

## 1. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого рода. Приложения.

2.1. Найдите поверхностные интегралы I рода.

2.2.1.  $\iint_S dS$ , где поверхность  $S: x + y + z = 1, x \in [-1;1], y \in [-1;1]$ .

2.2.2.  $\iint_S (x + y + z)dS$ , где поверхность  $S: x + y + z = 1, x \in [-1;1], y \in [-1;1]$ .

2.2.3.  $\iint_S (x + y + z)dS$ , где поверхность  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cap z \geq 0$ .

2.2.4.  $\iint_S (x^2 + y^2)ds$ , где  $S$  – граница тела  $V = \{(x, y, z): \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ .

2.2.5.  $\iint_S (x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2})ds$ , где  $S$  – часть параболоида  $2z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0$ .

2.3. Найдите координаты центра масс части однородной сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ с помощью поверхностного интеграла.}$$

2.4. Найдите момент инерции относительно оси  $Oz$  части конической поверхности

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ вырезанной цилиндром } x^2 + y^2 = 2x. \text{ Поверхностная плотность } \rho = x.$$

2.5. Найдите момент инерции относительно оси  $Oz$  части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0,$

$$y \geq 0, \text{ вырезанной цилиндром } x^2 + y^2 = 2x. \text{ Поверхностная плотность } \rho = zy.$$

## 3. Поверхностные интегралы второго рода. Приложения.

3.1. Найдите поверхностные интегралы:

3.1.1.  $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ , где  $S$  – верхняя сторона плоскости  $x + y + z = 1, x \in [-1;1], y \in [-1;1]$ , то есть нормаль к плоскости составляет острый угол с осью  $Oz$ .

3.1.2.  $\iint_S (y^2 + z^2)dxdy$ , где  $S$  – часть внешней стороны цилиндрической

$$\text{поверхности } z = \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq y \leq b$$

3.1.3.  $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$ , где  $S$  – часть внешней стороны конической

$$\text{поверхности } z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq c \text{ (внешняя нормаль образует тупой угол с осью } Oz).$$

3.1.4.  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ , где  $S$  – часть внутренней стороны гиперboloида

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 3.$$

3.1.5.  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ , где  $S$  – внешняя сторона сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

3.2. Найдите поток векторного поля  $\vec{F}$  через поверхность  $S$  в направлении внешней

нормали к  $S$ .

3.2.1.  $\vec{F} = \{-x^3, -y^3, -z^3\}$ ,  $S$  - поверхность куба  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ,  $0 \leq z \leq a$ .

3.2.2.  $\vec{F} = \{0, y^3, z\}$ ,  $S$  - часть параболоида  $z = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .

#### 4. Формула Остроградского - Гаусса.

4.1. Найдите интегралы, используя формулу Остроградского-Гаусса:

4.1.1.  $\iiint_S xdydz + yzdx + zxdy$ , где  $S$  - внутренняя сторона эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4.1.2.  $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ , где  $S$  - внешняя сторона поверхности тела

$$x^2 + y^2 \leq z \leq H.$$

4.1.3.  $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ , где  $S$  - внешняя сторона поверхности куба

$$x \in [-1; 1], y \in [-1; 1], z \in [-1; 1].$$

#### 5. Формула Стокса.

5.1. Пользуясь формулой Стокса, вычислите интегралы:

5.1.1.  $\int_{AB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$ , где  $AB$  есть отрезок винтовой линии

$$x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = \frac{h}{2\pi} \varphi \text{ от точки } A(a, 0, 0) \text{ до точки } B(a, 0, h).$$

5.1.2.  $\oint_L y^2 dx + xudy + (x^2 + y^2) dz$ , где  $L$  - замкнутый контур, образованный при

пересечении трех плоскостей  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = a$  с эллиптическим параболоидом  $x^2 + y^2 = az$ , причем  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  ( $a > 0$ ). Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(0, 0, 2a)$ .

5.1.3.  $\oint_L xdx + xdy + z dz$ , где  $L$  - окружность, образованная при пересечении сферы

$x^2 + y^2 + z^2 = 8$  и плоскости  $x = z$ . Обход окружности совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(0, 0, 5)$ .

