Лекция 2

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 0. План лекции

1. Сильный принцип максимума для гармонических функций.

2. Принцип максимума модуля гармонической функции.

3. Единственность классического решения задачи Дирихле.

4. Теорема о строгом неравенстве

$$\min_{y\in\partial U} u(y) < u(x) < \max_{y\in\partial U} u(y), \quad x \in U.$$

5. Принцип максимума для субгармонической функции и принцип минимума для супергармонической функции.

6. Пример отсутствия принципа максимума модуля в случае неограниченной области.

7. Лемма Олейник–Хопфа о знаке косой производной в точке экстремума на границе шара.

8. Постановка задачи Неймана для классических решений.

9. Условие сферичности изнутри точки границы области.

10. Единственность с точностью до постоянной классического решения задачи Неймана.

§ 1. Сильный принцип максимума

Следствием теоремы о среднем является принцип максимума для решений уравнения Лапласа в ограниченной области U.
Теорема 1. *Пусть функция* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$ *гармоническая внутри области* U. *Тогда*

$$\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x); \tag{1.1}$$

если существует точка $x_0 \in U$ *такая, что*

$$u(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} u(x),$$

то $u(x)$ *постоянна внутри* U. *Кроме того,*

$$\min_{x \in \overline{U}} u(x) = \min_{x \in \partial U} u(x); \tag{1.2}$$

если существует точка $x_0 \in U$ *такая, что*

$$u(x_0) = \min_{x \in \overline{U}} u(x),$$

то $u(x)$ *постоянна внутри* U.

Доказательство. Докажем соответствующие утверждения для максимума. Утверждения для минимума доказываются аналогичным образом и мы предлагаем доказать их студентам.

Шаг 1. Предположим, что существует точка $x_0 \in U$ такая, что

$$u(x_0) = M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \overline{U}} u(x).$$

Тогда при

$$0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$$

по теореме о среднем для любого такого $r > 0$ имеем

$$M = u(x_0) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x_0,r)} u(y)\, dy. \tag{1.3}$$

Предположим, что найдется такая точка $x_1 \in O(x_0, r)$, в которой

$$u(x_1) < M.$$

Поскольку $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{U}) \subset \mathbb{C}(\overline{O(x_0, r)})$, то найдется такой шар $O(x_1, r_1) \subset O(x_0, r)$, в котором

$$u(x) < M - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in O(x_1, r_1)$$

при некотором малом $\varepsilon > 0$. В силу формулы (1.3) имеет место цепочка выражений

$$M = u(x_0) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x_0,r)} u(y)\,dy =$$
$$= \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x_1,r_1)} u(y)\,dy + \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x_0,r)\setminus O(x_1,r_1)} u(y)\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\alpha_N r_1^N}{\alpha_N r^N}(M-\varepsilon) + M\frac{\alpha_N(r^N - r_1^N)}{\alpha_N r^N} = M - \left(\frac{r_1}{r}\right)^N \varepsilon.$$

Отсюда вытекает противоречивые неравенства

$$0 < \varepsilon \leqslant 0.$$

Значит,

$$u(x) = M \quad \text{для всех} \quad x \in O(x_0, r).$$

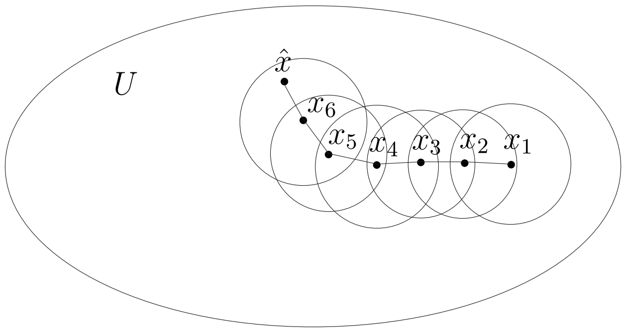

Рис. 1. К шагу 2.

Шаг 2. Пусть $\widehat{x} \in U$ — это произвольная точка. Соединим точку $\widehat{x}$ с точкой $x_0 \in U$ ломанной и покроем ломанную конечным числом шаров

$$O(x_0, r_0), \quad O(x_1, r_1), \quad \ldots, \quad O(x_N, r_N),$$

содержащихся в Ω и таких, что $\widehat{x} \in O(x_N, r_N)$, а $x^k \in O(x_{k-1}, r_{k-1})$ при $k = \overline{1, N}$. По доказанному получим, что $u(x) = M$ в каждом из этих шаров. Следовательно,

$$u(\widehat{x}) = M.$$

Шаг 3. Таким образом, либо точка x_0, в которой достигается максимум, принадлежит U и функция $u(x) = u(x_0)$ — постоянна в U либо $x_0 \in \partial U$. В обоих случаях имеет место равенство (1.1).

Теорема доказана.

Прямым следствием этого принципа максимума является следующее утверждение:

Следствие. *Пусть функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$ гармоническая внутри ограниченной области U. Тогда*

$$\max_{x \in \overline{U}} |u(x)| = \max_{x \in \partial U} |u(x)|. \tag{1.4}$$

Доказательство.

Пусть

$$M = \max_{x \in \partial U} |u(x)|.$$

Рассмотрим две <u>гармонические функции</u>

$$v_1(x) := u(x) - M, \quad v_2(x) := u(x) + M.$$

Ясно, что

$$v_1(x) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad v_2(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial U.$$

В силу принципа максимума имеем

$$v_1(x) \leqslant \max_{x \in \partial U} v_1(x) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad v_2(x) \geqslant \min_{x \in \partial U} v_2(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in U.$$

Итак,

$$-M \leqslant u(x) \leqslant M \quad \text{при} \quad x \in U \Rightarrow |u(x)| \leqslant M \Rightarrow \max_{x \in \overline{U}} |u(x)| = \max_{x \in \partial U} |u(x)|.$$

Следствие доказано.

Важным следствием из принципа максимума является теорема единственности решения задачи Дирихле.

