусть точка O — это середина отрезка $[F_1F]$, а вектор

$$\mathbf{i} := \frac{\overrightarrow{F_1F}}{|\overrightarrow{F_1F}|}. \tag{3.1}$$

Единичный вектор $\mathbf{j}$ выберем ортогональным вектору $\mathbf{i}$ таким образом, чтобы упорядоченная двойка $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ была правой на заданной ориентированной плоскости.

Определение 9. *Канонической декартовой прямоугольной системой координат называется система координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.*

Уравнение параболы в канонической системе координат. Из определения 9 вытекает, что в канонической системе координат

$$F(p/2, 0) - \text{фокус}, \quad x = -\frac{p}{2} - \text{уравнение директрисы}.$$

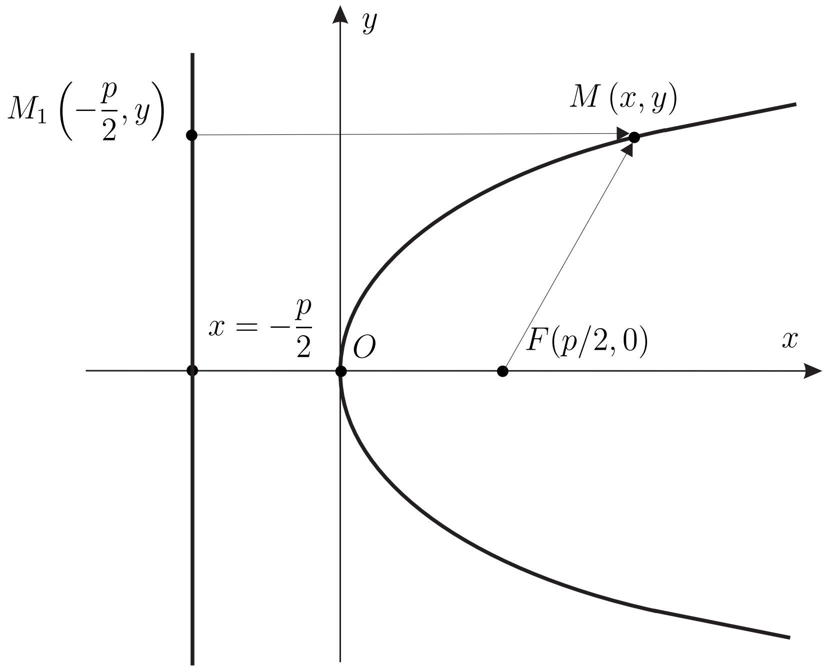

Рис. 88. Парабола в канонической системе координат.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы. Тогда

$$\left|\overrightarrow{FM}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\,.$$

Найдём расстояние от произвольной точки $M(x, y)$ параболы до директрисы

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Пусть M_1 — это основание перпендикуляра, опущенного из точки $M(x, y)$ на директрису. Тогда точка M_1 имеет координаты

$$M_1 = \left(-\frac{p}{2}, y\right).$$

Расстояние от точки $M(x, y)$ до директрисы равно

$$\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Согласно определению 8 параболы её уравнение имеет следующий вид:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|, \tag{3.2}$$

из которого вытекает уравнение

$$y^2 = 2px. \tag{3.3}$$

Обратно из уравнения (3.3) имеем

$$y^2 = 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\,.$$

§ 4. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе

Определение 10. *Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом единственную общую точку.*

Вывод уравнения касательной к эллипсу. Необходимо и достаточно найти условия существования единственного решения следующей системы уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \tag{4.1}$$

Справедливо следующее равенство:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + 2t\left(\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2}\right) + t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) = 1. \tag{4.2}$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на эллипсе, тогда приходим к следующему условию

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \tag{4.3}$$

Кроме того, тогда число $t = 0$ должно быть единственным решением квадратного уравнения (4.2). Следовательно, приходим к равенству

$$\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2} = 0. \tag{4.4}$$

В качестве направляющего вектора искомой касательной можно взять числа

$$l = \frac{y_0}{b^2}, \quad m = -\frac{x_0}{a^2}.$$

Тогда уравнение касательной имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{y_0/b^2} = \frac{y - y_0}{-x_0/a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0. \tag{4.5}$$

В силу первого равенства из (4.3) приходим к искомому уравнению (в канонической системе координат)

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{4.6}$$

Определение 11. *Касательной к гиперболе называется прямая, имеющая с гиперболой единственную общую точку и не параллельная асимптотам гиперболы.*

Уравнение касательной к гиперболе. Уравнение касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$ гиперболы в канонической системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{4.7}$$

□ Действительно, имеют место следующие уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt, \end{array} \right. \tag{4.8}$$

После подстановки уравнения прямой в уравнение гиперболы получим следующее равенство:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + 2t\left(\frac{lx_0}{a^2} - \frac{my_0}{b^2}\right) + \left(\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)t^2 = 1. \tag{4.9}$$

Потребуем, чтобы точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежала гиперболе, тогда получим равенство

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

в силу которого имеем из (4.9) получим следующее уравнение:

$$2Bt + At^2 = 0, \tag{4.10}$$

где

$$A := \frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}, \quad B := \frac{lx_0}{a^2} - \frac{my_0}{b^2}. \tag{4.11}$$

Согласно определению 11 касательная к гиперболе непараллельна асимптотам, поэтому векторы

$$\mathbf{a}_1 = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_2 = a\mathbf{i} - b\mathbf{j}$$

не коллинеарны направляющему вектору касательной

$$\mathbf{a} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j}.$$

Следовательно,

$$A \neq 0.$$

Поэтому необходимым и достаточным условием, чтобы система уравнений (4.8) имела единственное решение $t = 0$ — это условие, чтобы

$$B = \frac{lx_0}{a^2} - \frac{my_0}{b^2} = 0. \tag{4.12}$$

В качестве координат $\{l, m\}$ направляющего вектора касательной можно взять следующие

$$l = \frac{y_0}{b^2}, \quad m = \frac{x_0}{a^2}. \tag{4.13}$$

Итак, уравнение касательной имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{y_0/b^2} = \frac{y - y_0}{x_0/a^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \quad \boxtimes \tag{4.14}$$

Определение 12. *Касательной к параболе называется прямая, имеющая с параболой единственную точку и не параллельная оси параболы.*

Уравнение касательной к параболе. Уравнение касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$ параболы в канонической системе координат имеет следующий вид:

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{4.15}$$

$\square$ Действительно, будем искать единственное решение системы уравнений

$$y^2 = 2px \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \tag{4.16}$$

После подстановки уравнения прямой в уравнение параболы получим следующее уравнение:

$$y_0^2 + 2my_0 t + m^2 t^2 = 2px_0 + 2plt. \tag{4.17}$$

Потребуем, чтобы

$$y_0^2 = 2px_0. \tag{4.18}$$

Согласно определению 12 имеем направляющий вектор искомой касательной

$$\mathbf{a} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j}$$

не должен быть коллинеарен вектору

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{i},$$

который сонаправлен с осью параболы. Следовательно, $m \neq 0$. Итак, с учётом (4.18) из (4.17) получим уравнение

$$m^2 t^2 + (my_0 - pl)t = 0. \tag{4.19}$$

Поскольку $m \neq 0$, то для существования единственного решения $t = 0$ последнего квадратного уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$my_0 - pl = 0.$$

Тогда в качестве координат направляющего вектора искомой касательной можно взять

$$l = \frac{y_0}{p}, \quad m = 1.$$

Итак, уравнение касательной имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{y_0/p} = \frac{y - y_0}{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0}{p}(y - y_0) = x - x_0 \Leftrightarrow \frac{yy_0}{p} = x - x_0 + \frac{y_0^2}{p} = x - x_0 + 2x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow yy_0 = p(x + x_0). \quad \boxtimes \qquad (4.20)$$

§ 5. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

Оптическое свойство эллипса.

Теорема 3. *Фокальные радиусы произвольной точки M_0 эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке M_0.*

Доказательство.

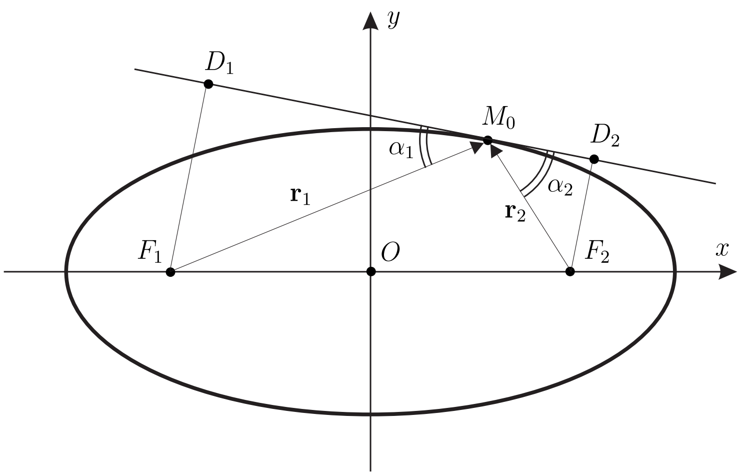

Рис. 89. Оптическое свойство эллипса.

Вычисли расстояние от фокусов F_1 и F_2 до касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$. Поскольку уравнение касательной в канонической системе координат имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

а фокусы имеют координаты $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ имеют место равенства

$$\left|\overrightarrow{F_1D_1}\right| = \frac{\left|(-c)\cdot x_0/a^2 + 0\cdot y_0/b^2 - 1\right|}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \frac{|\varepsilon x_0 + a|}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \\ = \frac{\varepsilon x_0 + a}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \frac{|\mathbf{r}_1|}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}.$$

Отсюда

$$\sin\alpha_1 = \frac{\left|\overrightarrow{F_1D_1}\right|}{\left|\overrightarrow{F_1M_0}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{F_1D_1}\right|}{|\mathbf{r}_1|} = \frac{1}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}.$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$\left|\overrightarrow{F_2D_2}\right| = \frac{\left|c\cdot x_0/a^2 + 0\cdot y_0/b^2 - 1\right|}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \frac{|\varepsilon x_0 - a|}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \\ = \frac{a - \varepsilon x_0}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \frac{|\mathbf{r}_2|}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\sin\alpha_2 = \frac{\left|\overrightarrow{F_2D_2}\right|}{\left|\overrightarrow{F_2M_0}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{F_2D_2}\right|}{|\mathbf{r}_2|} = \frac{1}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}.$$

Из равенства синусов углов вытекает равенство углов.

Теорема доказана.

Оптическое свойство гиперболы.