5.1.4.  $\oint_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$ , где  $L$  - эллипс, образованный при

$$\text{пересечении цилиндрической поверхности } x^2 + y^2 = a^2 \text{ и плоскости } \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$$

( $a > 0$ ,  $h > 0$ ), пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(2a, 0, 0)$

5.2. Пользуясь формулой Стокса, найдите циркуляцию векторного поля

$\vec{F} = \{z^3, x^3, y^3\}$  вдоль контура, образованного при пересечении гиперболоида

$2x^2 + z^2 - y^2 = a^2$  и плоскости  $x + y = 0$ . Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(0, 2a, 0)$ .

- 5.3. Найдите работу силового поля  $\vec{F} = \{x + 3y + 2z, 2x + z, x - y\}$  вдоль замкнутого контура  $MNPM$ , где  $MNP$  – треугольник с вершинами в точках  $M(1, 0, 0)$ ,  $N(0, 1, 0)$ ,  $P(0, 0, 1)$ . Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(5, 5, 5)$ .

## 6. Дифференциальные операции в скалярных и векторных полях. Оператор Гамильтона. Инвариантные определения дивергенции и ротора

6.1. Найдите угол между:

- 6.1.1. Градиентами функций  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  и  $v = xy + yz + zx - 18x - 6z - y$  в точке  $M(3, 5, 4)$ .

- 6.1.2. Градиентами скалярного поля  $u = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$  в точках

$M_1(1, 2, 2)$  и  $M_2(-3, 1, 0)$ .

6.2. Дифференциальные операции

- 6.2.1. Найдите  $\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

- 6.2.2. Найдите  $\text{div}\vec{r}$ ,  $\text{div}(r\vec{r})$ ,  $\text{div}(r^2\vec{r})$ ,  $\text{div}(r^{-1}\vec{r})$ ,  $\text{div}(r^{-2}\vec{r})$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

- 6.2.3. Найдите  $\text{grad}(uv)$ ,  $\text{grad}(u^2)$ ,  $\text{grad} f(u)$ ,  $\text{grad}(\sin u)$ ,  $\text{grad}\frac{1}{u}$ , где  $u, v$  – дифференцируемые скалярные поля.

- 6.2.4. Вычислите  $\text{grad}(\vec{c}, \vec{r})$ , где  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\vec{c}$  – постоянный вектор.

- 6.2.5. Найдите  $\text{div}(r\vec{c})$ ,  $\text{div}(\vec{b}(\vec{r}, \vec{c}))$  где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . а векторы  $\vec{b}, \vec{c}$  – постоянные векторы.

- 6.2.6. Найдите  $\text{rot}\vec{r}$ ,  $\text{rot}(r\vec{r})$ ,  $\text{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

- 6.2.7. Применяя оператор Гамильтона, докажите, что  $\text{div}(u\vec{a}) = (\text{grad} u \cdot \vec{a}) + u \text{div} \vec{a}$ , где  $u$  – дифференцируемое скалярное поле,  $\vec{a}$  – дифференцируемое векторное поле.

- 6.2.8. Применяя оператор Гамильтона, докажите, что  $\text{rot}(u\vec{a}) = [\text{grad} u \cdot \vec{a}] + u \text{rot} \vec{a}$ , где  $u$  – дифференцируемое скалярное поле,  $\vec{a}$  – дифференцируемое векторное поле.

- 6.2.9. Докажите, что  $\text{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b}$ , где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – дифференцируемые векторные поля.

6.3. Повторные операции.

- 6.3.1. Докажите, что  $\text{div}(u \text{grad} v) = (\text{grad} u \cdot \text{grad} v) + u \Delta v$ , где  $u, v$  – дважды дифференцируемые скалярные поля;  $\Delta$  – оператор Лапласа.

- 6.3.2. Применяя оператор Гамильтона, докажите, что  $\text{rot}(\text{rot} \vec{a}) = \text{grad} \text{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$  где  $\vec{a}$  – дважды дифференцируемое векторное поле;  $\Delta$  – оператор Лапласа.

- 6.3.3. Вычислите  $\text{rot} \text{grad} u$ , где  $u$  – дважды дифференцируемое скалярное поле.

- 6.3.4. Вычислите  $\text{div} \text{rot} \vec{a}$ , где  $\vec{a}$  – дважды дифференцируемое векторное поле.