Теорема 2. *Пусть $g(x) \in \mathbb{C}(\partial U)$ и $f(x) \in \mathbb{C}(U)$. Тогда существует не более одного решения $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$ краевой задачи Дирихле*

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad U, \quad u(x) = g(x) \quad \text{на} \quad \partial U. \tag{1.5}$$

Доказательство.

Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — это два решения краевой задачи (1.5). Тогда функция $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ будет решением соответствующей однородной задачи, а тогда в силу следствия к теореме 1 мы получим, что

$$\max_{x \in \overline{U}} |u(x)| = \max_{x \in \partial U} |u(x)| = 0 \Rightarrow u_1(x) = u_2(x) \quad \text{при} \quad x \in U.$$

Теорема доказана.

Наконец, справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Гармоническая в ограниченной области U функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$, отличная от постоянной, при любом $x \in U$ удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{y \in \partial U} u(y) < u(x) < \max_{y \in \partial U} u(y). \tag{1.6}$$

Доказательство.

Это прямое следствие теоремы 1. Действительно, если найдутся такие точки $x_1, x_2 \in U$, в которых достигается минимум и максимум функции $u(x)$, соответственно, то функция равна постоянной, что противоречит нашим предположениям.

Теорема доказана.

Кроме того, имеет место следующий принцип максимума и принцип минимума в случае ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^N$ для субгармонических функций ($\Delta u(x) \geqslant 0$) и для супергармонических функций ($\Delta u(x) \leqslant 0$):

Лемма 1. *Пусть функция* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$ *и пусть* $\Delta u(x) \geqslant 0$ *в* U (*субгармоническая функция*). *Тогда для любой точки* $x \in U$

$$u(x) \leqslant \max_{y \in \partial U} u(y). \tag{1.7}$$

Пусть функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$ *и пусть* $\Delta u(x) \leqslant 0$ *в* U (*супергармоническая функция*) *Тогда для любой точки* $x \in U$

$$u(x) \geqslant \min_{y \in \partial U} u(y). \tag{1.8}$$

Доказательство.

Шаг 1. Докажем сначала неравенство (1.7). Прежде всего, поскольку $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{U})$ и область U ограничена, то найдется постоянная

$$c_1 > \max_{x \in \overline{U}} |u(x)| \Rightarrow -u(x) \leqslant |u(x)| < c_1.$$

Поэтому функция

$$u(x) + c_1 > 0 \quad \text{при} \quad x \in U$$

и является субгармонической. Поэтому без ограничения общности будем считать, что

$$u(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in U.$$

Шаг 2. Пусть

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u(x)}{1 - \varepsilon |x|^2}, \quad \varepsilon = const > 0. \tag{1.9}$$

Поскольку область U ограничена, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\varepsilon |x|^2 < 1 \Rightarrow 1 - \varepsilon |x|^2 > 0 \quad \text{при} \quad x \in U.$$

Заметим, что имеет место выражение

$$0 \leqslant \Delta u(x) = (1 - \varepsilon |x|^2) \Delta v(x) - 4\varepsilon \sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} - 2\varepsilon N v(x). \tag{1.10}$$

Шаг 3. Если $v(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x_0 \in U$, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x_j^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial v(x_0)}{\partial x_j} = 0, \quad v(x_0) = u(x_0)(1 - \varepsilon|x_0|^2) > 0 \qquad (1.11)$$

при $j = \overline{1, N}$. Поэтому мы приходим в противоречие с неравенством (1.10), поскольку в силу (1.11) получим

$$(1 - \varepsilon|x_0|^2)\Delta v(x_0) - 4\varepsilon \sum_{j=1}^{N} x_{0j} \frac{\partial v(x_0)}{\partial x_j} - 2\varepsilon N v(x_0) < 0.$$

Поэтому для любой точки $x \in U$ выполнено неравенство

$$v(x) \leqslant \max_{y \in \partial U} v(y) \Rightarrow \frac{u(x)}{1 - \varepsilon|x|^2} \leqslant \max_{y \in \partial U} \frac{u(y)}{1 - \varepsilon|y|^2}.$$

Устремляя $\varepsilon \to +0$ в последнем неравенстве с учётом $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{U})$, мы получим неравенство (1.7).

Шаг 4. Если $\Delta u(x) \leqslant 0$, то $\Delta\left(-u(x)\right) \geqslant 0$ и, следовательно, по доказанному имеем

$$-u(x) \leqslant \max_{y \in \partial U} \left(-u(y)\right) \Rightarrow u(x) \geqslant -\max_{y \in \partial U} \left(-u(y)\right) = \min_{y \in \partial U} u(y),$$

поскольку

$$\max_{y \in \partial U} \left(-u(y)\right) = -\min_{y \in \partial U} u(y),$$

что доказывает неравенство (1.8).

Лемма доказана.

Следствие. *Если в условиях леммы имеют место соответствующие строгие неравенства*

$$\Delta u(x) > 0 \quad \textit{или} \quad \Delta u(x) < 0 \quad \textit{при} \quad x \in U, \qquad (1.12)$$

то будут иметь место соответствующие строгие неравенства

$$u(x) < \max_{y \in \partial U} u(y) \quad \textit{или} \quad u(x) > \min_{y \in \partial U} u(y) \quad \textit{при} \quad x \in U. \qquad (1.13)$$

Доказательство.

Действительно, пусть, например, $\Delta u(x) > 0$ при $x \in U$. Тогда согласно результату леммы 1 имеет место неравенство (1.7). Предположим, что существует точка $x_0 \in U$, в которой достигается равенство в неравенстве (1.7). Но тогда в этой точке максимума выполнено неравенство

$$\Delta u(x_0) \leqslant 0,$$

что противоречит неравенству $\Delta u(x) > 0$ при $x \in U$.

Следствие доказано.