Теорема 4. *Фокальные радиусы произвольной точки M_0 гиперболы составляют равные углы с касательной к гиперболе, проведенной через точку M_0.*

Доказательство. Уравнение касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$ гиперболы имеет следующий вид:

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Поэтому расстояние от фокуса $F_1(-c,0)$ до этой касательной равно

$$\left|\overrightarrow{F_1D_1}\right| = \frac{\left|-\dfrac{x_0c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}\,|\varepsilon x_0 + a| = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}\left|\overrightarrow{F_1M_0}\right|,$$

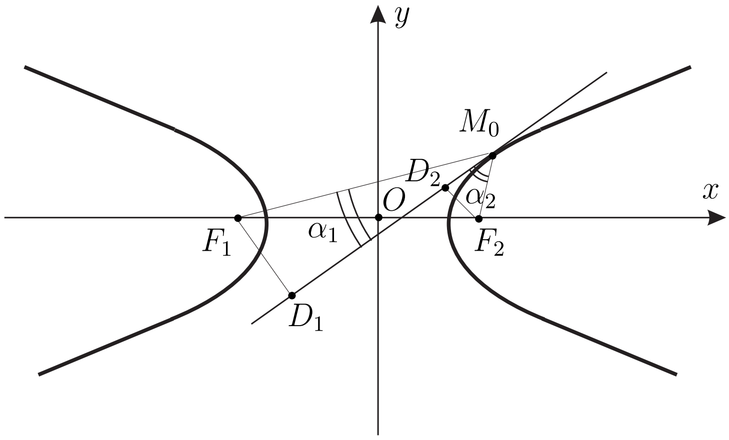

Рис. 90. Оптическое свойство гиперболы.

а расстояние от фокуса $F_2(c, 0)$ до указанной касательной равно

$$\left|\overrightarrow{F_2D_2}\right| = \frac{\left|\dfrac{x_0c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} \left|\varepsilon x_0 - a\right| = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} \left|\overrightarrow{F_2M_0}\right|.$$

Таким образом, приходим к следующей цепочке равенств:

$$\sin\alpha_1 = \frac{\left|\overrightarrow{F_1D_1}\right|}{\left|\overrightarrow{F_1M_0}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{F_2D_2}\right|}{\left|\overrightarrow{F_2M_0}\right|} = \sin\alpha_2.$$

Теорема доказана.

Оптическое свойство параболы.

Теорема 5. *Фокальный радиус произвольной точки M_0 параболы и ось параболы составляют равные углы с касательной к параболе, проведённой через точку M_0.*

Доказательство. Из уравнения касательной

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

к параболе в точке $M_0(x_0, y_0)$ вытекает, что касательная пересекает ось абсцисс Ox в точке $A(-x_0, 0)$.

Следовательно, с одной стороны,

$$|AO| = x_0, \quad |AF| = |AO| + |OF| = x_0 + \frac{p}{2}.$$

С другой стороны, имеем согласно определению параболы

$$|M_0F| = |M_0D| = |M_0C| + |CD| = x_0 + \frac{p}{2}.$$

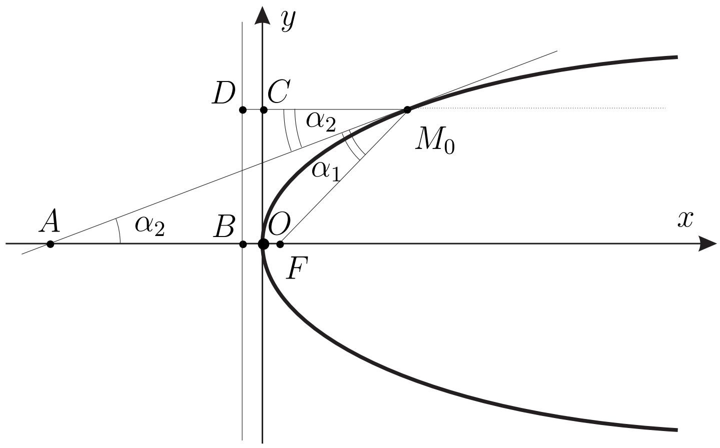

Рис. 91. Оптическое свойство параболы.

Таким образом, $|AF| = |M_0F|$. Значит,

$$\angle FAM_0 = \angle AM_0F,$$

но

$$\angle FAM_0 = \angle DM_0A \Rightarrow \angle DM_0A = \angle AM_0F.$$

Теорема доказана.

§ 6. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы

Полярное уравнение параболы. Введём полярную систему координат $\{F, \mathbf{i}\}$, где F — это фокус параболы, а полярная ось определяется вектором $\mathbf{i}$ из равенства (3.1) и, в частности, совпадает с осью абсцисс Ox соответствующей канонической прямоугольной декартовой системы координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Тогда справедливы следующие формулы, связывающие декартовы координаты в канонической системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ с полярными координатами в полярной системе координат $\{F, \mathbf{i}\}$ точек плоскости:

$$\left\{ \begin{array}{c} x - p/2 = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{array} \right. \tag{6.1}$$

Согласно определению параболы имеет место равенство

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{6.2}$$

Из формул (6.1) и (6.2) вытекает равенство

$$r = p + r\cos\varphi,$$

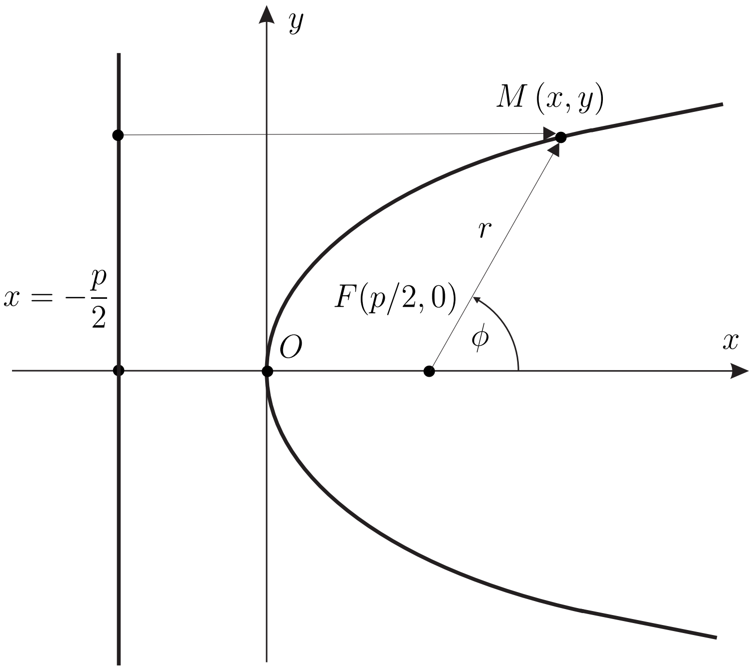

Рис. 92. Парабола в полярной системе координат.

из которого получаем полярное уравнение параболы

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}. \tag{6.3}$$

Замечание 8. Отметим, что углам $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ не отвечает ни одна точка параболы. Поэтому знаменатель в полярном уравнении параболы не обращается в ноль.

Полярное уравнение эллипса-I. Выберем полярную систему координат $\{F_1, \mathbf{i}\}$, где

$$\mathbf{i} = \frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|},$$

т. е. в качестве полюса выберем левый фокус F_1, а в качестве полярной оси выберем ось абсцисс соответствующей канонической декартовой системы координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Справедливы следующие формулы, связывающие декартовы (x, y) и полярные координаты (r, φ) точек плоскости

$$\left\{\begin{aligned} x + c &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right. \tag{6.4}$$

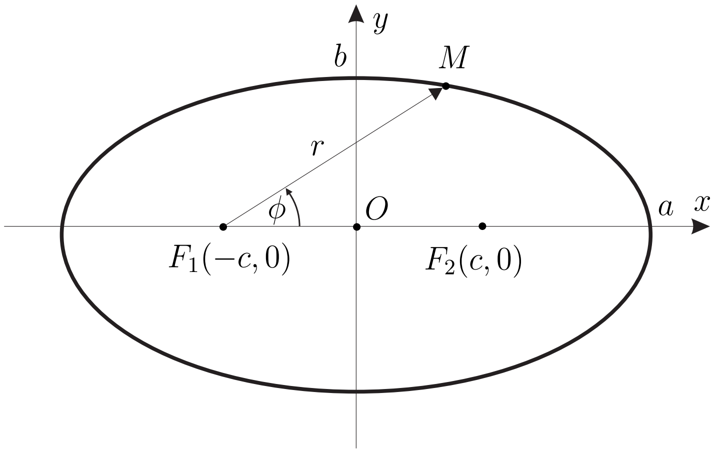

Рис. 93. Эллипс в полярной системе координат $\{F_1, \mathbf{i}\}$.

в канонической декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ и в выбранной полярной системе координат $\{F_1, \mathbf{i}\}$.

Кроме того, справедливо следующее равенство для эллипса

$$r = \varepsilon x + a. \tag{6.5}$$

Из уравнений (6.7) и (6.5) вытекает следующая цепочка равенств:

$$r = \varepsilon\,(-c + r\cos\varphi) + a \Rightarrow r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

где

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1, \quad p := -\varepsilon c + a = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Таким образом, получили <u>полярное уравнение эллипса</u>

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} < 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{6.6}$$

в полярной системе координат $\{F_1, \mathbf{i}\}$.

Замечание 9. Поскольку $\varepsilon \in (0, 1)$, то знаменатель в полярном уравнении (6.6) эллипса никогда не обращается в ноль.

Полярное уравнение эллипса-II. Выберем полярную систему координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$.

Справедливы следующие формулы, связывающие декартовы (x, y) и полярные координаты (r, φ) точек плоскости

$$\begin{cases} x - c = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{6.7}$$

в канонической декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ и в выбранной полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$.

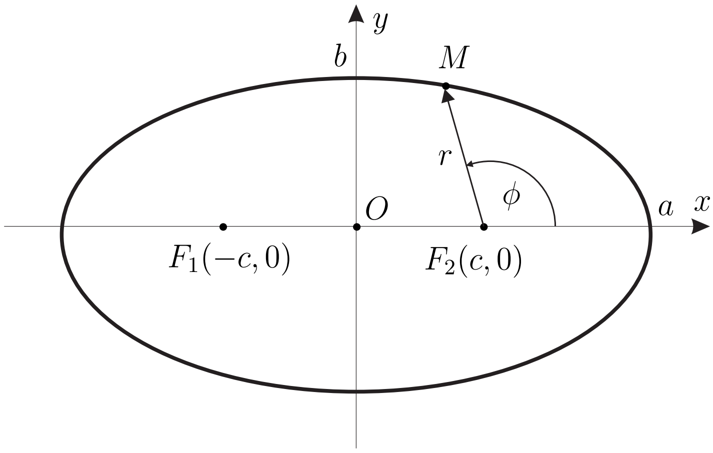

Рис. 94. Эллипс в полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$.

Для эллипса в выбранной полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$ справедливо следующее равенство:

$$r = a - \varepsilon x \Rightarrow r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}. \tag{6.8}$$

Полярное уравнение гиперболы-I. Выберем полярную систему координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$, где

$$\mathbf{i} := \frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|},$$

т. е. полюс полярной системы координат совпадает с фокусом F_2, а полярная ось совпадает с осью абсцисс Ox канонической декартовой системы координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Связь декартовых и полярных координат точек плоскости имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - c = r\cos\varphi, \\ \quad y = r\sin\varphi. \end{array} \right. \tag{6.9}$$

Для правой ветви гиперболы ($x > 0$)

$$r = \varepsilon x - a. \tag{6.10}$$

Из уравнений (6.9) и (6.10) приходим к полярному уравнению правой ветви гиперболы

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} > 1 \tag{6.11}$$

в полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$.

