3. Общая задача Коши. Функция Римана

1.Функция Римана

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{xy} = f(x,y), \quad (x,y) \in D^+, & (1) \\ u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in C, & (2) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \mathrm{C}. & (3) \end{cases}$$

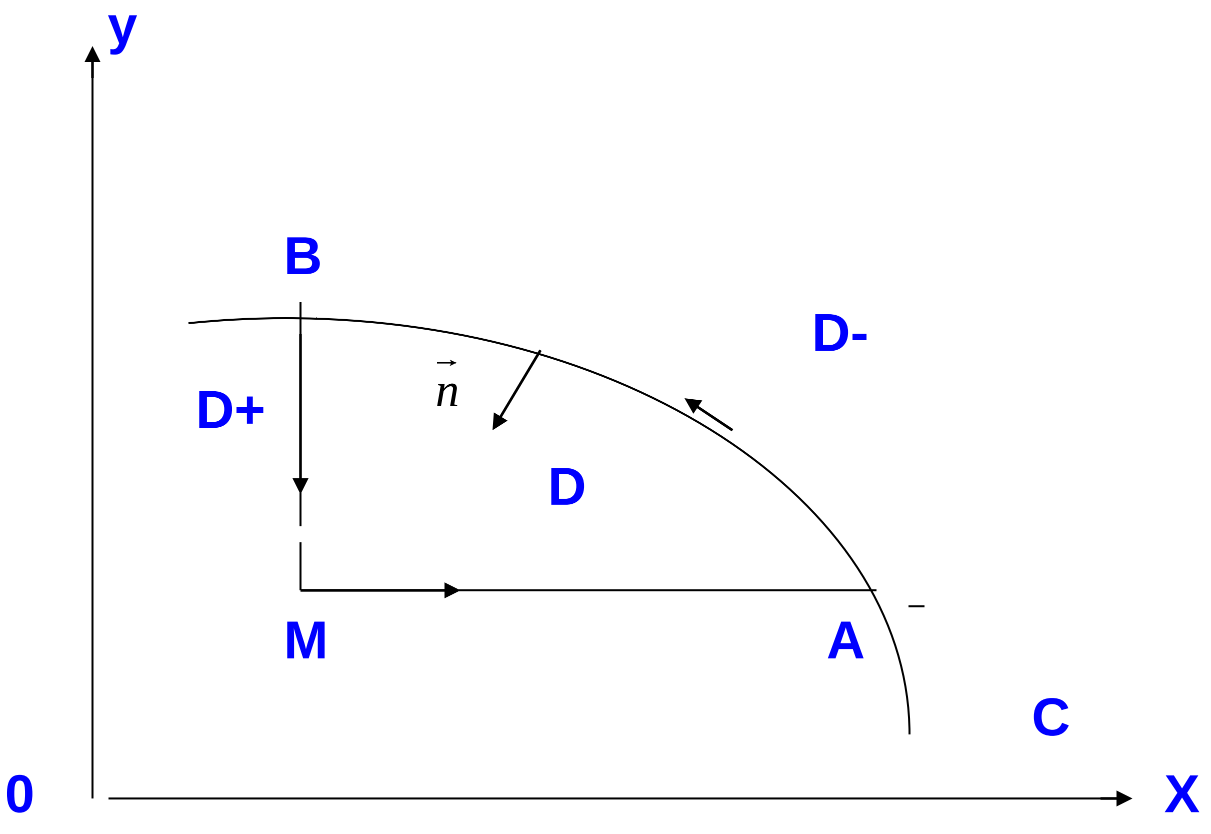
Кривая С – бесконечно гладкая кривая, делящая плоскость *(x,y)* на две криволинейные полуплоскости *D+* и *D-* и удовлетворяющая условиям:

а) кривая *С* не является характеристикой уравнения (1);

б) любая характеристика уравнения (1) пересекает кривую *С* только 1 раз.

в формуле (3) $\dfrac{\partial}{\partial n}$ - производная по нормали к кривой *C*, направленная внутрь области *D*+.