Замечание 1. Заметим, что для неограниченных областей $U \subset \mathbb{R}^N$ естественная переформулировка, например, следствия из принципа максимума, т. е. равенства (1.4) (принципа максимума модуля)

$$\max_{x\in\overline{U}} |u(x)| = \max_{x\in\partial U} |u(x)|, \tag{1.14}$$

вообще говоря, не имеет места. Достаточно привести следующий пример:

ПРИМЕР 1. Пусть $N \geqslant 2$ и

$$U = \left\{(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N : \ -\frac{\pi}{2} < x_N < \frac{\pi}{2}\right\},$$

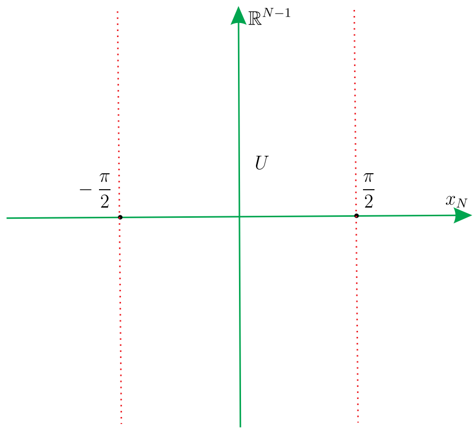

Рис. 2. Область U.

Функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$ гармоническая в области U удовлетворяет граничным условиям

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial U \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(x_1, ..., x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad x_N = \pm\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Решением этой задачи является следующая <u>неограниченная функция</u>:

$$u(x) = \cos(x_N) v(x_1, ..., x_{N-1}),$$

где

$$v(x_1, ..., x_{N-1}) = \exp\left(\frac{x_1}{\sqrt{N-1}}\right) \cdots \exp\left(\frac{x_{N-1}}{\sqrt{N-1}}\right).$$

Этот пример подсказывает нам, что в классе <u>ограниченных функций</u> утверждение все таки имеет место.

§ 2. Лемма Олейник–Хопфа

Теперь мы можем доказать *лемму Олейник–Хопфа* о знаке косой производной в точке экстремума, например, минимума.

Лемма Олейник–Хопфа. *Пусть гармоническая в шаре* $O(x_0, R)$ *функция* $u(x) \not\equiv const$, $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{O(x_0, R)})$ *и пусть* $u(x)$ *принимает наименьшее значение в точке* $x_1 \in \partial O(x_0, R)$. *Если в точке* x_1 *существует производная*

$$\frac{\partial u(x_1)}{\partial \tau},$$

где τ — *направление, образующее острый угол* β *с внешней нормалью* n_x *к* $\partial O(x_0, R)$ *в точке* x_1, *то*

$$\frac{\partial u(x_1)}{\partial \tau} < 0. \tag{2.1}$$

Доказательство.

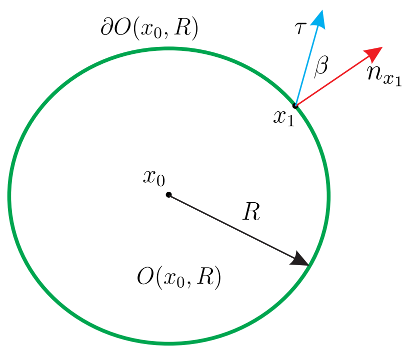

Рис. 3. Поле τ внешних направлений.

Шаг 1. В области

$$U \stackrel{\text{def}}{=} O(x_0, R) \backslash \overline{O(x_0, R/2)}$$

введем функцию

$$w(x) = |x - x_0|^{2-N} - R^{2-N} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,$$
$$w(x) = \ln \frac{1}{|x - x_0|} - \ln \frac{1}{R} \quad \text{при} \quad N = 2.$$

Прежде всего заметим, что

$$\Delta w(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in U.$$

Шаг 2. Введём следующую функцию:

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) - u(x_1) - \varepsilon w(x).$$

Прежде всего заметим, что эта функция неотрицательна на границе $\partial U = \partial O(x_0, R) \cup \partial O(x_0, R/2)$ области U при достаточно малом $\varepsilon > 0$.
□ Действительно,

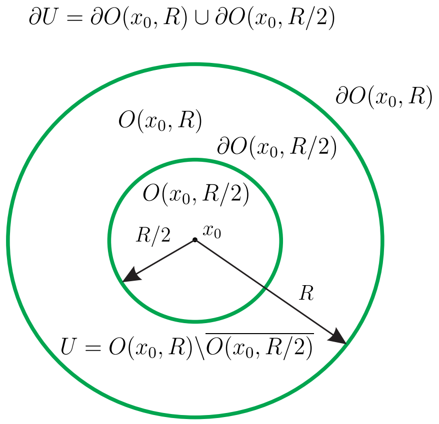

Рис. 4. Область U и ее граница ∂U.

$$w(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial O(x_0, R) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v(x) = u(x) - u(x_1) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial O(x_0, R). \quad (2.2)$$

Кроме того, понятно, что

$$\Delta\left(u(x) - u(x_1)\right) = 0 \quad \text{в} \quad O(x_0, R), \quad (2.3)$$

поэтому в силу (2.2) и (2.3) из формулы (1.8) леммы 1 получим, что

$$u(x) - u(x_1) > 0 \quad \text{в} \quad O(x_0, R) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(x) - u(x_1) \geqslant a > 0 \quad \text{на} \quad \partial O(x_0, R/2).$$

Поэтому

$$v(x) \geqslant a - \varepsilon w(x) > 0 \quad \text{на} \quad \partial O(x_0, R/2)$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$. ⊠

Шаг 3. Поэтому в силу того, что

$$\Delta v(x) = 0 \quad \text{в} \quad U \quad \text{и} \quad v(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial U$$

и леммы 1 вытекает, что

$$v(x) \geqslant \min_{y \in \partial U} v(y) = 0.$$

Таким образом, $v(x) \geqslant 0$ в U и $v(x_1) = 0$. Поэтому

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial \tau} \leqslant 0. \quad (2.4)$$

□ Действительно, напомним определение производной по внутреннему направлению τ_1 к точке $x_1 \in \partial U$ минимума функции $v(x)$.