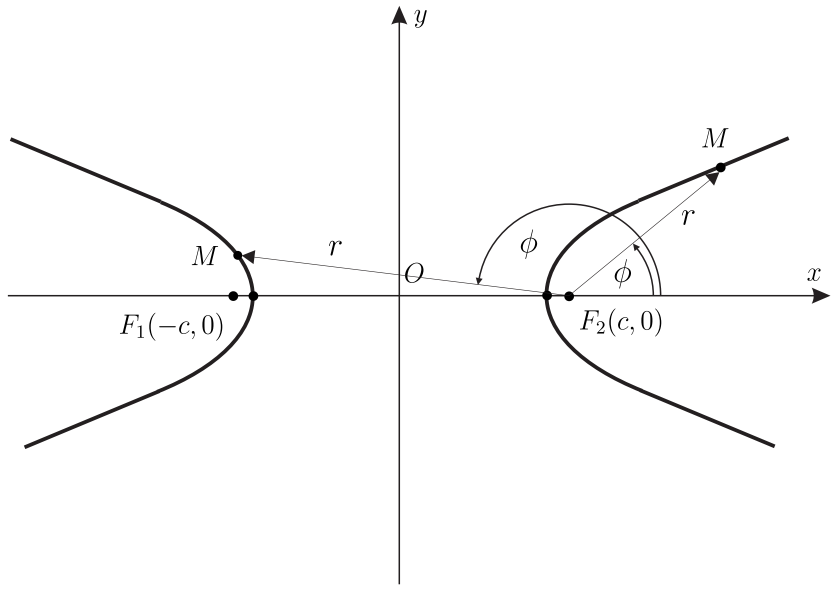

Рис. 95. Гипербола в полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$.

З а м е ч а н и е 10. Отметим, что в полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$ уравнение правой ветви гиперболы корректно при

$$\cos\varphi < \frac{1}{\varepsilon} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} =: \cos\vartheta,$$

т. е. когда

$$\vartheta < \varphi < 2\pi - \vartheta,$$

но именно таким углам φ соответствуют точки правой ветви гиперболы в полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$.

Для левой ветви гиперболы ($x < 0$) имеем равенство

$$r = -\varepsilon x + a. \tag{6.12}$$

Поэтом из равенств (6.9) и (6.12) получим следующее <u>полярное уравнение левой ветви гиперболы</u>:

$$r = -\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}. \tag{6.13}$$

З а м е ч а н и е 11. Уравнение (6.13) левой ветви гиперболы в полярной системе координат $\{F_2, \mathbf{i}\}$ корректно при условии, что

$$\cos\varphi < -\frac{1}{\varepsilon},$$

но именно этим углам соответствуют точки левой ветви гиперболы.

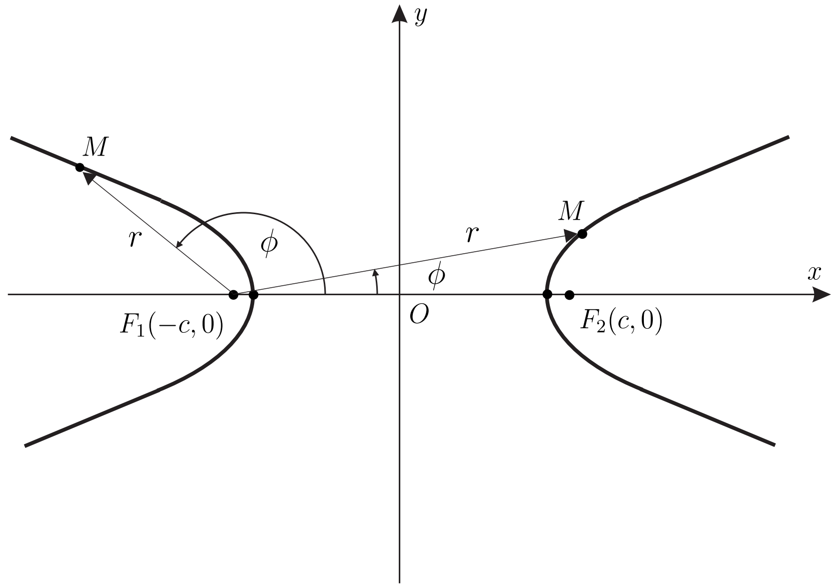

Рис. 96. Гипербола в полярной системе координат $\{F_1, \mathbf{i}\}$.

Полярное уравнение гиперболы-II. Выберем полярную систему координат $\{F_1, \mathbf{i}\}$, т. е. полюс полярной системы координат совпадает с фокусом F_1, а полярная ось совпадает с осью абсцисс Ox канонической декартовой системы координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Связь декартовых и полярных координат точек плоскости имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + c = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{array} \right. \tag{6.14}$$

Рассмотрим сначала правую ветвь $x > 0$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$r = \varepsilon x + a \Rightarrow r = -\frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}. \tag{6.15}$$

Замечание 12. Это уравнение правой ветви гиперболы корректно при условии, что

$$\cos\varphi > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varphi \in (-\vartheta, \vartheta), \quad \cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

но именно этим углам соответствуют точки правой ветви гиперболы.

Рассмотрим теперь левую ветвь гиперболы ($x < 0$). Для левой ветви справедливо следующее равенство:

$$r = -\varepsilon x - a \Rightarrow r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}. \tag{6.16}$$

З а м е ч а н и е 13. Это уравнение корректно при условии, что

$$\cos\varphi > -\frac{1}{\varepsilon},$$

но именно этим углам соответствуют точки левой ветви гиперболы.

Лекция 12

ПРИВЕДЕНИЕ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

§ 1. Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости

Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — это исходная декартова прямоугольная система координат на ориентированной плоскости, а $\{O^{'}, \mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\}$ — это другая прямоугольная декартова система координат. Нужно получить формулы, связывающие координаты одной и той же точки в этих системах координат:

$$M(x, y) \quad \text{и} \quad M(x^{'}, y^{'}).$$

Сначала рассмотрим случай $O^{'} = O$. Рассмотрим две системы полярных координат, связанных с системой координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и «повёрнутой» системой координат $\{O, \mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\}$: Пусть (ρ, φ) — это поляр-

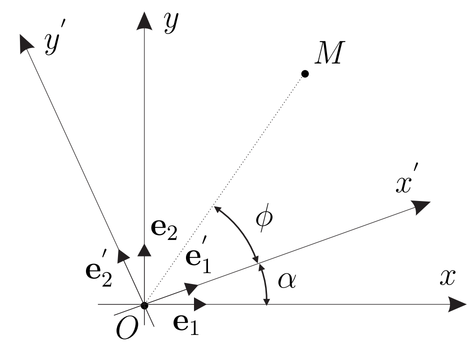

Рис. 97. Системы координат.

ные координаты точки M относительно системы координат $\{O, \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$, т. е. с полярной осью $Ox^{'}$. [1] Тогда $(\rho, \varphi + \alpha)$ — это полярные координаты той же точки относительно системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, т. е. с

[1] Здесь имеется в виду, что $\varphi \in [0, 2\pi)$ — угол, отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox' до радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$.

полярной осью Ox. [1]) Тогда имеют место следующие формулы:

$$x = \rho\cos(\varphi+\alpha), \quad y = \rho\sin(\varphi+\alpha), \tag{1.1}$$

$$x' = \rho\cos\varphi, \quad y' = \rho\sin\varphi. \tag{1.2}$$

Справедливы следующие две цепочки равенств:

$$x = \rho\cos(\varphi+\alpha) = \rho\cos\varphi\cos\alpha - \rho\sin\varphi\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \tag{1.3}$$

$$y = \rho\sin(\varphi+\alpha) = \rho\sin\varphi\cos\alpha + \rho\cos\varphi\sin\alpha = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha. \tag{1.4}$$

Итоговые формулы (1.3) и (1.4) можно записать в следующем компактном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Теперь опять в случае $O' = O$ нужно получить формулы, связывающие базисы $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$: По правилу треугольника имеем

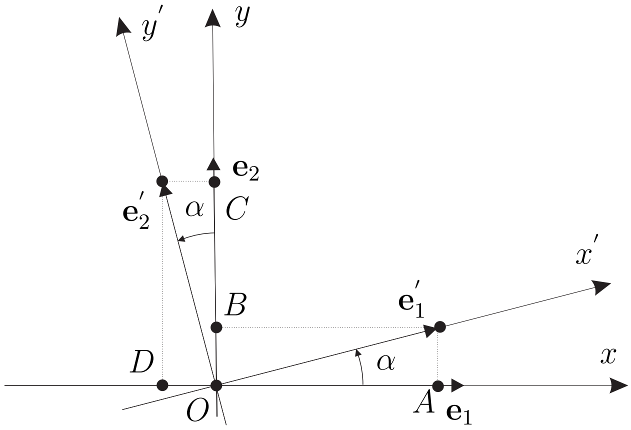

Рис. 98. Базисные векторы.

$$\mathbf{e}_1' = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OA} = OA\cdot\mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{OB} = OB\cdot\mathbf{e}_2. \tag{1.6}$$

Справедливы следующие равенства:

$$OA = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_1) = |\mathbf{e}_1'||\mathbf{e}_1|\cos\alpha = \cos\alpha, \tag{1.7}$$

$$OB = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_1'||\mathbf{e}_2|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \tag{1.8}$$

---

[1]) Угол $\alpha \in [0, 2\pi)$ и отсчитывается от оси Ox до оси Ox' против часовой стрелки.