Построим формулу, выражающую решение задачи (1) – (3) в любой точке *M* области *D*+.



Рассмотрим выражение

$$Vu_{xy} - uV_{xy} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\}, \qquad (4)$$

где

$$P\left[u,V\right] = V_x u - Vu_x, \qquad (5)$$

$$Q\left[u,V\right] = Vu_y - V_y u. \qquad (6)$$

Формула Грина:

$$\int\limits_D \left(Vu_{xy} - uV_{xy}\right) dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma Pdx + Qdy,$$

где $\overline{D} = D \uplus \Gamma.$

Рассмотрим интегралы вдоль характеристик *AM* и *BM*:

$$\int_M^A P dx = \int_M^A \left(V_x u - V u_x\right) dx = \left(Vu\right)_M - \left(Vu\right)_A + 2\int_M^A V_x u dx \qquad \textbf{(7)}$$

$$\int_B^M Q dy = \int_B^M \left(u_{yV} - uV_y\right) dy = \left(Vu\right)_M - \left(Vu\right)_B - 2\int_B^M uV_y dy \qquad \textbf{(8)}$$

(6)-(8) $\Rightarrow$

$$\int_D \left(Vu_{xy} - uV_{xy}\right) dxdy = \left(Vu\right)_M - \frac{\left(Vu\right)_A + \left(Vu\right)_B}{2} + \frac{1}{2}\int_A^B Pdx + Qdy + \int_M^A V_x u dx - \int_B^M uV_y dy$$

Пусть *u(x,y)*-решение задачи (1)-(3), а *V(x,y)*-решение задачи (10) с данными на характеристиках (задача Гурса):

$$V_{xy} = 0,\ (x,y) \in D,$$
$$V_x\Big|_{AM} = 0,\ V_y\Big|_{BM} = 0,\ V(M) = 1$$

Функция *V*=1 в области *D* удовлетворяет всем условиям задачи (10) и представляет собой частный случай функции Римана.

Подставим *V*=1 в (9) $\Rightarrow$

$$\int_D u_{xy}\,dxdy = u(M) - \frac{u(A)+u(B)}{2} + \frac{1}{2}\int_A^B \left(-u_x dx + u_y dy\right)$$

(1)-(3) $\Rightarrow$

$$u(M) = \frac{\varphi(A)+\varphi(B)}{2} + \frac{1}{2}\int_A^B \left(-u_x dx + u_y dy\right) + \int_D f(x,y)\,dxdy \quad \textbf{(11)}$$

На дуге AB известны выражения

$$u_x = u_\tau \cos(\tau, x) + u_n \cos(n, x), \quad u_y = u_\tau \sin(\tau, x) + u_n \sin(n, x)$$

Формула (11) даёт решение задачи (1)- (3) через входные данные.

Замечание. Из формулы (11) следует:

1) Теорема единственности решения задачи (1)-(3);

2) Теорема устойчивости решения задачи (1)-(3);

3) Теорема существования решения задачи (1)-(3) (при выполнении условия гладкости входных данных.

Рассмотрим более общую задачу:

$$L[u] \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), (x,y) \in D^+ \qquad (12)$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \;\; (x,y) \in C, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \psi(x,y), \;\; (x,y) \in C. \qquad (14)$$

Определение. Два дифференциальных оператора *L* и *K* называются сопряженными, если разность $VL[u] - uK[V]$ является разностью первых частных производных по Х и У от некоторых выражений *P* и *Q*:

$$VL[u] - uK[V] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), \qquad (15)$$

Причем *P* не содержит производной *Uy*, а *Q* не содержит производной *Ux.*

Сопряженным к оператору *L* будет оператор *K*:

$$K[V]=V_{xy}-(aV)_x-(bV)_y+cV \tag{16}$$

Для операторов *L* и *K* выполняется (15) при

$$P[u,V]=uV_x-u_xV-2buV,\ Q[u,V]=Vu_y-V_yu+2auV \tag{17}$$

Формула Грина:

$$\iint_D\{VL[u]-uK[V]\}dxdy=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\frac{1}{2}\int_\Gamma Pdx+Qdy=$$
$$=\frac{1}{2}\int_M^A Pdx+\frac{1}{2}\int_{AB}Pdx+Qdy+\frac{1}{2}\int_B^M Qdy \tag{18}$$