Рассмотрим луч, проходящий через точку $x_1 \in \partial U$ и параллельный внутреннему направлению

$$\tau_1 = \left(\cos\beta_{x_{1,1}}, ..., \cos\beta_{x_{1,N}}\right), \quad \sum_{j=1}^{N} \cos^2\beta_{x_{1,j}} = 1.$$

Заметим, что поскольку τ_1 — это внутреннее направление в точке $x_1 \in \partial U$, то при $\lambda > 0$ имеем $\lambda\tau_1 \upuparrows \tau_1$. Следовательно, при малом $\lambda > 0$ точка $x_1 + \lambda\tau \in U$ и лежит в малой окрестности точки $x_1 \in \in \partial U$. Тогда производная функции $v(x)$ по внутреннему направлению τ_1 определяется следующим образом:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau_1} := \lim_{0<\lambda\to 0} \frac{v(x_1+\lambda\tau_1) - v(x_1)}{\lambda} \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Отсюда сразу же вытекает, что для внешнего направления $\tau = -\tau_1$ получим противоположное неравенство (2.4). ⊠

Заметим, что

$$\frac{\partial w(x_1)}{\partial \tau} = \frac{\partial w(x_1)}{\partial n_{x_1}} \cos(n_{x_1}, \tau) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial w(x_1)}{\partial \tau_{jx_1}} \cos(\tau_{jx_1}, \tau),$$

где n_{x_1} и τ_{jx_1} — это внешняя нормаль и касательные в точке $x_1 \in \in \partial U$. Перепишем теперь выражение для $w(x)$ в сферической системе координат с полюсом в точке $x = x_0$:

$$w(r) = r^{2-N} - R^{2-N} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,$$
$$w(r) = \ln R - \ln r \quad \text{при} \quad N = 2.$$

Поэтому для всех $j = \overline{1, N-1}$ имеем

$$\frac{\partial w(x_1)}{\partial \tau_{jx_1}} = 0, \quad \frac{\partial w(x_1)}{\partial n_{x_1}} = \frac{\partial w(R)}{\partial r}, \quad \cos(n_{x_1}, \tau) = \cos\beta.$$

При этом

$$\frac{\partial w(R)}{\partial r} = -(N-2)R^{1-N} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,$$
$$\frac{\partial w(R)}{\partial r} = -\frac{1}{R} \quad \text{при} \quad N = 2.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial \tau} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x_1)}{\partial \tau} \leqslant \varepsilon \frac{\partial w(x_1)}{\partial \tau} = \\ = -(N-2)\varepsilon R^{1-N} \cos\beta < 0 \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,$$

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial \tau} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x_1)}{\partial \tau} \leqslant \varepsilon \frac{\partial w(x_1)}{\partial \tau} = -\frac{\varepsilon}{R} \cos\beta < 0 \quad \text{при} \quad N = 2,$$

где β — это острый угол между вектором τ и вектором внешней нормали n_{x_1} в точке $x_1 \in \partial O(x_0, R)$.

Л е м м а д о к а з а н а.

Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Пуассона.

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad U, \quad \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} = g(y) \quad \text{на} \quad \partial U, \tag{2.6}$$

где $U \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей ∂U, n_y — это поле внешних нормалей в каждой точке $y \in \partial U$.

Пусть $f(x) \in \mathbb{C}(U)$, $g(y) \in \mathbb{C}(\partial U)$. Решение задачи Неймана (2.6) будем рассматривать в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{U})$. Теперь дадим определение условия сферичности изнутри точки $x_1 \in \partial U$.

О п р е д е л е н и е 1. *Будем говорить, что точка границы* $x_1 \in \partial U$ *удовлетворяет условию сферичности изнутри области* U, *если существует шар* $O(x_0, R) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\right\} \subset U$, *для которого* $\partial O(x_0, R) \cap \partial U = \{x_1\}$.

Далее во второй тематической лекции мы введем понятие ляпуновских поверхностей $A^{1,h}$. Тогда для выполнения сформулированного условия сферичности изнутри достаточно потребовать, чтобы $\partial U \in A^{1,h}$.

Справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 2. *Решение задачи Неймана в классе* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{U})$ *при указанных условиях на функции* $f(x)$, $g(y)$ *и границу* ∂U *единственно с точностью до постоянной* [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{U})$ — это какие-то два решения задачи Неймана (2.6). Тогда функция

$$v(x) := u_1(x) - u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{U})$$

— это решение соответствующей однородной задачи

$$\Delta v(x) = 0 \quad \text{в} \quad U, \quad \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} = 0 \quad \text{на} \quad \partial U. \tag{2.7}$$

Предположим, что $v(x) \neq const$. Пусть

$$M := \max_{x \in \partial U} v(x), \quad m := \min_{x \in \partial U} v(x).$$

Поскольку $v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$, то в силу результата теоремы 3 имеет место неравенство

$$m < v(x) < M \quad \text{при} \quad x \in U.$$

Следовательно, функция $v(x)$ принимает наименьшее значение m и наибольшее значение M на границе ∂U. Пусть, например, $x_1 \in \partial U$ — это точка, где гармоническая функция $v(x)$ принимает наимень-

[1] Т. е. если $u(x)$ — это решение задачи Неймана, то любое другое решение представимо в виде $u(x) + const$.

шее значение. Тогда согласно условие сферичности изнутри границы ∂U найдется такой шар $O(x_0, R) \subset U$ и $\partial O(x_0, R) \cap \partial U = \{x_1\}$. В этом шаре функция $v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(O(x_0, R)) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{O(x_0, R)})$ отлична от постоянной и принимает наименьшее значение только в точке $x_1 \in \in \partial O(x_0, R)$. Следовательно, в этой точке в силу леммы Олейник–Хопфа имеем

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial n_{x_1}} < 0,$$

поскольку n_{x_1} — это внешняя нормаль к границе шара $O(x_0, R)$. Но это противоречит равенству

$$\frac{\partial v(y)}{\partial n_y} = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \partial U.$$

Аналогичным образом рассматривается случай точки границы ∂U, где функция $v(x)$ принимает максимальное значение.