- 6.4. Вычислите дивергенцию электрического поля  $\vec{E}$  точечного заряда  $e$ , помещенного в точку  $(x_0, y_0, z_0)$ .
- 6.5. Вычислите ротор векторного поля  $\vec{a} = x\mathbf{i} + \frac{y}{y^2 + z^2}\mathbf{j} - \frac{z}{y^2 + z^2}\mathbf{k}$  в точках, где  $y^2 + z^2 \neq 0$  и циркуляцию этого поля вдоль окружности  $L: \{y^2 + z^2 = 1, x = x_0\}$ .
- 6.6. Найдите поток векторного поля  $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ : а) через внешнюю сторону боковой поверхности конуса  $x^2 + y^2 \leq z^2$  ( $0 \leq z \leq h$ ); б) через внутреннюю сторону основания этого конуса.
- 6.7. Найдите поток векторного поля  $\vec{a} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$  в направлении внешней нормали к поверхности: а) через боковую поверхность цилиндра  $x^2 + y^2 \leq a^2$  ( $0 \leq z \leq h$ ); б) через полную поверхность этого цилиндра.
- 6.8. Найдите поток векторного поля  $\vec{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$  через сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = x$  в направлении внешней нормали к поверхности.

## 7. Потенциальные векторные поля.

- 7.1. Проверьте, что векторное поле  $\vec{a}$  является потенциальным и найдите его скалярный потенциал.
- 7.1.1.  $\vec{a} = 2xyz\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$
- 7.1.2.  $\vec{a} = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$  ( $x^2 + y^2 \neq 0$ )
- 7.1.3.  $\vec{a} = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$
- 7.2. Убедитесь, что векторное поле  $\vec{a} = \frac{2}{(y+z)^{1/2}}\mathbf{i} - \frac{x}{(y+z)^{3/2}}\mathbf{j} - \frac{y}{(y+z)^{3/2}}\mathbf{k}$  является потенциальным и найдите работу этого поля вдоль пути, соединяющего точки  $M(1, 1, 3)$  и  $N(2, 4, 5)$  и расположенного в октанте  $x > 0, y > 0, z > 0$ .

## 8. Соленоидальные векторные поля.

- 8.1. Проверьте, что векторное поле  $\vec{a} = ye^{x^2}\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - (2xyze^{x^2} + z^2)\mathbf{k}$  является соленоидальным.
- 8.2. Разложите векторное поле  $\vec{a} = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + (z + 1)\mathbf{k}$  на сумму потенциального и соленоидального полей.
- 8.3. Проверьте, что векторное поле  $\vec{a} = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$  является соленоидальным и найдите его векторный потенциал.

## 9. Числовые ряды

9.1. Найдите сумму ряда:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ;

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^k$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ ;

д)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$ .

9.2. Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость ряда:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}.$$

9.3. Пользуясь критерием Коши, докажите, что ряд расходится:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

9.4. Исследуйте ряды на сходимость:

$$9.4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n};$$

$$9.4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n;$$

$$9.4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \sin \frac{1}{n^2 + n + 1}\right);$$

$$9.4.4. \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2);$$

$$9.4.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}};$$

$$9.4.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!};$$

$$9.4.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n};$$

$$9.4.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n};$$

$$9.4.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$$

$$9.4.10. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{n};$$

$$9.4.11. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n};$$

$$9.4.12. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};$$

$$9.4.13. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos^2 \frac{n\pi}{3};$$

$$9.4.14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n}\right)^{2n - \ln n};$$

$$9.4.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p} \quad p > 1;$$

$$9.4.16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}, \quad p \leq 1;$$

$$9.4.17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n};$$

$$9.4.18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)};$$

$$9.4.19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln \frac{n-1}{n+1}.$$

9.5. Исследуйте ряды на сходимость и абсолютную сходимость:

$$9.5.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n},$$

$$9.5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1}};$$

$$9.5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p};$$

$$9.5.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p};$$

$$9.5.5. \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right);$$

$$9.5.6. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right);$$

$$9.5.7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{\ln n};$$

$$9.5.8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}};$$

$$9.5.9. \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + k^2}).$$

+

## 10. . Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Признаки сходимости.

10.1. Найдите предел и исследуйте на равномерную сходимость функциональную последовательность на заданном промежутке:

10.1.1.  $f_n(x) = x^n$ ,  $x \in [0, 1]$ .

10.1.2.  $f_n(x) = e^{-nx}$  а)  $x \in (0, 1)$ ; б)  $x \in [1, \infty)$ .

10.1.3.  $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ ,  $x \in [0; 1]$ .

10.1.4.  $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ , а)  $x \in [1; +\infty)$ ; б)  $x \in [0; 1]$ .

10.1.5.  $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ ,  $x \in [0; +\infty)$ .