Интегрируем по частям:

$$\int_M^A Pdx=u(M)V(M)-u(A)V(A)+2\int_M^A P[V]udx,$$
$$\int_B^M Qdy=u(M)V(M)-u(B)V(B)-2\int_B^M Q[V]udx, \tag{19}$$

где
$$P[V]=V_x-bV,\quad Q[V]=V_y-aV$$
(20)

Рассмотрим задачу с данными на характеристиках (задачу Гурса):

$$K[V]=0\quad (x,y\in D),$$

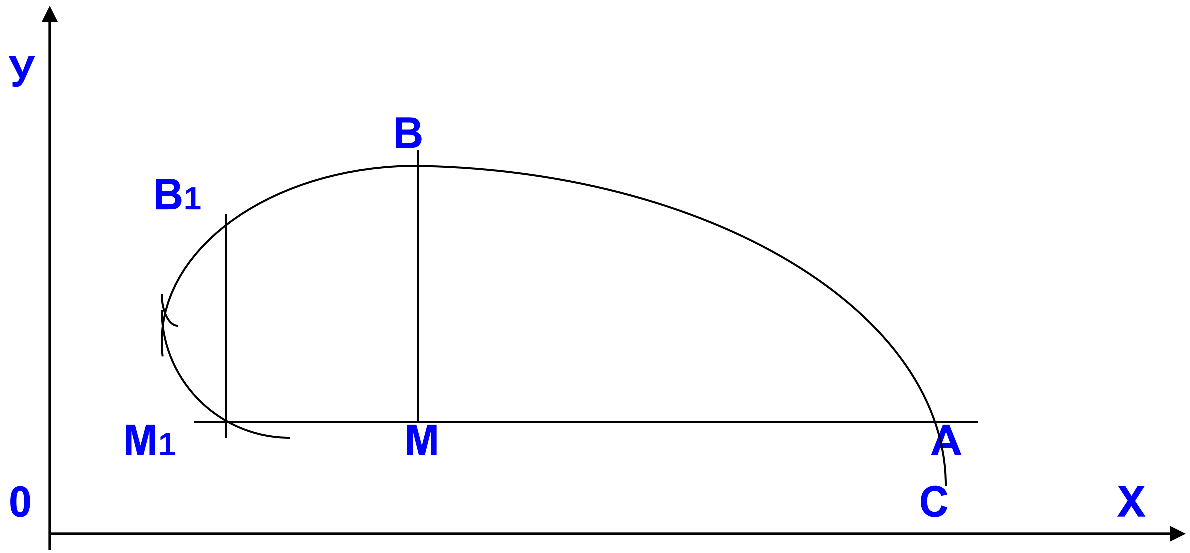
$$\tilde{P}[V]=0 \quad \text{на } AM,\quad \tilde{Q}[V]=0 \text{ на } MB,\quad V\big|_M=1.$$

Можно показать, что решение задачи (21) всегда существует. Она называется функцией Римана. Функция V(M,M1) удовлетворяет по координатам точки M1 задаче (21) и зависит от точки M как от параметра.

$$(18)-(21),(12)\ \Rightarrow\ u(M)=\frac{(\varphi V)_A+(\varphi V)B}{2}+$$
$$=+\int_D V(M,M_1)\,f(M_1)\,d\sigma_1-\tfrac{1}{2}\int_{AB}Pdx+Qdy$$

Интеграл по *AB* легко вычисляется, поскольку функции V,φ,ψ **известны.**

<u>Замечание.</u> Любая характеристика уравнения (12) должна пересекать кривую С не более одного раза. Если характеристика пересекает кривую С в двух точках *A* и *M1*, то значение *U(M1)* не может быть задано произвольно, а определяется по формуле:



Если характеристика пересекает кривую C в двух точках A и M_1, то значение $U(M_1)$ не может быть задано произвольно, а определяется по формуле:

$$u(M_1) = \frac{u(A)V(A) + u(B_1)V(B)_1}{2} + \int\limits_{D_1} Vf\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int\limits_{A}^{B_1} P\,dx + Q\,dy \qquad \mathbf{(23)}$$

с начальным значением, заданным на дуге AB_1 и функцией f(x,y), заданной в области D_1 – криволинейном треугольнике M_1B_1A.