где угол $\alpha \in [0, 2\pi)$ — угол между осью Ox и осью Ox', отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox. Следовательно, из равенств (1.6)–(1.8) получаем равенство

$$\mathbf{e}_1' = \cos\alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\alpha \cdot \mathbf{e}_2. \tag{1.9}$$

Для вектора $\mathbf{e}_2^{'}$ справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{e}_2^{'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}. \tag{1.10}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{OC} = OC \cdot \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{OD} = OD \cdot \mathbf{e}_1, \tag{1.11}$$

$$OC = (\mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_2^{'}||\mathbf{e}_2| \cos\alpha, \tag{1.12}$$

$$OD = (\mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_1) = |\mathbf{e}_2^{'}||\mathbf{e}_1| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right). \tag{1.13}$$

Итак, из равенств (1.10)–(1.13) вытекает искомое выражение

$$\mathbf{e}_2^{'} = -\sin\alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \cos\alpha \cdot \mathbf{e}_2. \tag{1.14}$$

Равенства (1.9) и (1.14) можно переписать в компактной форме с учётом правила умножения строчки на матрицу:

$$(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

☐ Действительно, согласно правилу «строчка на столбец» получим следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$
$$= (\mathbf{e}_1 \cdot \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \sin\alpha, -\mathbf{e}_1 \cdot \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \cos\alpha), \tag{1.16}$$

а из равенства строчек

$$(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) = (\mathbf{e}_1 \cdot \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \sin\alpha, -\mathbf{e}_1 \cdot \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \cos\alpha)$$

мы получим равенства (1.9) и (1.14). ☒

Теперь мы рассмотрим общую ситуацию: $O^{'} \neq O$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}M}. \tag{1.17}$$

Пусть

$$\overrightarrow{OO^{'}} = \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \beta \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

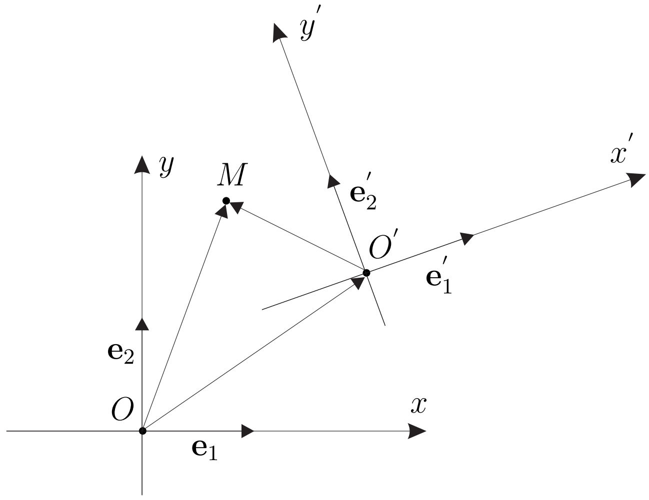

Рис. 99. Поворот и сдвиг системы координат.

$$\overrightarrow{O'M} = x' \cdot \mathbf{e}_1' + y' \cdot \mathbf{e}_2' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Из равенств (1.17)–(1.20) и из выражения (1.15) вытекает следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \\ + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right]. \tag{1.22}$$

$\square$ Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + d_1\mathbf{e}_1 + d_2\mathbf{e}_2 = \\ = (c_1 + d_1)\mathbf{e}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \end{pmatrix} = \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right]. \quad \boxtimes$$

Произведение

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

— это некоторый столбец. Поэтому из равенства (1.21) в силу свойства (1.22) приходим к следующему равенству:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \tag{1.23}$$

где

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Заметим, что согласно правилу умножения «строчка на столбец» имеем

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2,$$

а в силу (1.23) мы приходим к следующему равенству:

$$z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \tag{1.25}$$

которое в силу линейной независимости базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ эквивалентно равенствам

$$z_1 = z_2 = 0.$$

Отсюда и из (1.24) получаем искомое равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

или в развёрнутой форме

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y', \\ y &= y_0 + \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y'. \end{aligned}$$

§ 2. Матричная форма записи преобразований на плоскости в однородных координатах

Введём следующие обозначения:

$$R := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Тогда матричное уравнение (1.26) с учётом обозначений (2.1), (2.2) можно переписать в следующей компактной матричной форме записи:

$$X = X_0 + RX'. \tag{2.3}$$

Отметим, что справедливо следующее утверждение:
Лемма 1. *Имеет место равенства* $|R| = 1$ *и* $R^T = R^{-1}$.

Доказательство.

Первое утверждение тривиально. Для доказательства второго нужно заметить, что преобразование R — преобразование поворота на угол $\alpha \in [0, 2\pi)$, а обратное преобразование — поворот на угол $-\alpha$. Следовательно,

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R^T.$$

Хотя, можно проверить и непосредственно. Справедливы следующие равенства:

$$R^T R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R R^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

С учётом результата этой леммы справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} X - X_0 = RX' \Leftrightarrow X' = R^{-1}(X - X_0) = R^T(X - X_0) = \\ = -R^T X_0 + R^T X \Leftrightarrow X' = X_0' + R^T X, \quad X_0' = -R^T X_0. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Запись преобразований плоскости в однородных координатах. Выпишем следующие столбцы:

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \frac{X}{1} \right\|, \quad Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \frac{X'}{1} \right\|. \qquad (2.5)$$

Введём теперь расширенную матрицу преобразования

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|. \qquad (2.6)$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Матрица P обратима и обратная имеет следующий вид*:

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x_0' \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y_0' \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|. \qquad (2.7)$$

Доказательство.

Используя правило перемножения блочных матриц, получим следующую цепочку равенств:

$$P^{-1} \cdot P = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} R^T R & R^T X_0 - R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \mathbb{I} & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P \cdot P^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} RR^T & -RR^T X_0 + X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \mathbb{I} & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Справедливы следующие равенства*:

$$Z = PZ^{'}, \quad Z^{'} = P^{-1} Z.$$

Доказательство.

$$PZ^{'} = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X^{'} \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} R \cdot X^{'} + X_0 \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\| = Z;$$

$$P^{-1} \cdot Z = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} R^T \cdot X - R^T \cdot X_0 \\ \hline 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} R^T \cdot (X - X_0) \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} X^{'} \\ \hline 1 \end{array} \right\| = Z^{'}.$$

Лемма доказана.

Замечание 14. Справедливо равенство

$$P^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x_0^{'} \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y_0^{'} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

где

$$X_0^{'} = -R^T X_0,$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} x_0^{'} = -x_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha, \\ y_0^{'} = x_0 \sin\alpha - y_0 \cos\alpha. \end{cases}$$

§ 3. Уравнения квадрики на плоскости

Пусть на ориентированной плоскости задана декартова прямоугольная система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Определение 1. *Линия на плоскости, координаты точек $M(x, y)$ которой и только они являются решениями уравнения*

$$F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \tag{3.1}$$

причём коэффициенты этого уравнения вещественные числа и

$$|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| > 0$$

называется уравнением линии второго порядка или квадрикой.

Введём следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad B = (b_1, b_2), \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.1) квадрики можно записать в следующем виде:

$$X^T AX + 2BX + c = 0. \tag{3.2}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$X^T AX = (x, y) \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{12}x + a_{22}y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{12}yx + a_{22}y^2. \tag{3.3}$$

⊠

Уравнение квадрики в однородных координатах. Рассмотрим следующие блочные матрицы:

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\|, \quad Z = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\|. \tag{3.4}$$

Тогда уравнение квадрики (3.2) можно записать в следующем виде:

$$Z^T DZ = 0. \tag{3.5}$$

□ Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \, X^T \middle| 1 \, \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\| &= \\ &= \left\| \, X^T A + B \,\middle|\, X^T B^T + c \, \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \\ &= X^T AX + BX + X^T B^T + c = X^T AX + 2BX + c, \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством $BX = (BX)^T = X^T B^T$, которое справедливо, поскольку произведение BX — число. ⊠

§ 4. Ортогональные преобразования уравнения квадрики

Рассмотрим на плоскости помимо $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ещё одну декартову прямоугольную систему координат $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$, полученную из $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ параллельным переносом и поворотом. Напомним, что однородные координаты в этих системах координат связаны соотношением

$$Z = PZ', \quad P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|, \tag{4.1}$$

где

$$Z = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right\|, \quad Z' = \left(\begin{array}{c} x' \\ y' \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right\|.$$

После подстановки в уравнение (3.5) преобразования (4.1) получим следующую цепочку равенств:

$$0 = Z^T DZ = Z'^T P^T DPZ' = Z'^T D' Z',$$

где

$$D' = P^T DP, \quad D' = \left\|\begin{array}{c|c} A' & B'^T \\ \hline B' & c' \end{array}\right\|. \tag{4.2}$$

$$\square \quad P^T \cdot D = \left\|\begin{array}{c|c} R^T & O \\ \hline X_0^T & 1 \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|c} R^T A & R^T B^T \\ \hline X_0^T A + B & X_0^T B^T + c \end{array}\right\|,$$

$$\begin{aligned} \left(P^T \cdot D\right) \cdot P &= \left\|\begin{array}{c|c} R^T A & R^T B^T \\ \hline X_0^T A + B & X_0^T B^T + c \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| = \\ &= \left\|\begin{array}{c|c} R^T AR & R^T AX_0 + R^T B^T \\ \hline X_0^T AR + BR & X_0^T AX_0 + BX_0 + X_0^T B^T + c \end{array}\right\| = \\ &= \left\|\begin{array}{c|c} R^T AR & R^T (AX_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T A + B)R & X_0^T AX_0 + 2BX_0 + c \end{array}\right\|, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где мы воспользовались равенством $X_0^T B^T = BX_0$, поскольку это матрица размера 1×1 — число, а также тем, что $A^T = A$. Сравнивая формулы (4.2) и (4.3) мы получим равенства

$$A' = R^T AR, \quad B' = (X_0^T A + B)R, \quad c' = X_0^T AX_0 + 2BX_0 + c, \tag{4.4}$$

а уравнение квадрики в новой системе координат примет следующий вид:

$$X'^T A' X' + 2B' X' + c' = 0. \quad \boxtimes \tag{4.5}$$

Наблюдение 1. Матрица A меняется только при повороте.

Наблюдение 2. Матрица B меняется и при повороте и при параллельном переносе.

Наблюдение 3. Свободный член c меняется только при параллельном переносе.

Ортогональные инварианты уравнения квадрики.

Теорема 1. *При ортогональных преобразованиях декартовой прямоугольной системы координат величины*

$$S := \operatorname{tr} A, \quad \delta := \det A, \quad \triangle := \det D \tag{4.6}$$

не изменяются.

Доказательство.

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}(R^T A R) = \operatorname{tr}(A R R^T) = \operatorname{tr}(A R R^{-1}) = \operatorname{tr} A;$$

$$\det A' = \det(R^T A R) = \det R^T \det A \det R = \det A, \quad \det R = 1;$$

$$\det D' = \det(P^T D P) = \det P^T \det D \det P = \det D, \quad \det P = 1.$$

Теорема доказана.

Определение 2. *Величины* (4.6) *называются ортогональными инвариантами.*

§ 5. Уничтожение слагаемого $2a_{12}xy$ при помощи поворота на угол α

Задача заключается в том, чтобы найти поворот на такой угол α, при котором справедливо равенство

$$A' = R^T A R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Лемма 4. *При наличии в уравнении квадрики* (3.1) *слагаемого $2a_{12}xy$ необходимо выполняется условие $\lambda_1 \neq \lambda_2$* [1].

Доказательство.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда

$$A = (R^T)^{-1} A' R^{-1} = R A' R^{-1} = R\,(\lambda \mathbb{I})\,R^{-1} = \lambda R R^{-1} = \lambda \mathbb{I}.$$

Лемма доказана.

Замечание 15. Числа λ_1 и λ_2 могут быть найдены с помощью ортогональных инвариантов.

□ Действительно, имеем

$$S = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \delta = \det A = \det A' = \lambda_1 \lambda_2.$$

[1] Отметим, что это утверждение имеет место только в прямоугольных декартовых системах координат.

