

# **ПЛАН ЛЕКЦИЙ ПЕРВОГО ПОТОКА ПО КУРСУ «МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»**

## **Введение**

### **Часть I. Специальные функции математической физике**

#### **Глава I. Задачи на собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в основных областях**

##### **§ 1. Отрезок**

##### **§ 2. Прямоугольник**

##### **§ 3. Параллелепипед**

##### **§ 4. Круг**

##### **§ 5. Шар**

#### **Глава II. Уравнение специальных функций и свойства его решений.**

#### **Глава III. Цилиндрические функции**

##### **§ 1. Уравнение цилиндрических функций (уравнение Бесселя)**

##### **§ 2. Свойства гамма-функции**

##### **§ 3. Построение функции Бесселя в виде обобщенного степенного ряда (метод Фробениуса)**

##### **§ 4. Рекуррентные формулы**

##### **§ 5. Цилиндрические функции полуцелого порядка**

##### **§ 6. Интегральное представление функции Бесселя**

##### **§ 7. Функции Ханкеля. Интегральное представление**

**1. Определение функций Ханкеля**

**2. Свойства функций Ханкеля**

**1) Связь функций  $H_{-\nu}(x)$  и  $H_{\nu}(x)$**

**2) Рекуррентные формулы**

**§ 8. Связь функций Ханкеля и Бесселя. Функция Неймана**

**§ 9. Линейная зависимость и независимость цилиндрических функций. Определитель Вронского**

**§ 10. Асимптотика цилиндрических функций.**

**§ 11. Краевая задача для уравнения Бесселя. Собственные функции круга**

**§ 12. Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента. Функции Инфельда и Макдональда**

**Глава IV. Классические ортогональные полиномы**

**§ 1. Определение классических ортогональных полиномов**

**§ 2. Свойства классических ортогональных полиномов**

**1. Ортогональность. Нормальная ортогональная система**

**2. Теорема о нулях**

**3. Система производных классических ортогональных полиномов**

**4. Краевая задача для классических ортогональных полиномов**

**5. Обобщенная формула Родрига**

**6. Норма классических ортогональных полиномов**

**7. Производящая функция классических ортогональных полиномов**

### **§ 3. Важные частные случаи классических ортогональных полиномов**

- 1. Полиномы Якоби**
- 2. Полиномы Чебышева**
- 3. Полиномы Лежандра**
- 4. Полиномы Лягерра**
- 5. Полиномы Эрмита**

### **Глава V. Присоединенные функции Лежандра**

#### **§ 1. Определение присоединенных функций Лежандра**

#### **§ 2. Уравнение для присоединенных функций Лежандра**

#### **§ 3. Свойства присоединенных функций Лежандра**

- 1. Ортогональность присоединенных функций Лежандра**
- 2. Нули присоединенных функций Лежандра**
- 3. Норма присоединенных функций Лежандра**

### **Глава VI. Сферические функции**

### **Глава VII. Шаровые функции**

### **Глава VIII. Собственные функции шара**

### **Глава IX. Замкнутые и полные системы функций**

#### **§ 1. Вспомогательные положения анализа**

- 1. Пространство Лебега  $L_2(\mathbf{D})$ . Интеграл Лебега**
- 2. Замкнутые и полные системы функций в  $L_2(\mathbf{D})$**
- 3. Пространства Соболева  $W_2^1(\mathbf{D})$  и  $\hat{W}_2^1(\mathbf{D})$**