2. Физический смысл функции Римана

Рассмотрим задачу:

$$L[u]=f,\ (x,y)\in D^+,\quad u\big|_C=0,\quad u_n\big|_C=0.$$

$$(22)\ \Rightarrow\ \ u(M)=\int\limits_D V(M,M_1)\,f(M_1)\,d\sigma_{M_1}\qquad (24)$$

Пусть $f_\varepsilon(M)$ **- локальная функция точки М1:** $\quad f_\varepsilon(M)=0, M\notin S_{M_1}^{\varepsilon},$

где $S_{M_1}^{\varepsilon}$ **- окрестность точки М1.**

Условие нормировки

$$\int\limits_{s_{M_1}^{\varepsilon}} f_\varepsilon(M_1)\,d\sigma_{M_1}=1,\quad \forall\varepsilon>0\qquad (25)$$

$$u_\varepsilon(M) = \int\limits_{S^{\varepsilon}_{M_1}} V(M, M_1) f_\varepsilon(M_1) d\sigma_{M_1} =$$

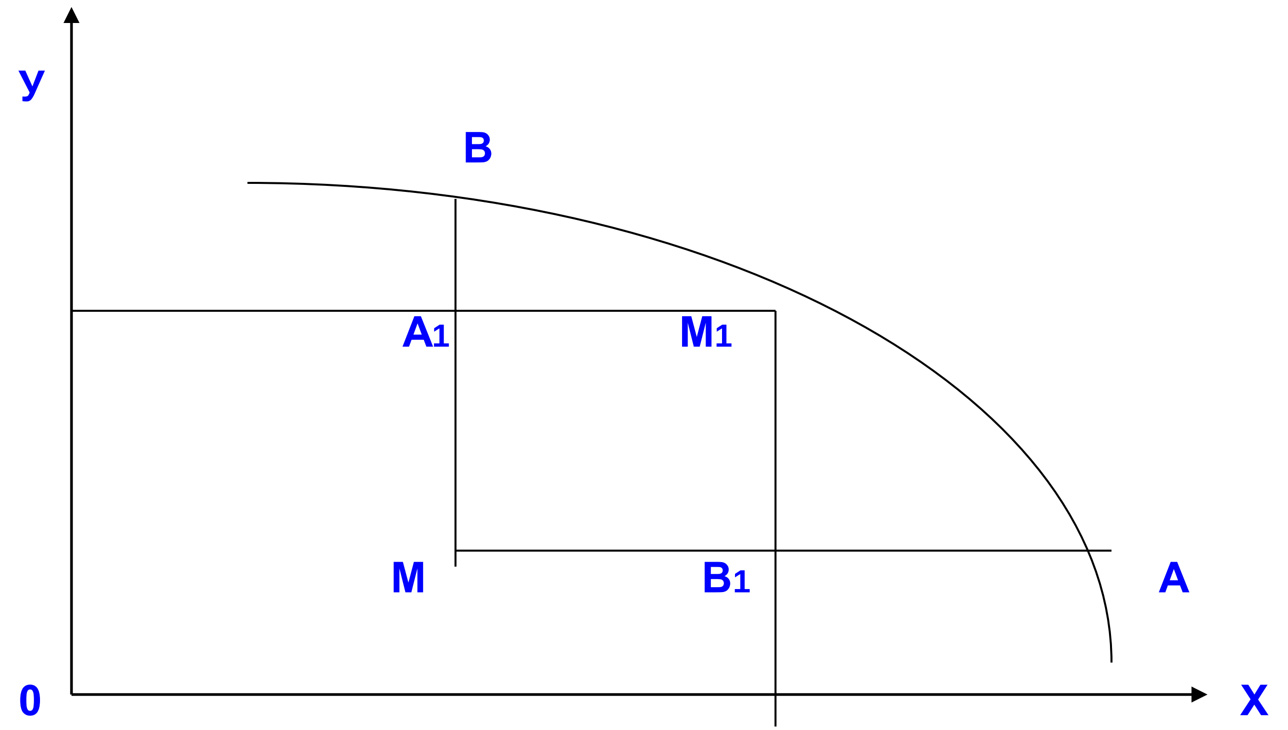
$$= V(M, M^*) \int\limits_{s^{\varepsilon}_{M_1}} f_\varepsilon (= V(M, M^*), \quad M* \in S^{\varepsilon}_{M_1}. \qquad (26)$$