Поэтому по теореме Виета числа λ_1 и λ_2 являются решениями следующего квадратного уравнения:

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \quad \boxtimes \tag{5.2}$$

Характеристический многочлен. Итак, при ортогональном преобразовании R ($R^T = R^{-1}$) матрица A квадрики преобразуется по следующему закону:

$$A' = R^T A R \Leftrightarrow RA' = AR, \tag{5.3}$$

поскольку $R^T = R^{-1}$. Нам нужно найти такой новый базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$, в котором матрица A' имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся равенством (5.3) и получим следующее выражение:

$$A\|R_1, R_2\| = \|R_1, R_2\| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \|\lambda_1 R_1, \lambda_2 R_2\|. \tag{5.4}$$

Заметим теперь, что согласно формуле произведения матрицы A на матрицу $R = \|R_1, R_2\|$ имеет место равенство

$$AR = A\|R_1, R_2\| = \|AR_1, AR_2\|. \tag{5.5}$$

Из равенств (5.4) и (5.5) мы приходим к равенствам

$$\|AR_1, AR_2\| = \|\lambda_1 R_1, \lambda_2 R_2\| \Leftrightarrow AR_k = \lambda_k R_k \quad \text{при} \quad k = 1, 2. \tag{5.6}$$

Уравнения (5.6) можно переписать в следующем виде:

$$(A - \lambda_k \mathbb{I})\, R_k = O \quad \text{при} \quad k = 1, 2. \tag{5.7}$$

Нетривиальные решения систем уравнений (5.7) существуют тогда и только тогда, когда λ_1 и λ_2 являются решениями следующего уравнения:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0. \tag{5.8}$$

Определение 3. *Уравнение* (5.8) *называется характеристическим уравнением или характеристическим многочленом.*

Вычисление определителя в характеристическом уравнении.

$$\square \quad \det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \quad \boxtimes \tag{5.9}$$

Таким образом, мы установили, что *числа* λ_1 *и* λ_2 *являются решениями уравнения* (5.8) *и только они.*

Определение 4. *Корни* λ_1 *и* λ_2 *характеристического многочлена* (5.8) *называются собственными значениями матрицы* A, *а ненулевые решения* R_1 *и* R_2 *уравнения*

$$(A - \lambda\mathbb{I})\, X = O$$

называются собственными векторами.

Поэтому, например,

$$AR_2 = \lambda_2 R_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a_{11}\sin\alpha + a_{12}\cos\alpha = -\lambda_2\sin\alpha, \\ -a_{12}\sin\alpha + a_{22}\cos\alpha = \lambda_2\cos\alpha, \end{array} \right\} \quad (5.10)$$

$$-\,a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha =$$
$$= a_{12}\sin^2\alpha - a_{22}\sin\alpha\cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_{12}\cos(2\alpha) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\sin(2\alpha), \quad (5.11)$$

$$\cot 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \quad (5.12)$$

§ 6. Уничтожение линейных слагаемых $2b_1x + 2b_2y$

Из полученных ранее формул (4.4) вытекает, что при общем ортогональном преобразовании матрица–строка $B = (b_1, b_2)$ преобразуется по следующему закону:

$$B' = (X_0^T A + B)R. \quad (6.1)$$

Для уничтожения в уравнении квадрики (3.2) линейного слагаемого

$$2BX$$

необходимо и достаточно потребовать, чтобы $B' = O$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$B' = O \Leftrightarrow (X_0^T A + B)R = O \Leftrightarrow X_0^T A + B = O \Leftrightarrow A^T X_0 = -B^T. \quad (6.2)$$

Поскольку $A^T = A$, то мы приходим к искомому уравнению

$$AX_0 = -B^T, \quad B \neq O. \quad (6.3)$$

Ясно, что эта квадратная неоднородная система линейных уравнений разрешима тогда и только тогда, когда $\delta = \det A \neq 0$.

Случай центральных квадрик. Рассмотрим сначала случай $\delta \neq 0$. В этом случае имеет место равенство

$$X_0 = -A^{-1}B^T,$$

из которого вытекает явный вид искомого преобразования

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} R & -A^{-1}B^T \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

В новых координатах $X^{'} = (x^{'}, y^{'})$ после этого преобразования уравнение квадрики примет следующий вид:

$$\lambda_1 x^{'2} + \lambda_2 y^{'2} + c^{'} = 0, \quad c^{'} = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c. \tag{6.4}$$

Матрица $D^{'}$ при этом имеет следующий вид:

$$D^{'} = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c^{'} \end{array} \right), \tag{6.5}$$

где выражение для $c^{'}$ можно упростить.

$\square$ $c^{'} = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c = -X_0^T B^T + 2BX_0 + c = BX_0 + c.$ $\boxtimes$

Кроме того, из выражения (6.5) имеют место следующие равенства:

$$\triangle = \det D^{'} = \lambda_1 \lambda_2 c^{'} = \delta c^{'} \Rightarrow c^{'} = \frac{\triangle}{\delta}. \tag{6.6}$$

Следовательно, уравнение (6.4) с учётом (6.6) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda_1 x^{'2} + \lambda_2 y^{'2} + \frac{\triangle}{\delta} = 0. \tag{6.7}$$

Определение 5. *Алгебраическая линия второго порядка называется центральной, если* $\det A \neq 0$.

§ 7. Уравнения эллиптического типа

Рассмотрим случай $\delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$. В этом случае, очевидно, числа λ_1 и λ_2 одного знака.

1. Вещественный эллипс. Пусть $c^{'}$ и $\lambda_{1,2}$ имеют разные знаки. Тогда уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x^{'2}}{a^2} + \frac{y^{'2}}{b^2} = 1, \quad a^2 = -\frac{c^{'}}{\lambda_1} = -\frac{\triangle}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = -\frac{c^{'}}{\lambda_2} = -\frac{\triangle}{\delta\lambda_2} > 0. \tag{7.1}$$

2. Мнимый эллипс. Пусть $c^{'}$ и $\lambda_{1,2}$ одного знака. Тогда уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x^{'2}}{a^2}+\frac{y^{'2}}{b^2}=-1, \quad a^2=\frac{c^{'}}{\lambda_1}=\frac{\triangle}{\delta\lambda_1}>0, \quad b^2=\frac{c^{'}}{\lambda_2}=\frac{\triangle}{\delta\lambda_2}>0. \qquad (7.2)$$

3. Пара мнимых прямых. Пусть $c^{'}=0$ и уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$a^2x^{'2}+b^2y^{'2}=0, \quad a=\sqrt{|\lambda_1|}, \quad b=\sqrt{|\lambda_2|}. \qquad (7.3)$$

§ 8. Уравнения гиперболического типа

Рассмотрим теперь случай $\delta=\det A=\lambda_1\lambda_2<0$. Это случай, когда числа λ_1 и λ_2 разных знаков.

4. Гипербола. Предположим, что $\triangle=c^{'}\delta\neq 0$. Тогда $c^{'}\neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что знаки чисел $c^{'}$ и λ_1 разные, а знаки чисел $c^{'}$ и λ_2 одинаковые. Поэтому уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x^{'2}}{a^2}-\frac{y^{'2}}{b^2}=1, \quad a^2=-\frac{c^{'}}{\lambda_1}=-\frac{\triangle}{\delta\lambda_1}>0, \quad b^2=\frac{c^{'}}{\lambda_2}=\frac{\triangle}{\delta\lambda_2}>0. \qquad (8.1)$$

5. Пара пересекающихся прямых. Предположим, что $\triangle=c^{'}\delta=0\Rightarrow c^{'}=0$. Это вырожденный случай. Тогда уравнение (6.7) можно привести к следующему виду:

$$a^2x^{'2}-b^2y^{'2}=0, \quad a^2=|\lambda_1|, \quad b^2=|\lambda_2|. \qquad (8.2)$$

§ 9. Уравнения параболического типа

Рассмотрим теперь вырожденный случай $\delta=\det A=\lambda_1\lambda_2=0$. Поскольку мы рассматриваем алгебраические уравнения второго порядка, то это означает, что только одно из чисел λ_1 и λ_2 равно нулю. Пусть, например, $\lambda_1=0$. Тогда

$$S=\operatorname{tr}A=\lambda_2, \quad D^{'}=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{'} \\ 0 & S & b_2^{'} \\ \hline b_1^{'} & b_2^{'} & c^{'} \end{array}\right), \quad \triangle=\det D^{'}=-\left(b_1^{'}\right)^2 S. \qquad (9.1)$$

Поскольку рассматривается случай $\det A=0$, то система уравнений $AX_0=-B^T$ может либо быть несовместной, либо иметь бесконечное множество решений. Это случай *нецентральных кривых на плоскости.* Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 5. *Коэффициент $b_1^{'}$ выражается формулой*

$$b_1^{'} = \pm\sqrt{-\frac{\triangle}{S}} \tag{9.2}$$

и его абсолютная величина $|b_1^{'}|$ является инвариантом относительно сдвигов.

Доказательство.

Если мы используем только преобразование параллельного переноса системы координат, то при этом матрица $D^{'}$ после преобразования вида (формально при $\alpha = 0$)

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

преобразуется только к матрице аналогичного вида:

$$D^{''} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{''} \\ 0 & S & b_2^{''} \\ \hline b_1^{''} & b_2^{''} & c^{''} \end{array}\right).$$

При этом имеем

$$\triangle = \det D^{''} = -\left(b_1^{''}\right)^2 S, \quad \triangle = \det D^{'} = -\left(b_1^{'}\right)^2 S \Rightarrow |b_1^{''}| = |b_1^{'}|.$$

Лемма доказана.

6. Параболический тип. Предположим, что $\triangle \neq 0$. Поэтому согласно лемме 5 какие бы мы в дальнейшем не делали бы параллельный перенос системы координат (сдвиг) коэффициент $b_1^{'} \neq 0$ преобразуется в коэффициент $b_1^{''} = \pm b_1^{'} \neq 0$. Пусть мы сделали уже поворот на найденный угол α и уничтожили слагаемое $2a_{12}xy$. В однородных координатах чистый поворот имеет следующий вид:

$$D^{'} = P_1^T D P_1, \quad P_1 = \left\|\begin{array}{c|c} R & O \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

При этом в однородных координатах мы пришли к матрице

$$D^{'} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{'} \\ 0 & S & b_2^{'} \\ \hline b_1^{'} & b_2^{'} & c^{'} \end{array}\right), \quad A^{'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad B^{'} = (b_1^{'}, b_2^{'}), \quad b_1^{'} \neq 0.$$

Тогда уравнение для центра примет следующий вид:

$$A^{'} X_0 = -B^{'T} = -\begin{pmatrix} b_1^{'} \\ b_2^{'} \end{pmatrix},$$

где

$$\operatorname{rang} A' = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} < \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -b_1' \\ 0 & S & -b_2' \end{pmatrix}, \quad \text{если} \quad b_1' \neq 0.$$

Итак, *уравнение цента не имеет решений*. После поворота R (пока без сдвига) уравнение квадрики примет следующий вид:

$$Sy'^2 + 2b_1'x' + 2b_2'y' + c = 0, \quad b_1' \neq 0. \tag{9.3}$$

Это уравнение после выделения полного квадрата примет следующий вид:

$$S\left(y' + \frac{b_2'}{S}\right)^2 + 2b_1'\left(x' + \frac{c}{2b_1'} - \frac{b_2'^2}{2b_1'S}\right) = 0.$$