10.1.6.  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^4}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

10.2. Определите область сходимости функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ .

10.3. Определите области абсолютной и условной сходимости функциональных рядов:

10.3.1.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^x}$ .

10.3.2.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k^x + (-1)^k}$

10.4. Исследуйте ряды на равномерную сходимость.

10.4.1.  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}$ ,  $x \in (0; +\infty)$ .

10.4.2.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2kx)}{k\sqrt{k}}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$

10.4.3.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}x}{1+k^4x^2}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$

10.4.4.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + \sqrt{x}}$ ,  $x \in [0; +\infty)$

10.4.5.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ ,  $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ , где  $\varepsilon > 0$ .

10.5. Определите радиус и интервал сходимости степенных рядов.

10.5.1.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k$

10.5.2.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$

$$10.5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$$

## 11. Дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Предельный переход. Непрерывность.

11.1. Укажите область определения функции  $f(x)$  и исследуйте функцию на непрерывность:

$$11.1.1. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \text{ где } x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], 0 < \varepsilon < 2\pi.$$

$$11.1.2. f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x},$$

$$11.1.3. f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^x},$$

11.2. Докажите, что функция  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$  непрерывна и имеет непрерывную производную на всей прямой  $(-\infty; \infty)$ .

11.3. Укажите область сходимости и найдите сумму степенного ряда:

$$11.3.1. \sum_{k=1}^{\infty} x^k,$$

$$11.3.2. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$$11.3.3. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

$$11.3.4. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

$$11.3.5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$

$$11.3.6. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

$$11.3.7. \sum_{k=1}^{\infty} kx^k.$$

11.4. Получите разложение в степенной ряд функции  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ . Найдите

сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ . Указание: сначала разложите в степенной ряд производную

$f(x) = \operatorname{arctg} x$ , а потом примените почленное интегрирование.

## 12. Сходимость в среднем.

12.1. Докажите, что функциональная последовательность  $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$  сходится в каждой точке и в среднем на сегменте  $[0; 1]$  к функции  $f(x) = 0$ .

12.2. Докажите, что функциональная последовательность  $f_n(x) = nx^n \sqrt{1-x}$  сходится в каждой точке сегмента  $[0; 1]$  к функции  $f(x) = 0$  и не сходится в среднем на сегменте  $[0; 1]$  к этой функции.

### 13. Несобственные интегралы.

13.1. Исследуйте сходимость интегралов:

$$13.1.1. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$13.1.2. \int_0^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$13.1.3. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^3)}{x^3 \sqrt{x}} dx;$$

$$13.1.4. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^3)}{x^4 \sqrt{x}} dx;$$

$$13.1.5. \int_1^{+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx;$$

$$13.1.6. \int_1^{+\infty} (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}) dx;$$

$$13.1.7. \int_0^{+\infty} x \sin(x^3) dx.$$

13.2. Докажите, что следующие интегралы сходятся:

$$13.2.1. \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx;$$

$$13.2.2. \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \quad n > -1.$$

13.3. Докажите, что следующие интегралы сходятся, и вычислите их:

$$13.3.1. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx;$$

$$13.3.2. \int_0^1 \ln x dx;$$

$$13.3.3. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx;$$

$$13.3.4. \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx.$$

13.4. Исследуйте интегралы на сходимость и вычислите в случае сходимости.

$$13.4.1. \int_1^{+\infty} \sin(\ln x) dx;$$

$$13.4.2. \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx;$$

$$13.4.3. \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^2} dx.$$

13.5. Найдите, при каких значениях параметра  $p$  сходятся интегралы:

$$13.5.1. \int_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad p > 0;$$

$$13.5.2. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p};$$

$$13.5.3. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p};$$

$$13.5.4. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) dx}{x^p}, \quad a > 0.$$

13.6. Определите, при каких значениях параметра  $p$  интегралы сходятся



абсолютно и при каких  $p$  – условно:

$$13.6.1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx ;$$

$$13.6.2. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx .$$

#### 14. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

14.1. Исследуйте интегралы на равномерную сходимость в указанных промежутках изменения параметра  $p$ , используя определение равномерной сходимости несобственного интеграла.

$$14.1.1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, p \in (1; +\infty). \int_0^1 \frac{dx}{x^p}, p \in (0; 1);$$

$$14.1.2. \int_0^{+\infty} e^{-px} \sin x dx, \text{ а) } p \in (0; +\infty), \text{ б) } p \in [a; +\infty), a > 0;$$

$$14.1.3. \int_0^{+\infty} e^{-px} dx \text{ а) } p \in (0; +\infty); \text{ б) } p \in [a; +\infty), a > 0.$$