Следовательно, $v(x) = const$.

Лемма доказана.

Замечание 2. Отметим, что в том случае, когда τ_y — это касательное направление в точке $y \in \partial U$ ($U \subset \mathbb{R}^2$), то утверждение леммы Олейник–Хопфа не имеет места. Поэтому используя принцип максимума доказать единственность с точностью до произвольной постоянной решения *задачи касательной производной* нельзя. Задача касательной производной имеет следующий вид:

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad U, \quad \frac{\partial u(y)}{\partial \tau_y} = g(y) \quad \text{на} \quad \partial U, \tag{2.8}$$

Ниже в тематической лекции 5 мы обсудим этот вопрос используя энергетический метод.

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть $N = 2$, $\varepsilon > 0$ и

$$U \subset \left\{ z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < y < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}.$$

Пусть $u(x, y)$ — это гармоническая функция в U такая, что

$$u(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \partial U.$$

Доказать, что если U неограниченная и

$$\limsup_{|x| \to +\infty} |u(x, y)| e^{-|x|} = 0,$$

то $u(x, y) \equiv 0$ в U.

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$u_0(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \operatorname{ch}(x) \cos(y), \quad \gamma > 0,$$

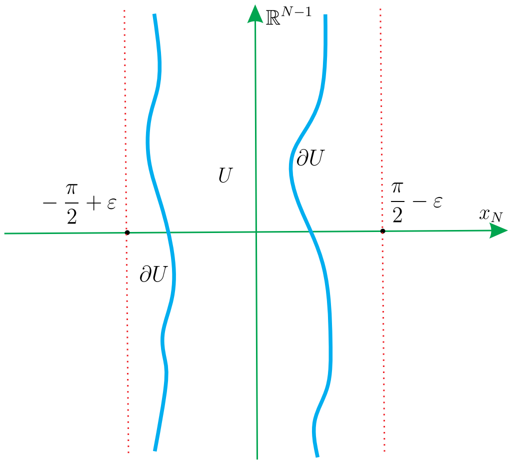

Рис. 5. Область U и ее граница ∂U.

где положительная постоянная γ произвольна. Рассмотрим две вспомогательные функции

$$w_1(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,y) - u_0(x,y), \quad w_2(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,y) + u_0(x,y).$$

Обе функции гармонические в $U \cap O(0,R)$ при любом $R > 0$. Заметим, что, с одной стороны,

$$w_1(x,y) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad w_2(x,y) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial U.$$

С другой стороны, для любого фиксированного $\gamma > 0$ при достаточно большом $R > 0$ имеем

$$w_1(x,y) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad w_2(x,y) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial O(0,R) \cap \overline{U}.$$

В силу принципа максимума для ограниченной области $U \cap O(0,R)$ получим, что

$$w_1(x,y) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad w_2(x,y) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial U \cap O(0,R).$$

Откуда получаем, что

$$|u(x,y)| \leqslant u_0(x,y) = \gamma \operatorname{ch}(x)\cos(y) \quad \text{для всех} \quad (x,y) \in U \cap O(0,R).$$

Переходя к пределу при $\gamma \to +0$ при фиксированной точке $(x,y) \in U$, получим

$$u(x,y) = 0 \quad \text{для любой точки} \quad (x,y) \in U.$$

Задача 2. Доказать, что если

$$U = \left\{ x = (x_1, ..., x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N : \; -\frac{\pi}{4} < x_N < \frac{\pi}{4} \right\}$$

и ограниченная гармоническая функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$, то равенство (1.14), являющееся следствием из принципа максимума, остается в силе для ограниченных функций $u(x)$ и для такой неограниченной области U.

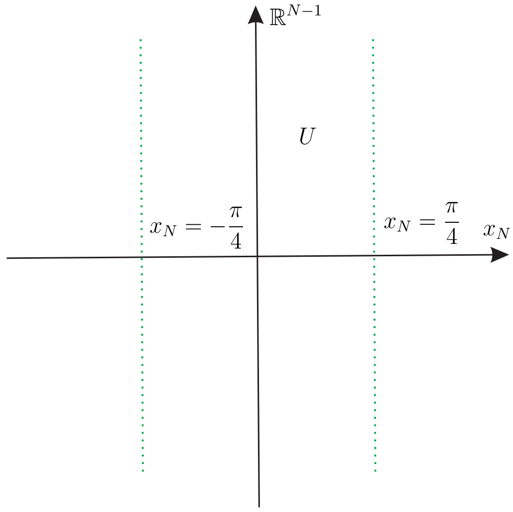

Рис. 6. Полоса U.

Решение. Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) - \varepsilon \cos(x_N)\,(\operatorname{ch}(x_1) + \cdots + \operatorname{ch}(x_{N-1}))$$

при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$. Рассмотрим ограниченную область

$$U_R \stackrel{\text{def}}{=} U \cap O(0, R), \quad R > 0.$$

Поскольку $u(x)$ ограничена, а

$$-\varepsilon \cos(x_N)\,(\operatorname{ch}(x_1) + \cdots + \operatorname{ch}(x_{N-1}))\Big|_{x \in U \cap \partial O(0,R)} \to -\infty$$

при $R \to +\infty$, то максимум функции $v(x)$ достигается на части $\partial U \cap \cap \overline{O(0, R)}$ границы $\partial(U \cap O(0, R))$. Итак, имеем

$$\max_{x \in \overline{U_R}} v(x) = \max_{\partial U \cap \overline{O(0,R)}} v(x).$$

Устремляя $R \to +\infty$, мы получим равенство

$$\max_{x \in \overline{U}} v(x) = \max_{\partial U} v(x) \Rightarrow \max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{\partial U} u(x)$$

в пределе при $\varepsilon \to +0$. Стандартным образом приходим к равенству (1.14).

Задача 3. Доказать, что если

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x = (x_1, ..., x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N : \ x_n > 0\right\}$$

и ограниченная гармоническая функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$, то (1.14) остается в силе в случае полупространства U.