Вводя новые переменные

$$\begin{cases} x'' = \pm\left(x' + \dfrac{c}{2b_1'} - \dfrac{b_2'^2}{2b_1'S}\right), \\ y'' = y' + \dfrac{b_2'}{S}, \end{cases} \tag{9.4}$$

получим уравнение

$$Sy''^2 + 2b_1'x'' = 0, \tag{9.5}$$

а затем выбираем знак $\pm$ так, чтобы получилось каноническое уравнение параболы

$$y''^2 = 2px'', \quad p = \left|\frac{b_1'}{S}\right|. \tag{9.6}$$

З а м е ч а н и е 16. Заметим, что после преобразования (9.4) матрица квадрики в системе координат $Ox''y''$ примет следующий вид:

$$D'' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1' \\ 0 & S & 0 \\ \hline b_1' & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В ы р о ж д е н н ы й п а р а б о л и ч е с к и й т и п. Пусть $\triangle = \det D = 0$. Следовательно, система уравнений центра

$$AX_0 = -B^T \tag{9.7}$$

имеет бесконечно много решений. Выберем какое–либо из них X_0. Поэтому после поворота и сдвига, определяемого матрицей

$$P = \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad D' = P^T DP.$$

получим уравнение кривой второго порядка следующего вида:

$$Sy'^2 + c' = 0, \tag{9.8}$$

с матрицей D' в однородных координатах следующего вида:

$$D^{'} = P^T D P = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ \hline 0 & 0 & c^{'} \end{array}\right). \tag{9.9}$$

Отметим, что

$$c' = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c. \tag{9.10}$$

Отсюда с учётом уравнения (9.7) получим равенство

$$c' = -X_0^T B^T + 2BX_0 + c = BX_0 + c, \tag{9.11}$$

где $X_0^T B^T = (BX_0)^T = BX_0$, поскольку произведение BX_0 — число. Из вида выражения (9.11) может сложиться впечатление, что c' зависит от выбора X_0. Однако, это не так. Пусть X_1 — другое решение уравнения (9.7):

$$AX_1 = -B^T \Rightarrow c'' = BX_1 + c. \tag{9.12}$$

Из уравнений (9.7) и (9.11) вытекают соотношения:

$$\begin{gathered} X_1^T A X_0 = -X_1^T B^T \Leftrightarrow X_1^T A^T X_0 = -X_1^T B^T \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -BX_0 = -X_1^T B^T = -BX_1 \Leftrightarrow BX_0 = BX_1 \Rightarrow c'' = c'. \end{gathered} \tag{9.13}$$

7. Вырожденный тип. Две параллельные прямые. Числа S и $c^{'}$ имеют разные знаки, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y^{'2} - a^2 = 0, \quad a^2 = \left|\frac{c^{'}}{S}\right|. \tag{9.14}$$

8. Вырожденный тип. Две мнимые параллельные прямые. Числа S и $c^{'}$ имеют одинаковые знаки, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y^{'2} + a^2 = 0, \quad a^2 = \frac{c^{'}}{S}. \tag{9.15}$$

9. Вырожденный тип. Две совпадающие прямые. Если $c^{'} = 0$, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y^{'2} = 0. \tag{9.16}$$

Лекция 13

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Канонические уравнения поверхностей второго порядка

Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это правая прямоугольная декартова система координат в пространстве. Дадим определение.

Определение 1. *Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек $M(x, y, z)$, заданных своими координатами в системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, координаты которых удовлетворяют следующему уравнению*:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \quad (1.1)$$

где все коэффициенты уравнения вещественные числа, причём

$$|a_{11}| + |a_{22}| + |a_{33}| + |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{23}| > 0.$$

Определение 2. *Поверхность в пространстве называется связной, если для любых двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ существует непрерывная кривая, целиком лежащая на поверхности и соединяющая эти две точки.*

Определение 3. *Поверхность называется центральной, если существует такая единственная точка M_0, что для любой точки M_1, лежащей на поверхности, то и симметричная относительно M_0 точка M_2 тоже лежит на поверхности.*

Эллипсоид. В <u>канонической</u> прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ уравнение эллипсоида имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,} \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0. \quad (1.2)$$

Свойство 1. Эллипсоид — это связная поверхность.

Свойство 2. Центр эллипсоида — точка $(0, 0, 0)$.

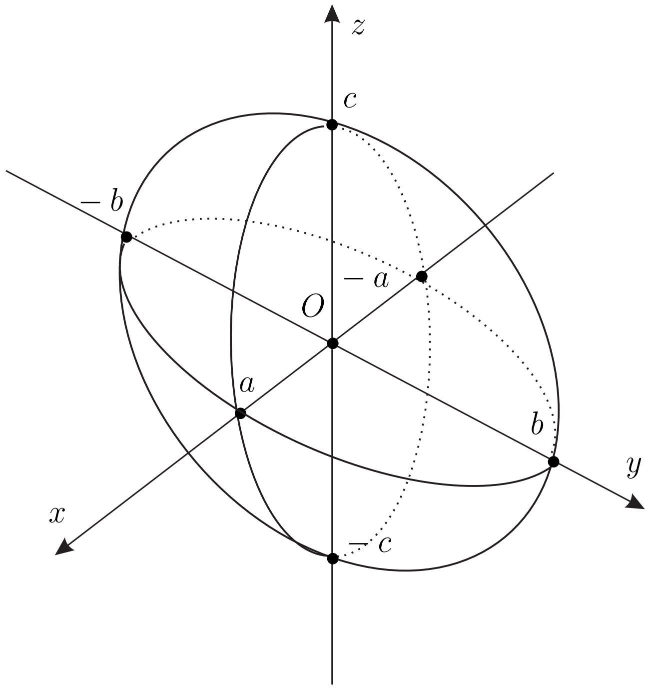

Рис. 100. Эллипсоид.

Свойство 3. В сечении плоскостью $z = h$ при $|h| < c$ располагается эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)} + \frac{x^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)} = 1.$$

Двуполостный гиперболоид. В каноническим прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ двуполостный гиперболоид имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.} \tag{1.3}$$

Двуполостный гиперболоид обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Двуполостный гиперболоид состоит из двух несвязных частей, расположенных при $|z| \geqslant c$, причём каждая из этих двух кусков — это связные поверхности.

□ Действительно, с одной стороны, из уравнения гиперболоида вытекает следующее неравенство:

$$0 \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1 \Rightarrow |z| \geqslant c.$$

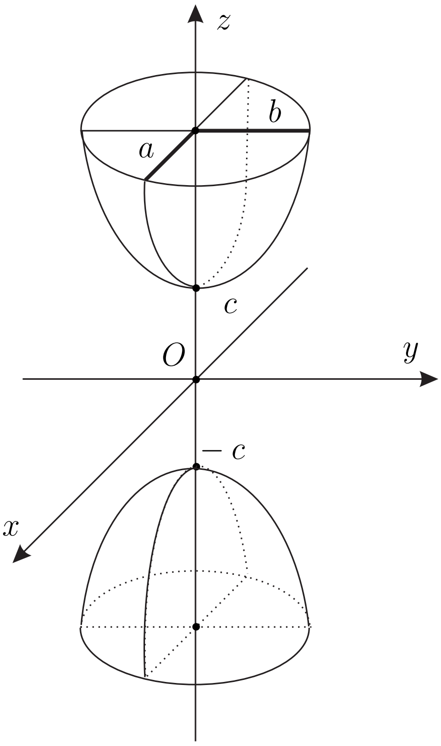

Рис. 101. Двуполостный гиперболоид.

Поэтому в полосе $-c < z < c$ нет точек поверхности (1.3). С другой стороны, если $M(x, y, z)$ — это точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (1.3), то координаты точки $M(x, y, -z)$ тоже удовлетворяют уравнению (1.3). Соединим эти две точки произвольной кривой. Ясно, что эта кривая пересечёт полосу $-c < z < c$. Таким образом, поверхность (1.3) состоит из двух симметричных относительно плоскости Oxy не связанных кусков.

Свойство 2. Центр — точка $O(0, 0, 0)$.

Свойство 3. Сечение плоскостью $z = h$ при $|h| > c$ представляет собою эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1.$$

С в о й с т в о 4. Сечение плоскостью $y = h$ представляет собою гиперболу

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1.$$

О д н о п о л о с т н ы й г и п е р б о л о и д. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ однополостный гиперболоид имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,} \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0. \tag{1.4}$$

Однополостный гиперболоид обладает следующими свойствами:

С в о й с т в о 1. Однополостный гиперболоид представляет собою связную поверхность.

С в о й с т в о 2. Сечение плоскостью $z = h$ представляет собою эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

С в о й с т в о 3. Сечение плоскостью $y = h$ при $|h| < b$ представляет собою гиперболу

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1.$$

С в о й с т в о 4. Сечение плоскостью $y = h$ при $|h| = b$ представляет собою пару пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

С в о й с т в о 5. Сечение плоскостью $y = h$ при $|h| > b$ представляет собою гиперболу

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}\right)^2} = 1.$$

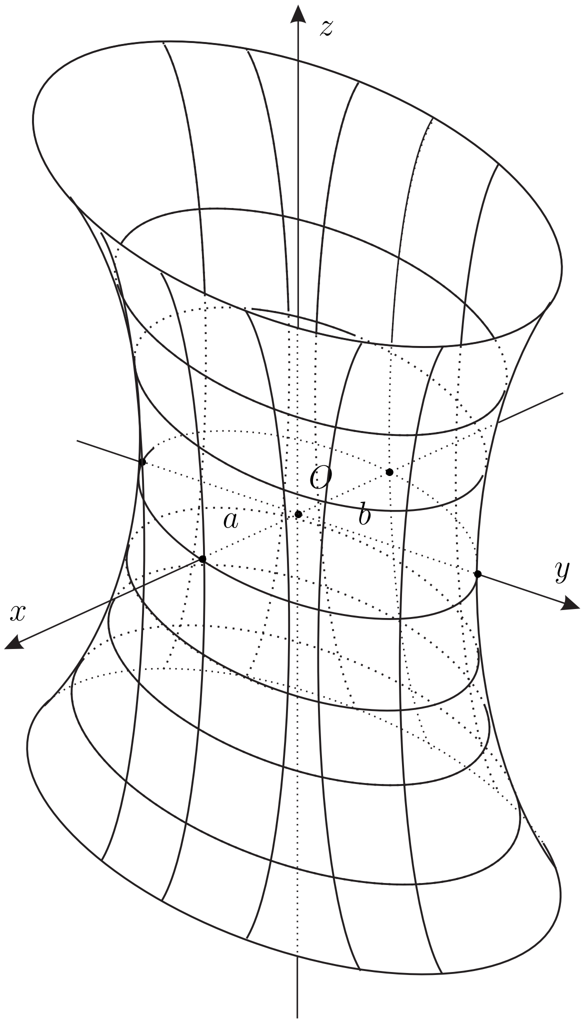

Рис. 102. Однополостный гиперболоид.