$$(26) \Rightarrow u_0(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(M) = V(M, M_1) \Rightarrow$$

***$V(M_1)$*- функция влияния единичного точечного импульса, приложенного в точке *M_1*.**

Рассмотрим функцию *$U=U(M,M_1)$*, зависящую от точки *M_1* как от параметра и удовлетворяющую по координатам точки *M* следующей задаче Гурса:

$$\begin{cases} L\left[u\right] = 0, \\ u_x + bu = 0 \quad \left(x, y\right) \in M_1 A_{1,} \\ u_y + au = 0 \quad \left(x, y\right) \in B_1 M_{1,} \\ u\big|_{M_1} = 1. \end{cases} \qquad (27)$$



Задача (27) полностью определяет функцию U в четырехугольнике $MB_1M_1A_1$, образованном отрезками характеристик.

Проинтегрируем формулу Грина (18) по четырехугольнику $MB_1M_1A_1$, учитывая формулы (21) и (27).

$$(18),(21),(27) \Rightarrow$$

$$\int\limits_{MB_1M_1A_1} (VL[u]-uK[V])dxdy =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_{M}^{B_1} Pdx + \tfrac{1}{2}\int\limits_{A_1}^{M} Qdy + \tfrac{1}{2}\int\limits_{M_1}^{A_1} \left(uV_x - Vu_x - 2buV\right)dx + \qquad (28)$$

$$+\tfrac{1}{2}\int\limits_{B_1}^{M_1} \left(Vu_y - uV_y + 2auV\right)dy = \left(uV\right)_M - \left(uV\right)M_1 = 0.$$

Òàê êàê $V\big|_M = 1,\ u\big|M_1 = 1,$ òî $\mathrm{u(M,M_1)} = V(M,M)$ (29)

3. Уравнения с постоянными коэффициентами

1. Функция Римана для уравнения $u_{xy} + cu = 0.$

Так как оператор $L[u] \equiv u_{xy} + cu \equiv K[u]$ **- самосопряженный, то** $(21) \Rightarrow$

$$\begin{cases} V_{xy} + CV = 0 \quad (x, y) \in D, \\ V_x = 0 \ \text{í à} \ \mathrm{M}_0 A, \\ V_y = 0 \ \text{í à} \ \mathrm{BM}_{0,} \\ V\big|_{M_0} = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (30)$$

$$\begin{cases} V_{xy} + CV = 0 \quad (\mathrm{x,y}) \in \mathrm{D}, \\ V = 1 \ \text{í à} \ \mathrm{M}_0 A, \ \ \text{í à} \ \text{ÂÌ}_0. \end{cases} \qquad (31)$$

Ищем функцию Римана в виде $V = V(z)$**, где**

$$z = \sqrt{(x - x_0)(y - y_0)},\ M_0 = \{x_0, y_0\},\ \mathrm{M} = \{x, y\}.$$

$$(31)\ \Rightarrow \qquad \mathrm{V}(0)=1 \qquad (32)$$

$$V_x = V' \tfrac{y-y_0}{2z},\ V_{xy} = \tfrac{1}{4}V'' + \tfrac{1}{4z}V' \ \Rightarrow\ \mathrm{V}'' + \tfrac{1}{z}V' + 4CV = 0 \quad (33)$$

$$V(M, M_0) = V(x, y, x_0, y_0) = J_0(2\sqrt{C(x - x_0)(y - y_0)}) \quad (34)$$

2. Задача Коши для уравнения колебаний.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} + au_t + bu_z + gu = 0, \quad -\infty < z < \infty,\ t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(z),\ \ u_t\big|_{t=0} = \psi(z),\ \ -\infty < z < \infty. \end{cases} \quad (35)$$