Решение. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего рассмотри полосу

$$U_R = \left\{x = (x_1, ..., x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N : \ 0 < x_N < R\right\}.$$

Докажем, что если гармоническая в U_R ограниченная функция $w(x) \in \in \mathbb{C}^{(2)}(U_R) \cap (\overline{U_R})$ удовлетворяет граничным условиям

$$w(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x_N = 0 \quad \text{и} \quad x_N = R,$$

то $w(x) \leqslant 0$ в U_R. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть область

$$U_{R,r} \stackrel{\text{def}}{=} U_R \cap O(0, r)$$

при $r > 0$.

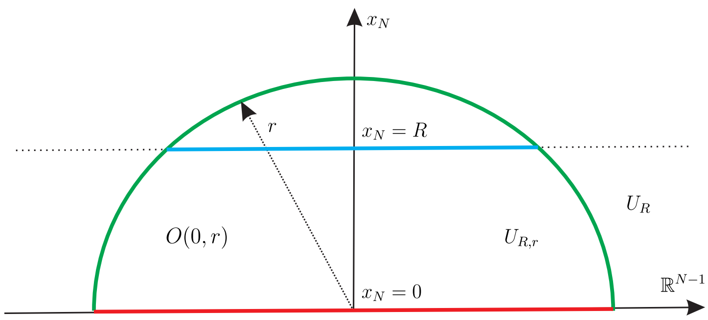

Рис. 7. Области U_R и $U_{R,r}$.

Затем рассмотреть новую вспомогательную функцию

$$w_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} w(x) - \varepsilon \cos\left(\frac{x_N}{R}\right)[\operatorname{ch}(x_1) + \dots + \operatorname{ch}(x_{N-1})], \quad \varepsilon > 0.$$

Далее провести рассуждения как в предыдущей задачи и предельными переходами при $r \to +\infty$ и $\varepsilon \to +0$ получить, что

$$w(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in U_R.$$

Шаг 2. Рассмотрим в полосе U_R следующую вспомогательную функцию:

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x_N}{R} \sup_{x_N = R} u(x) + \left(1 - \frac{x_N}{R}\right) \sup_{x_N = 0} u(x).$$

Ясно, что эта функция является гармонической в U_R. Справедливы следующие свойства:

$$v(x)\Big|_{x_N=0} = \sup_{x_N=0} u(x), \quad v(x)\Big|_{x_N=R} = \sup_{x_N=R} u(x).$$

Рассмотрим вспомогательную гармоническую функцию в U_R

$$w(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) - v(x).$$

Ясно, что

$$w(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x_N = 0 \quad \text{и} \quad x_N = R.$$

В силу первого шага имеем

$$w(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad U_R \Rightarrow u(x) \leqslant v(x) \quad \text{при} \quad x \in U_R.$$

Осталось при фиксированном $x \in U_R$ перейти к пределу при $R \to +\infty$ и получить равенство

$$u(x) \leqslant \sup_{x_N=0} u(x) \Rightarrow \max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x_N=0} u(x).$$

Далее стандартным образом приходим к равенству (1.14).

З а д а ч а 4. Найти все такие $\alpha > 0$, что решение $u(x, y)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, удовлетворяющее неравенству

$$|u(x, y)| \leqslant M\,(1 + x + |y|)^{\alpha},$$

где $M = const > 0$, единственно.

Р е ш е н и е. Пусть существует два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Обозначим

$$v(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} u_1(x, y) - u_2(x, y).$$

Легко видеть, что $v(x, y)$ удовлетворяет однородной задаче Дирихле. Общее решение такой задачи в полуплоскости имеет вид [1)]

$$v(\rho, \vartheta) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c_k \rho^k + d_k \rho^{-k}\right) \sin(k\vartheta).$$

С учетом условия

$$|v| \leqslant |u_1| + |u_2| \leqslant M_1\,(1 + \rho\cos(\vartheta) + |\rho\sin(\vartheta)|)^{\alpha} \leqslant M_2(1+\rho)^{\alpha}$$

заключаем, что решение имеет вид

$$v(\rho, \vartheta) = \sum_{k=1}^{K} c_k \rho^k \sin(k\vartheta).$$

Здесь константа K равна целой части α. Таким образом, при $\alpha \geqslant 1$ существует ненулевая функция $v(x, y)$ и, следовательно, решение исходной задачи неединственно. При $\alpha < 1$ существует только нулевое $v(x, y)$, поэтому решение исходной задачи единственно.

[1)] Решение получается стандартным методом разделяющихся переменных для уравнения в полярных координатах.

Задача 5. Пусть $N \geqslant 2$ и $U = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$. Предположим, что функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$, ограниченная и гармоническая в U. Выберем $\delta \in (0,1)$ и предположим, что верно неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leqslant |x - y|^\delta$$

для всех $x, y \in \partial U \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, ..., x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad x_N = 0\}$. Используя принцип максимума, доказать, что найдется константа $M = M(N, \delta) > 0$ такая, что

$$|u(x) - u(y)| \leqslant M|x - y|^\delta \quad \text{для всех} \quad x, y \in U.$$

Решение. Решение проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение:

Пусть $N = 2$ и $U = \{(x,y) : x > 0\}$. При $\delta \in (0,1)$ существует гармоническая неотрицательная функция в Ω, непрерывная в $\overline{U}$ и равная $|y|^\delta$ на ∂U.