14.2. Исследуйте интегралы на равномерную сходимость в указанных промежутках изменения параметра  $p$ , используя признаки равномерной сходимости интеграла.

$$14.2.1. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, p \in [a; +\infty), a > 0;$$

$$14.2.2. \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{1-x}} dx, p \in [0; +\infty);$$

$$14.2.3. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} e^{-px} dx, p \in [0; +\infty).$$

14.3. Докажите, что функция  $f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(px)}{1+x^2} dx$  непрерывна на промежутке  $p \in (-\infty; +\infty)$ .

14.4. Для каких значений  $p$  сходится интеграл  $\int_0^1 x^p (\ln x)^2 dx$ ? Вычислите его, дифференцируя по параметру интеграл  $\int_0^1 x^p dx$ . Обоснуйте возможность применения этого метода.

14.5. Для каких значений  $q$  сходится интеграл  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin qxdx$ ? Вычислите его, дифференцируя по параметру интеграл  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos qxdx$ . Обоснуйте возможность применения этого метода.

14.6. Вычислите:

$$14.6.1. \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx, \text{ дифференцируя по параметру интеграл } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2} dx ;$$

$$14.6.2. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ дважды дифференцируя по параметру интеграл } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2} dx .$$

$$14.6.3. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-px} dx, p > 0, \text{ дифференцируя по параметру.}$$

14.7. Укажите область сходимости следующих интегралов и выразите их через интегралы Эйлера:

14.7.1.  $\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t^2} dt$ ;

14.7.2.  $\int_0^{+\infty} e^{-x^p} dx$ ;

14.7.3.  $\int_0^1 (-\ln t)^p dt$ ;

14.7.4.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx$ ;

14.7.5.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^q} dx$ ;

14.7.6.  $\int_0^1 (1-x^p)^{\left(\frac{-1}{p}\right)} dx, p > 0$ .

## 15. Ряды Фурье.

15.1. Найдите ряд Фурье функций  $f(x)$ , нарисуйте график суммы ряда Фурье:

15.1.1.  $f(x) = \cos^2 x$ ;

15.1.2.  $f(x) = 1, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), f(x) = -1, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right), f(x+2\pi) = f(x)$ ;

15.1.3.  $f(x) = x, x \in [-\pi; \pi), f(x+2\pi) = f(x)$ ;

15.1.4.  $f(x) = \frac{\pi}{2} + x, x \in [-\pi; 0), f(x) = \frac{\pi}{2} - x, x \in [0; \pi), f(x+2\pi) = f(x)$ .

15.2. Найдите разложение функции  $f(x)$  в ряд Фурье по косинусам кратных дуг и нарисуйте график суммы ряда Фурье:

15.2.1.  $f(x) = x, x \in [0; \pi]$ ;

15.2.2.  $f(x) = \sin x, x \in [0; \pi]$ .

15.3. Найдите разложение функции  $f(x)$  в ряд Фурье по синусам кратных дуг и нарисуйте график суммы ряда Фурье:

15.3.1.  $f(x) = 1, x \in [0; \pi]$ ;

15.3.2.  $f(x) = x, x \in [0; \pi]$ ;

15.3.3.  $f(x) = \cos x, x \in [0; \pi]$ .

15.4. Пусть  $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \varphi_k$  – ряд Фурье функции  $f(x), x \in [0; \pi]$ , по ортогональной

системе функций  $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, x \in [0; \pi], n \geq 1$ . Найдите  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$  для

следующих функций:

15.4.1.  $f(x) = x$ ;

15.4.2.  $f(x) = x(\pi - x)$ .

## 16. Интеграл Фурье.

16.1. Представьте интегралом Фурье функцию  $f(x)$ :

16.1.1.  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ;

$$16.1.2. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

16.2. Найдите преобразование Фурье функций  $f(x)$ :

$$16.2.1. \quad f(x) = e^{-p|x|}, \quad p > 0;$$

$$16.2.2. \quad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$16.2.3. \quad f(x) = e^{-p|x|} \sin \beta x, \quad p > 0;$$

$$16.2.4. \quad f(x) = 1, \quad x \in [-p; p], \quad f(x) = 0, \quad x \notin [-p; p].$$