К о н у с. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ уравнение конуса имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,} \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Конус обладает следующими свойствами:

С в о й с т в о 1. Конус — это связная поверхность.

С в о й с т в о 2. Центр конуса — точка $O(0,0,0)$.

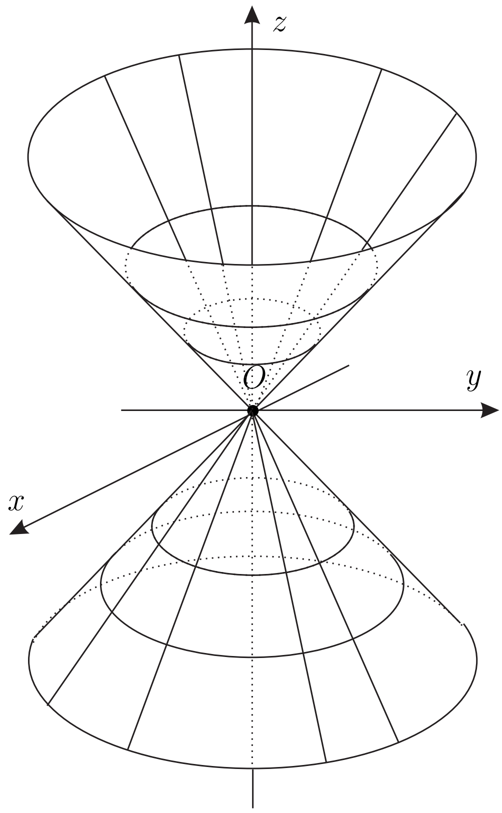

Рис. 103. Конус.

Свойство 3. Сечение конуса плоскостью $z = h \neq 0$ представляет собою эллипс
$$\frac{x^2}{a^2h^2/c^2} + \frac{y^2}{b^2h^2/c^2} = 1.$$

Свойство 4. Сечение конуса плоскостью $y = h \neq 0$ представляет собою гиперболу
$$\frac{z^2}{c^2h^2/b^2} - \frac{x^2}{a^2h^2/b^2} = 1.$$

Свойство 5. Сечение плоскостью $y = 0$ — это пара пересекающихся прямых
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Свойство 6. Одним из конических сечений является парабола.

Эллиптический параболоид. В каноническиой прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ уравнение эллиптического параболоида имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.}$$

Эллиптический параболоид обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Эллиптический параболоид — это связная поверхность.

Свойство 2. Эллиптический параболоид расположен полупространстве $z \geqslant 0$.

Свойство 3. Сечение плоскостью $z=h>0$ пересекает эллиптический параболоид по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2 2h}+\frac{y^2}{b^2 2h}=1.$$

Свойство 4. Плоскости $y=h$ и $x=h$ пересекает эллиптический параболоид по параболам.

Гиперболический параболоид. В каноническo<u>й</u> прямоугольной декартовой системе координат $\{O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ уравнение гиперболического параболоида имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,}\quad a>0,\quad b>0.$$

Свойство 1. Гиперболический параболоид — это связная поверхность.

Свойство 2. Сечение плоскостью $z=h<0$ пересекает гиперболический параболоид по гиперболе

$$\frac{y^2}{-2hb^2}-\frac{x^2}{-2ha^2}=1.$$

Свойство 3. Сечение плоскостью $z=h>0$ пересекает гиперболический параболоид по гиперболе

$$\frac{x^2}{2ha^2}-\frac{y^2}{2hb^2}=1.$$

Свойство 4. Плоскость $z=0$ пересекает гиперболический параболоид по двум прямым

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Свойство 5. Сечения плоскостями $x=h$ или $y=h$ пересекают гиперболический параболоид по параболам.

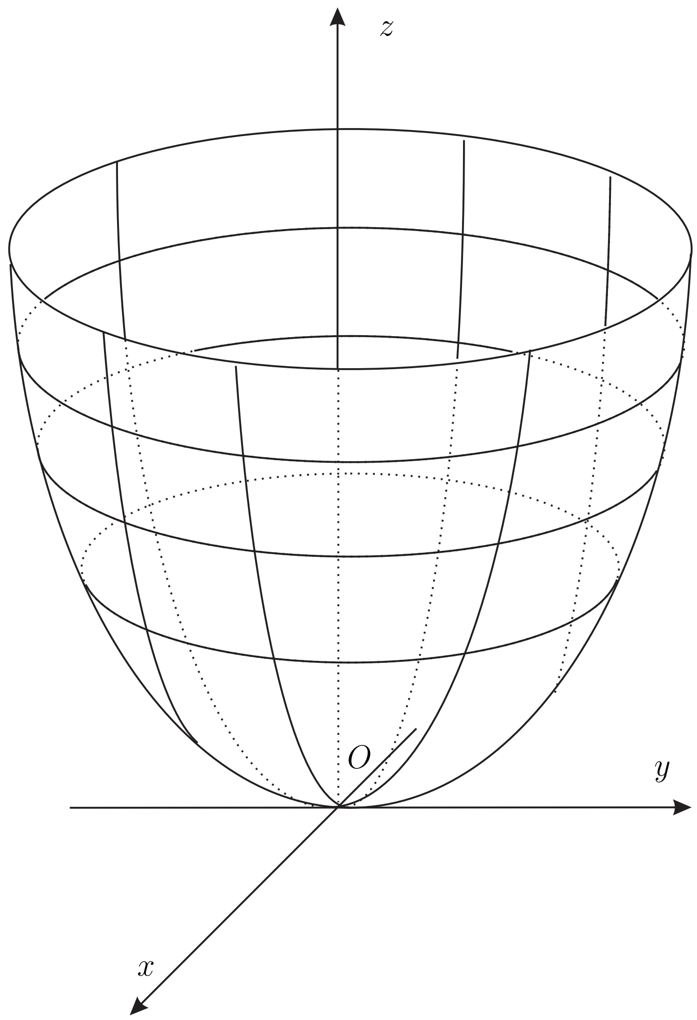

Рис. 104. Эллиптический параболоид.

Эллиптический цилиндр. В каноничeской прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ гиперболический параболоид уравнение эллиптического цилиндра имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,} \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Гиперболический цилиндр. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ уравнение гиперболиче-

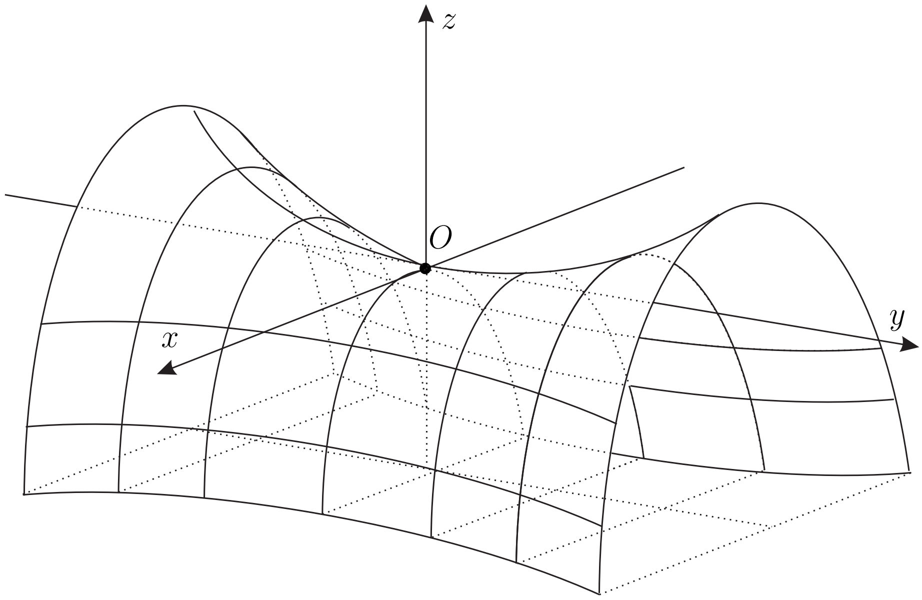

Рис. 105. Гиперболический параболоид.

ского цилиндра имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Параболический цилиндр. В <u>канонической</u> прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ уравнение параболического цилиндра имеет следующий вид:

$$\boxed{y^2 = 2px.}$$

§ 2. Линейчатые поверхности

Дадим определение цилиндрической поверхности с образующей параллельной оси Oz.

Определение 4. *Поверхность S называется цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямая линия, проходящая через эту точку и параллельная оси Oz, целиком лежит на S.*

Лемма 1. *Всякое алгебраическое уравнение линии второго порядка вида $F(x, y) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz.*

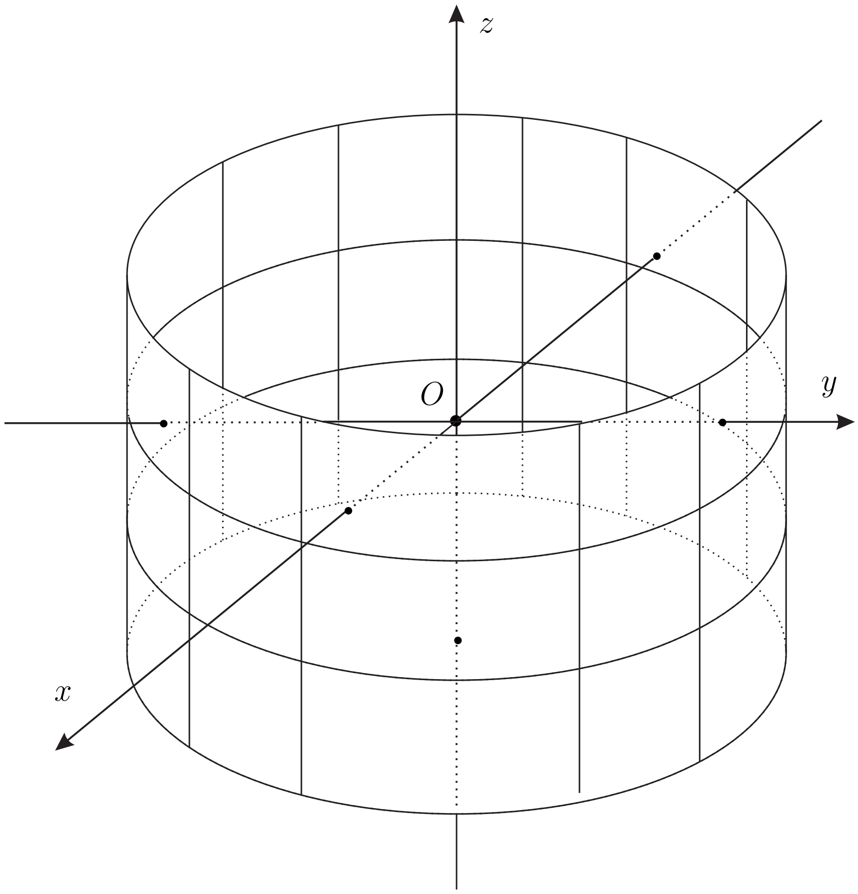

Рис. 106. Эллиптический цилиндр.