□ Нужно рассмотреть главную ветвь функции комплексного аргумента $w = w(z) = z^\delta$, т. е. ту ветвь этой функции которая принимает положительные значения на оси $z = x > 0$, и выделить действительную часть этой функции. Тогда функция

$$v = v(x,y) = \mathrm{Re} w(z)$$

будет обладать требуемыми свойствами [1]. ⊠

Шаг 2. Пусть $w = w(x,y)$ — это функция двух переменных ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$), существование которой доказано на первом шаге. Для $x \in U$ рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} w(x_N, x_1) + \cdots + w(x_N, x_{N-1}).$$

Как нетрудно убедиться, функция $v(x)$ является гармонической в области U. Кроме того, по построению (см. шаг 1) имеет место равенство

$$v(x)|_{x_N=0} = w(0, x_1) + \cdots + w(0, x_{N-1}) = |x_1|^\delta + \cdots + |x_{N-1}|^\delta.$$

Теперь по этой функции $v(x)$ построим новую функцию

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) - u(0) - v(x).$$

По построению эта функция является гармонической в U. Кроме того,

$$h(x)|_{x_N=0} = u|_{x_N=0} - u(0) - v(x)|_{x_N=0} \leqslant \\ \leqslant |x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2|^{\delta/2} - |x_1|^\delta - \cdots - |x_{N-1}|^\delta \leqslant 0$$

Шаг 3. Теперь рассмотрим функцию $h(x)$ в области

$$U_R = U \cap O(0,R) \quad \text{при} \quad R > 0.$$

[1] Эта функция является гармонической как действительная часть аналитической функции.

Заметим, что функция $u(x)$ ограниченная в U, а функция $v(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$. Поэтому множество тех $x \in U_R$, для которых функция $h(x) \geqslant 0$ является ограниченным в $\mathbb{R}^N$. Следовательно, при достаточно большом $R > 0$ получим

$$h(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial(O(0, R) \cap U).$$

Согласно принципу максимума в ограниченной области U_R получим, что

$$h(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in U_R$$

для любого $R > 0$. Итак, получим, что

$$u(x) - u(0) \leqslant v(x) \leqslant M_1(N, \delta)|x|^\delta \quad \text{для всех} \quad x \in U.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть вспомогательную функцию

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) - u(0) + v(x).$$

И доказать, что в силу принципа максимума имеет место следующее неравенство:

$$u(x) - u(0) \geqslant v(x) \geqslant |x|^\delta \quad \text{для всех} \quad x \in U.$$

Итак, мы доказали, что

$$|u(x) - u(0)| \leqslant M(N, \delta)|x|^\delta \quad \text{для всех} \quad x \in U$$

при

$$M = \max\{1, M_1\}.$$

Шаг 4. Сдвинув начало координат в точку $y \in \partial U$ мы получим неравенство

$$|u(x + y) - u(y)| \leqslant M(N, \delta)|x|^\delta \quad \text{для всех} \quad x \in U, \quad y \in \partial U.$$

Оставшуюся часть доказать студентам!

З а д а ч а 6. Пусть Ω_1 и Ω_2 — это две ограниченные области в $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 2$ с гладкими границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, причем $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ и $u_k(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega_k) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega_k})$ при $k = 1, 2$. Пусть

$$\Delta u_k(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega_k, \quad u_k(x) = f_k(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega_k,$$
$$f_1(x_1) < f_2(x_2) \quad \text{для всех} \quad x_1 \in \partial\Omega_1, \quad x_2 \in \partial\Omega_2.$$

Что больше:

$$u_1(x_0) \quad \text{или} \quad u_2(x_0)$$

в произвольной точке $x_0 \in \Omega_1$?

Р е ш е н и е. В силу слабого принципа максимума для функций $u_2(x)$ и $u_1(x)$ справедливо неравенство

$$u_2(x_0) > \min_{x \in \partial\Omega_2} u_2(x) = \min_{x \in \partial\Omega_2} f_2(x) > \max_{x \in \partial\Omega_1} f_1(x) = \max_{x \in \partial\Omega_1} u_1(x) > u_1(x_0)$$

для всех $x_0 \in \Omega_1 \subset \Omega_2$.

Задача 7. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(O(0,1)) \cap \mathbb{C}(\overline{O(0,1)})$ и

$$u_{x_1x_1} + u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} = 1 \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \in O(0,1) \subset \mathbb{R}^2. \qquad (3.1)$$

Может ли $u(x)$ иметь внутри $O(0,1)$ максимум, минимум?

Ответ. Максимум не может. Минимум может.

Решение. Матрица соответствующей квадратичной формы эллиптического уравнения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

Поэтому существует ортогональное преобразование (поворот)

$$x = \widehat{P}y,$$

конкретный вид которого нам не важен, приводящий исходную задачу к следующей:

$$v_{y_1y_1} + 3v_{y_2y_2} = 2, \quad v(y) = u(\widehat{P}y) \quad \text{при} \quad y = (y_1, y_2) \in O(0,1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Если сделать еще одну невырожденную замену переменных (сжатие)

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_2, \quad z = \widehat{Q}y, \quad \widehat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

то мы получим уравнение

$$\Delta_z w(z) = w_{z_1z_1} + w_{z_2z_2} = 2 \geqslant 0, \quad w(z) = u(\widehat{Q}\widehat{P}x)$$

при $z = (z_1, z_2) \in D = \{z \in \mathbb{R}^2 : \, z_1^2 + 3z_2^2 < 1\}$. Теперь в силу результата следствия из леммы 1 мы приходим к выводу о том, что максимум функции $w = w(z)$ не может достигаться внутри эллипса D, однако минимум может достигаться. В силу невырожденности указанного отображения $\widehat{Q}\widehat{P}x$ граница шара $O(0,1)$ переходит в границу эллипса, а внутренность шара $O(0,1)$ переходит во внутренность эллипса. Таким образом, для функции $u(x)$ утверждение тоже самое.

Задача 8. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, $q(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ и функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(x) + q(x)u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Определим следующие величины:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x), \quad m \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Возможно ли, что $M > m$,

1. Если $q(x) \equiv 0$;

2. Если $q(x) > 0$;
3. Если $q(x) < 0$ и $M > 0$;
4. Если $q(x) < 0$ и $M < 0$?

Решение. Рассмотрим разные случаи.

1. Нет, в этом случае $M = m$ согласно принципу максимума.