## **§ 2 . Примеры замкнутых и полных систем функций**

**1. Система полиномов Лежандра**

**2. Система присоединенных функций Лежандра**

**3. Система сферических функций**

**4. Система полиномов Лягерра и Эрмита**

**Заключительные замечания к части I курса ММФ**

## **Часть II. Методы математической физики**

**Глава I. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка**

**§ 1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в случае двух независимых переменных**

**§ 2. Преобразование дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду в случае двух независимых переменных**

**§ 3. Случай многих независимых переменных**

**Глава II. Основные уравнения математической физики и постановка краевых задач**

**§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа**

**1. Малые поперечные колебания струны**

**2. Малые продольные колебания стержня**

**3. Случай многих пространственных переменных**

**1) Малые поперечные колебания мембраны**

**2) Уравнения Максвелла**

**§ 2. Постановка начально-краевых задач**

**1) Начальные условия**

**2) Граничные условия**

**3) Условия на бесконечности, в нуле, на кромке**

**4) Обобщение на случай многих переменных. Классические и обобщенные решения**

**5) Другие способы задания дополнительных условий. Задача Гурса. Общая задача Коши, Задача Стефана**

**§ 3. Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа**

**1. Уравнение теплопроводности**

**2, Уравнение диффузии**

**3. Классические и обобщенные решения**

**§ 4. Физические задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа**

**1. Стационарное распределение тепла**

**2. Задачи электростатики**

**3. Установившиеся колебания**

**4. Установившиеся электромагнитные колебания**

**5. Постановка краевых задач. Классические и обобщенные решения**

**Глава III. Метод разделения переменных (метод Фурье)**

**§ 1. Общая схема метода разделения переменных**

## **1. Постановка общей начально-краевой задачи.**

**Классические и обобщенные решения**

## **2. Редукция общей задачи**

## **3. Первая и вторая формулы Грина**

## **4. Общая схема метода разделения переменных**

**1) Однородное уравнение и однородные граничные условия**

**2) Свойства собственных функций и собственных значений**

## **§ 2. Неоднородное уравнение и неоднородные граничные условия**

**1. Неоднородное уравнение**

**2. Неоднородные граничные условия**

## **Глава IV. Уравнения эллиптического типа**

## **§ 1. Основные свойства гармонических функций**

**1. Определение гармонических функций**

**2. Третья формула Грина**

**3. Основные свойства гармонических функций**

**1) Теорема Гаусса**

**2) Существование производных всех порядков**

**3) Формула среднего значения**

## **§ 2. Принцип максимума**

## **§ 3. Постановка внутренних краевых задач**

## **§ 4. Внешние краевые задачи**

**1. Внешняя задача Дирихле**

- 1) Трехмерный случай
- 2) Двумерный случай
- 2. Понятие функции, регулярной на бесконечности
  - 1) Случай двух переменных
  - 2) Случай трех переменных
- 3. Внешняя задача Неймана
  - 1) Трехмерный случай
  - 2) Двумерный случай
- § 5. Функция Грина
  - 1. Фундаментальные решения
    - 1) Вспомогательные положения анализа. Обобщенные функции. Обобщенные решения
    - 2) Фундаментальные решения
  - 2. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона
  - 3. Свойства функции Грина задачи Дирихле
    - 1) Двухсторонняя оценка функции Грина
    - 2) Физический смысл функции Грина
    - 3) Симметрия функции Грина
  - 4. Функция Грина задачи Неймана для уравнения Пуассона

## **Глава V. Уравнения параболического типа**

- § 1. Постановка начально-краевых задач
- § 2. Принцип максимума
- § 3. Теоремы единственности и устойчивости решения внутренней задачи Дирихле

## **§ 4. Формальное построение решения методом разделения переменных**

- 1. Формальное построение решение**
- 2. Физический смысл функции источника**

## **§ 5. Существование решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке**

## **§ 6. Задача Коши для уравнений теплопроводности на бесконечной прямой**

- 1, Постановка задачи Коши**
- 2. Теорема устойчивости**
- 3. Построение решения с помощью интегрального преобразования Фурье. Фундаментальное решение**
- 4. Свойства фундаментального решения**
- 5. Теоремы устойчивости**
  - 1) Устойчивость по начальным данным**
  - 2) Устойчивость по правой части**

## **§ 7. Существование решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности**

- 1. Теорема существования решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности**
- 2. Пример построения решения однородного уравнения теплопроводности со ступенчатой начальной функцией. Обобщенное решение**

## **§ 8. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространстве**

**§ 9. Решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой.**

- 1. Однородные граничные условия. Принцип продолжения начального условия**
- 2. Неоднородные граничные условия. Краевой режим**
  - 1) Построение решения с помощью интегрального преобразования Фурье**
  - 2) Построение решения с помощью интегрального преобразования Лапласа. Принцип Дюамеля**