Доказательство.

Всякая точка $M_0(x_0, y_0, z)$, для которой имеет место равенство $F(x_0, y_0) = 0$, лежит на поверхности $F(x, y) = 0$. Согласно определению 2 — это поверхность цилиндра.

Лемма доказана.

Определение 5. *Поверхность S называется конической или конусом с вершиной в начале координат O, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности и отличная от начала координат точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямая линия, проходящая через точку M_0 и начало координат O, целиком лежит на поверхности S.*

Пусть $F(x, y, z) = 0$ — это уравнение поверхности второго порядка, причём $F(0, 0, 0) = 0$.

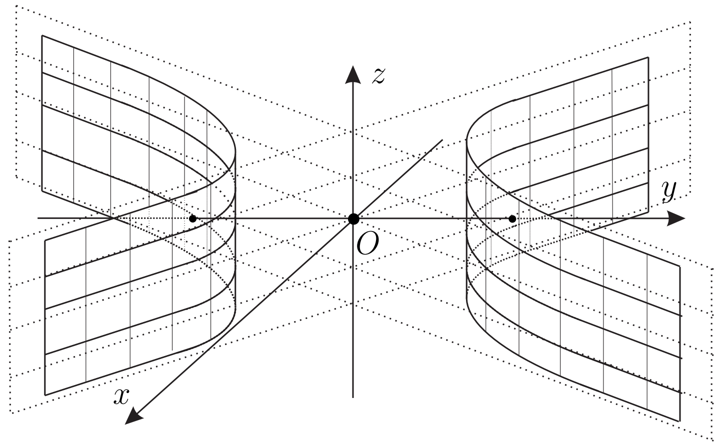

Рис. 107. Гиперболический цилиндр.

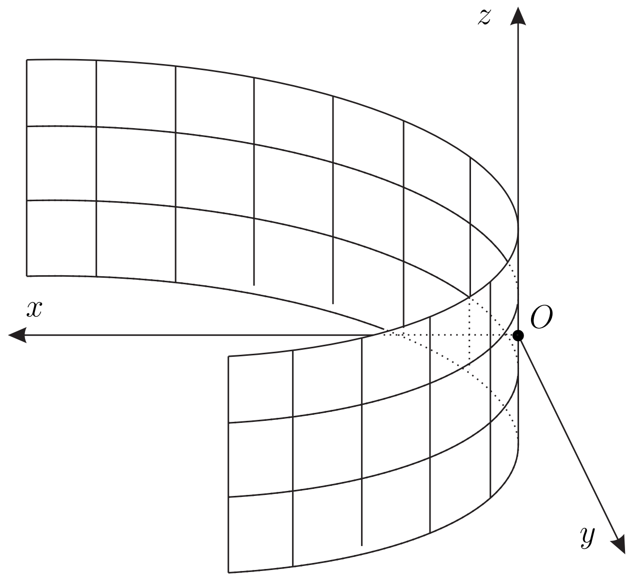

Рис. 108. Параболический цилиндр.

Лемма 2. *Если* $F(tx, ty, tz) = t^2 F(x, y, z)$, *то уравнение*

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2.1}$$

описывает конус.

Доказательство.

Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — это точка на поверхности S, определяемой уравнением (2.1), и отличная от точки $O(0,0,0)$. Тогда прямая

$$x = x_0 t, \quad y = y_0 t, \quad z = z_0 t \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}$$

целиком лежит на этой поверхности S и, очевидно, проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $O(0,0,0)$.

Лемма доказана.

Определение 6. *Поверхность S называется l–кратно линейчатой, если через каждую её точку проходит ровно $l \in \mathbb{N}$ различных прямых, лежащих на этой поверхности, называемых прямолинейными образующими.*

ПРИМЕР 1. Все цилиндры (эллиптический, гиперболический и параболический) являются 1–линейчатыми поверхностями. Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

не является 1–линейчатой поверхностью, поскольку через точку $(0,0,0)$ проходит не одна прямая, а бесконечно много прямых.

ПРИМЕР 2. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

является дважды линейчатой поверхностью.

$\square$ Действительно, запишем уравнение однополостного гиперболоида в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на гиперболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \delta\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \gamma\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases}$$

Заметим, что эти две системы относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ) имеют нетривиальные решения $(\alpha_0, \beta_0) \neq (0,0)$ и $(\gamma_0, \delta_0) \neq (0,0)$, поскольку определители систем равны нулю. Например, для первой

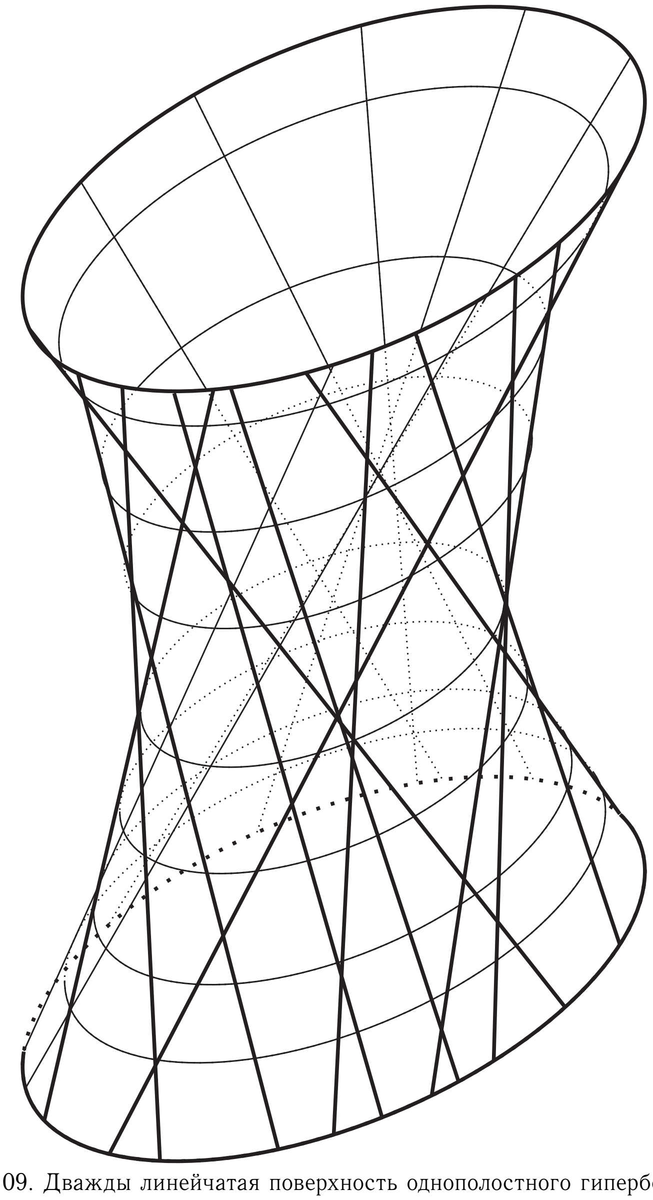

Рис. 109. Дважды линейчатая поверхность однополостного гиперболоида.

системы

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c} & -\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right) \\ -\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right) & \dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c} \end{vmatrix} = \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right) - \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0.$$

Теперь рассмотрим следующие две системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\beta_0\left(1-\dfrac{y}{b}\right); \\ \beta_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\alpha_0\left(1+\dfrac{y}{b}\right); \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \gamma_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\delta_0\left(1+\dfrac{y}{b}\right); \\ \delta_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\gamma_0\left(1-\dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \tag{2.3}$$

Это и есть уравнения двух прямых, лежащих на поверхности однополостного гиперболоида и проходящих через точку (x_0, y_0, z_0). Однако, осталось доказать, что любые две прямые из семейства (2.2) не пересекаются и любые две прямые из семейства (2.3) не пересекаются. Докажем это, например, для семейства (2.2).

□ Пусть прямые пересекаются в точке $M_1(x_1, y_1 z_1)$ однополостного гиперболоида, тогда определено число

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0}=\frac{\dfrac{x_1}{a}-\dfrac{z_1}{c}}{1-\dfrac{y_1}{b}}, \quad \frac{\beta_0}{\alpha_0}=\frac{1+\dfrac{y_1}{b}}{\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{z_1}{c}},$$

поскольку

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}=1 \Rightarrow \frac{\dfrac{x_1}{a}-\dfrac{z_1}{c}}{1-\dfrac{y_1}{b}}=\frac{1+\dfrac{y_1}{b}}{\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{z_1}{c}}.$$

Поэтому если предположить, что две прямые семейства (2.2) пересекаются в некоторой точке $M_0(x_1, y_1, z_1)$, то эти прямые просто совпадают, поскольку этим двум прямым соответствует одно и тоже соотношение

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0},$$

а, значит, их уравнения совпадают. ⊠

П Р И М Е Р 3. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

является дважды линейчатой поверхностью.

□ Действительно, запишем уравнение гиперболического параболоида в следующем виде:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z.$$

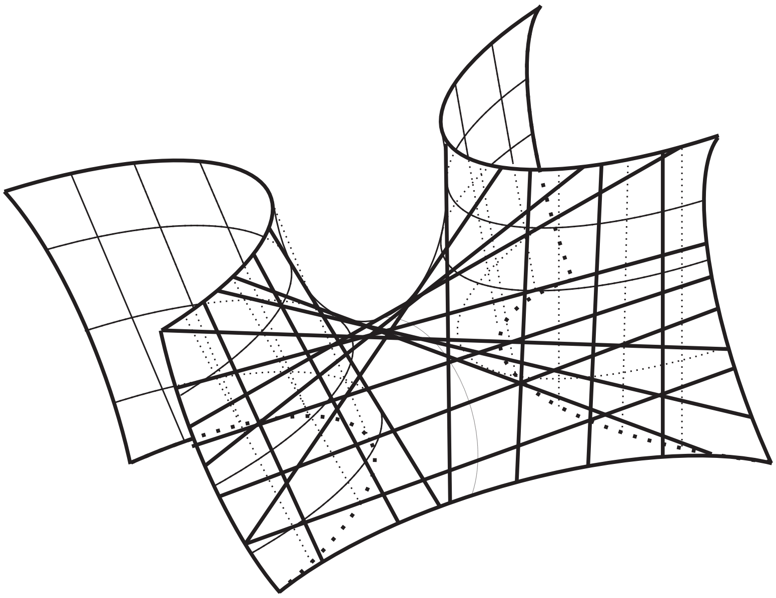

Рис. 110. Дважды линейчатая поверхность гиперболического параболоида.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на гиперболическом параболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ):

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\right) = \beta, \\[2ex] \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right) = 2\alpha z_0, \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{l} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right) = \delta, \\[2ex] \delta\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\right) = 2\gamma z_0, \end{array}\right.$$

Определители этих систем равны нулю! Поэтому существуют нетривиальные их решения (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0). Тогда следующие системы уравнений описывают искомые прямые:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \beta_0, \\[2ex] \beta_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 2\alpha_0 z, \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{l} \gamma_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \delta_0, \\[2ex] \delta_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 2\gamma_0 z. \end{array}\right.$$