2. В этом случае такая ситуация возможна. Рассмотрим следующий пример:

$$u_{xx} + u = 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, \pi), \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

Решение этой задачи

$$u(x) = \sin x \Rightarrow M = 1, \quad m = 0.$$

3. Нет, поскольку, если в некоторой точке $x_0 \in \Omega$ достигается положительный максимум

$$u(x_0) = M > 0 \Rightarrow \Delta u(x_0) \leqslant 0 \Rightarrow 0 < -q(x_0)u(x_0) = \Delta u(x_0) \leqslant 0.$$

Противоречие.

4. Да, может быть. Рассмотрим следующий пример:

$$u_{xx} - u = 0 \quad \text{при} \quad x \in (-1, 1).$$

Решением этого уравнения является функция

$$u(x) = -\operatorname{ch}(x),$$

$$M = u(0) = -1, \quad m = u(-1) = u(1) = -\frac{1}{2e} - \frac{e}{2}, \quad M > m.$$

Задача 9. Пусть

$$\Omega \overset{\text{def}}{=} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x^2 + 2y^2 < 2\right\}, \quad u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}),$$

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \overline{\Omega},$$

$$u(x, y) = x + y \quad \text{при} \quad x^2 + 2y^2 = 2,$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} + (1 - x)u(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + 2y^2 = 1,$$

где n — это направление внешней нормали к области Ω. Найти $\max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}} |u(x, y)|$.

Решение. В силу принципа максимума максимум функции $|u(x, y)|$ достигается на границе. Поэтому нам надо рассмотреть граничные условия. Итак, рассмотрим сначала границу $x^2 + 2y^2 = 1$. Перепишем граничное условие в следующем виде:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = (x - 1)u(x, y) \quad \text{при} \quad x^2 + 2y^2 = 1.$$

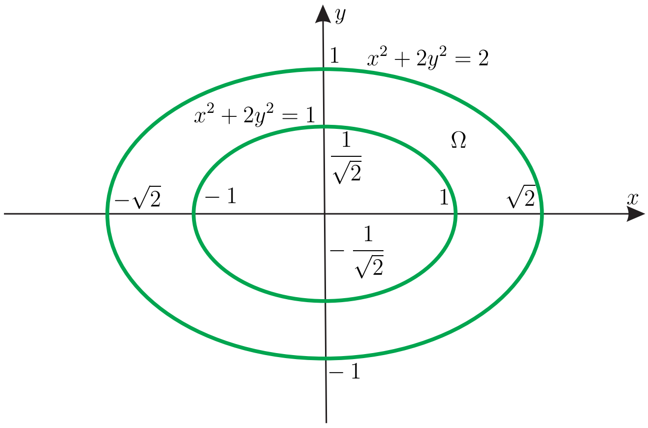

Рис. 8. Область Ω.

В силу принципа Хопфа–Олейник в точке максимума $z_{max} \in \partial\Omega$ (минимума $z_{min} \in \partial\Omega$) на границе имеем

$$\frac{\partial u(z_{max})}{\partial n} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(z_{min})}{\partial n} \leqslant 0.$$

Заметим, что

$$x^2+2y^2=1 \Rightarrow |x| \leqslant 1 \Rightarrow x-1 \leqslant 0 \quad \text{на} \quad x^2+2y^2=1.$$

Поэтому в точке $z_{\max} \in \partial\Omega$ имеем

$$0 \leqslant \frac{\partial u(z_{max})}{\partial n} = (x-1)u(z_{max}) \Rightarrow u(z_{max}) \leqslant 0,$$

$$0 \geqslant \frac{\partial u(z_{min})}{\partial n} = (x-1)u(z_{min}) \Rightarrow u(z_{min}) \geqslant 0.$$

Эти два условия означают, что

$$u(x,y)=0 \quad \text{при} \quad x^2+2y^2=1.$$

Следовательно, осталось вычислить

$$\max_{x^2+2y^2=2}(x+y).$$

Легко видеть, что максимум достигается в первом квадранте. Таким образом, нужно найти максимум функции

$$f(y)=\sqrt{2-2y^2}+y \quad \text{при} \quad y>0 \Rightarrow f(y_0)=\sqrt{3} \quad \text{при} \quad y_0=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

З а д а ч а 10. Доказать, что решение следующей задачи единственно в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{U})$

$$U=O(0,2)\backslash\overline{O(0,1)} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{U},$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \rho} - u(x) = f_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial O(0,1),$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \rho} + u(x) = f_2(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial O(0,2).$$

Решение. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — это два решения поставленной задачи. Рассмотрим разность

$$v(x) := u_1(x) - u_2(x),$$

которая является решением соответствующей однородной задачи. Применим первую формулу Грина для функции $v(x)$. Имеем

$$0 = \int\limits_U v(x)\Delta v(x)\,dx = -\int\limits_{\partial O(0,1)} \frac{\partial v(x)}{\partial \rho} v(x)\,ds_x + \\ + \int\limits_{\partial O(0,2)} \frac{\partial v(x)}{\partial \rho} v(x)\,ds_x - \int\limits_U |\nabla v|^2\,dx.$$

С учетом граничных условий имеем

$$\int\limits_{\partial O(0,1)} v^2(x)\,ds_x + \int\limits_{\partial O(0,2)} v^2(x)\,ds_x + \int\limits_U |\nabla v|^2\,dx = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v(x) = const \Rightarrow v(x) = 0.$$

Задача 11. Справедлив ли принцип максимума для уравнения

$$\Delta u + u_x + u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

в ограниченной области Q на плоскости в той же форме, как для уравнения Лапласа?

Ответ. Нет.

Решение. Рассмотрим следующий пример:

$$(x,y) \in Q = (0, \sqrt{2}\,\pi) \otimes (0, 2\pi),$$

$$u(x,y) = e^{-x/2} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right).$$

Легко непосредственно проверить, что функция $u = u(x,y)$ является решением рассматриваемого уравнения. При этом можно проверить, что

$$u|_{x=0} = u|_{x=\sqrt{2}\,\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=2\pi} = 0,$$

а во внутренней точке

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \pi\right) \in Q$$

имеем

$$u(x_0, y_0) = \exp\left(-\pi/(2\sqrt{2}\,)\right) > 0.$$

Значит, максимум решения достигается внутри области Q.