I. Теоремы

1. Сложные теоремы

1. Теорема о существовании точной верхней грани числового множества.

2. Теорема о пределе отношения функций.

3. Теорема о прохождении непрерывной функции через нулевое значение.

4. Теорема о непрерывности сложной функции.

5. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

6. Теорема о пределе последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$.

2. Простые теоремы

7. Теорема о сумме двух бесконечно малых функций.

8. Теорема о разности двух бесконечно малых функций.

9. Утверждение о единственности предела функции в точке.

10. Теорема о существовании предела функции в точке при условии существовании и равенства соответствующих односторонних пределов.

11. Теорема о произведении бесконечно малой функции на ограниченную.

12. Леммы о представлении функции, имеющей предел, в виде суммы константы и бесконечно малой (в обе стороны).

13. Теорема о пределе произведения функций.

14. Теорема о предельном переходе в неравенстве $f(x) \leqslant c$.

15. Теорема о «двух милиционерах».

16. Теорема о о пределе монотонной функции.

17. Теорема об односторонней непрерывности как достаточном условии обычной непрерывности.

18. Теорема о непрерывности суммы, разности, произведения и отношения функций.

19. Утверждение о локальной ограниченности функции, имеющей предел в точке a.

II. Образцы теоретических вопросов и задач

1. Простые вопросы и задачи

1. Пусть X, Y — непустые множества действительных чисел, и пусть $\sup X = \inf Y$. Доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in X \ \ \exists y \in Y \ \ |x - y| < \varepsilon.$$

2. Доказать по определению (указав какой-либо способ выбора $\delta > 0$ по $\varepsilon > 0$ или т. п., если речь идёт о «бесконечных пределах» или пределах на бесконечности):

$$\lim_{x \to 0} x^3 \cos \frac{1}{x} = 0.$$

3. Доказать отсутствие предела

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} \operatorname{ctg} x.$$

4. Доказать, что $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$.

2. Не самые простые вопросы и задачи

5. Найти все предельные точки множества $M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

6. Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ определены в некоторой окрестности точки a, и пусть каждая из функций $u(x)$, $v(x)$ не имеет предела в точке a. Что можно утверждать про функцию $u(x) + v(x)$? Ответ обосновать.

7. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Указать верные утверждения (одно или несколько):

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$;

3) функция $f(x)$ разрывна в точке $x = 0$;

4) функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$;

5) функция $f(x)$ не имеет предела при $x \to 0$.

8. Указать все такие $s > 0$, для которых верно равенство

$$\frac{1}{x^s} = o\left(\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{12}}\right) \quad \text{при } x \to +\infty$$

.

9. Пусть функция $f(x)$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$, и пусть a — фиксированное число. Пусть существует такое $d > 0$, что в любой проколотой δ-окрестности точки a найдутся такие точки x_1, x_2, что $|f(x_1) - f(x_2)| > d$. Доказать, что функция $f(x)$ разрывна в точке a. Может ли она иметь в этой точке устранимый разрыв?

10. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a и существуют пределы $\lim_{x\to a-0} f(x)$, $\lim_{x\to a+0} f(x)$, причём эти пределы равны. Верно ли, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a?

III. Структура билета.

1. Простая теорема.

2. Сложная теорема.

1. Простой вопрос.

2. Не самый простой вопрос.

IV. Образец билета.

1. Теорема о пределе произведения функций.

2. Теорема о существовании точной верхней грани числового множества.

1. Доказать по определению (указав какой-либо способ выбора $\delta > 0$ по $\varepsilon > 0$ или т. п., если речь идёт о «бесконечных пределах» или пределах на бесконечности):

$$\lim_{x\to 0} x^3 \cos\frac{1}{x} = 0.$$

2. Найти все предельные точки множества $M = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Общие замечания

1. Список теорем исчерпывающий, список вопросов и задач неисчерпывающий.

2. В процессе или после ответа студенту могут быть заданы дополнительный вопрос или задача.