**Глава VI. Уравнения гиперболического типа**

**§ 1. Постановка начально-краевых задач для уравнения колебаний**

- 1. Постановка начально-краевых задач. Классическое и обобщенное решение**
- 2. Единственность решения внутренних начально-краевых задач**
- 3. Устойчивость решения внутренних начально-краевых задач**
- 4. Существование решения внутренних начально-краевых задач**
  - 1) Обобщенный принцип суперпозиции**
  - 2) Формальное построение решения. Функция влияния мгновенного точечного импульса**
  - 3) Теорема существования**

## **§ 2. Уравнение колебаний на неограниченной прямой.**

### **Формула Даламбера**

- 1. Постановка задачи Коши**
- 2. Вывод формула Даламбера с помощью метода распространяющихся волн**
- 3. Свойства формулы Даламбера**
  - 1) Единственность решения**
  - 2) Существование решения**
  - 3) Устойчивость решения**
- 4. Физическая интерпретация решения**
  - 1) Понятие бегущей волны. Конечная скорость распространения**
  - 2) Интерпретация решения на фазовой плоскости**

## **§ 3. Вынужденные колебания неограниченной струны**

- 1. Колебания струны под действием мгновенного сосредоточенного импульса**
- 2. Вывод формулы решения задачи, описывающей вынужденные колебания неограниченной струны**
- 3. Существование и единственность решения**

## **§ 4. Задачи для полуограниченной струны**

- 1. Однородные граничные условия. Принцип продолжения начальных условий**
- 2. Распространение краевого режима**
  - 1) Построение решения методом распространяющихся волн**

**2) Построение решения методом интегральных преобразований**

**§ 5. Уравнение колебаний в неограниченном пространстве**

- 1. Сферически симметричный случай. Понятие характеристического конуса**
- 2. Вывод формулы Кирхгофа**
- 3. Формула Пуассона**
- 4. Физическая интерпретация решения. Принцип Гюйгенса. Точечный источник**
- 5. Метод спуска Адамара**
- 6. Установившиеся колебания**

**Глава VI. Уравнения эллиптического типа (продолжение)**

**§ 1. Теория потенциала**

- 1. Объемный потенциал**
- 2. Поверхностные потенциалы**
  - 1) Поверхностный потенциал простого слоя**
  - 2) Поверхностный потенциал двойного слоя**
- 3. Логарифмические потенциалы простого и двойного слоя**
  - 1) Логарифмический потенциал простого слоя**
  - 2) Логарифмический потенциал двойного слоя**
  - 3) Свойства логарифмических потенциалов на кривой класса  $\mathcal{A}$** 
    - а) Определение кривой класса  $\mathcal{A}$**
    - б) Непрерывность логарифмического потенциала простого слоя**

**в) Существование логарифмического потенциала  
двойного слоя**

**г) Разрыв логарифмического потенциала двойного слоя**

**д) Разрыв нормальной производной логарифмического  
потенциала простого слоя**

#### **4, Обобщение на трехмерный случай. Поверхность Ляпунова**

### **§ 2. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям**

#### **Фредгольма**

**1. Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана**

**2. Внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле**

**§ 3. Задача на собственные значения для оператора Лапласа  
в случае граничных условий Дирихле**

**1. Сведение задачи на собственные значения для оператора  
Лапласа в случае граничных условий Дирихле к  
интегральному уравнению Фредгольма с симметричным  
ядром**

**2. Свойства собственных функций и собственных значений**

**1) Существование счетного множества собственных  
значений**

**2) Вещественность и положительность собственных  
значений**

**3) Теорема Стеклова**

**4) Замкнутость системы собственных функций**

## **§ 4. Краевые задачи для уравнений Гельмгольца в ограниченных областях**

- 1. Физические задачи, приводящие к уравнению Гельмгольца**
  - 1) Установившиеся колебания**
  - 2) Стационарное уравнение диффузии**
- 2. Свойства решений**
- 3. Фундаментальные решения**
  - 1) Трехмерный случай**
  - 2) Двумерный случай**
- 4. Формулы Грина**
- 5. Единственность решения**
- 6. Методы решения краевых задач для уравнения Гельмгольца**
  - 1) Метод разделения переменных**
  - 2) Метод разложения по собственным функциям**
  - 3) Метод функций Грина**
  - 4) Метод конформных отображений**
  - 5) Метод интегральных уравнений**

**Заключительные замечания к части II курса ММФ**