Замена:

$$u = Ue^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} \quad (36)$$

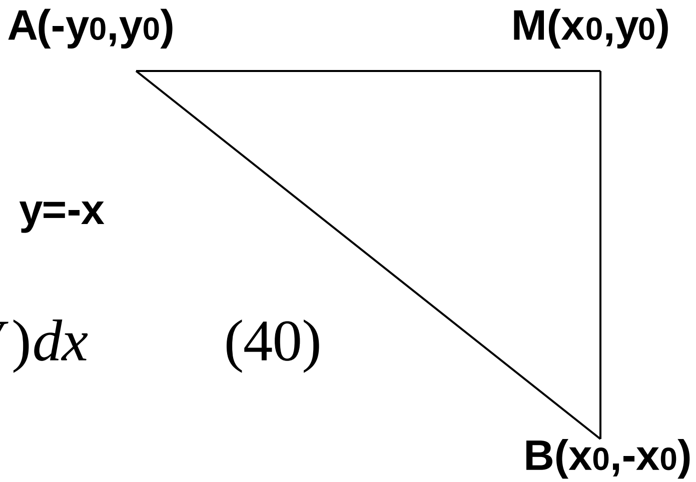
$$\begin{cases} U_{tt} - U_{zz} + CU = 0, \quad \text{-}\infty < \mathrm{z} < \infty,\ \mathrm{t} > 0, \\ U\big|_{t=0} = \varphi(z) e^{-\frac{b}{2}z} = \varphi_1(z), \\ U_t\big|_{t=0} = (\psi(z) + \frac{a}{2}\varphi(z)) e^{-\frac{b}{2}z} = \psi(z), \quad \text{-}\infty < \mathrm{z} < \infty, \end{cases} \tag{37}$$

$$C = -\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + g.$$

Перейдем к переменным *Х и У*:

$$x = t + z,\ y = t - z \ \Rightarrow\ t = \frac{x+y}{2},\ \mathrm{z} = \frac{x-y}{2}. \tag{38}$$

$$\begin{cases} W_{xy} + \frac{C}{4} W = 0, \\ W\big|_{x+y=0} = \varphi_1(\frac{x+y}{2}), \\ (W_x + W_{y)}\big|_{x+y=0} + \psi(\frac{x-y}{2}) \end{cases} \tag{39}$$



$$t=0 \;\Rightarrow\; \text{y=-x, dx=dz, dy=-dz}$$

$$(22) \;\Rightarrow\; \mathrm{W}(\mathrm{x}_0, y_0) = \frac{\varphi_1(-y_0)+\varphi(x_0)}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{AB} (VW_y - WV_y)dy + (WV_x - W_x V)dx \qquad (40)$$

$$W_x = \tfrac{1}{2}(U_t + U_z), \quad \mathrm{U}_y = \tfrac{1}{2}(U_t - U_z) \qquad (41)$$

$$(34),(40),(41) \;\Rightarrow\; \mathrm{U}(\mathrm{z}_0, t_0) = \frac{\varphi_1(z_0+t_0)+\varphi_1(z_0-t_0)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{z_0-t_0}^{z_0+t_0} \left\{ \psi_1(\mathrm{z}) J_0\left(\sqrt{C}\,\sqrt{t_0^2-(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^2}\right) - \varphi_1(\mathrm{z}) \frac{J_1\left(\sqrt{C}\sqrt{t_0^2-(\mathrm{z}-z_0)^2}\right)}{\sqrt{t_0^2-(\mathrm{z}-z_0)^2}} \sqrt{C}\, t_0 \right\} \mathrm{dz} \quad (42)$$

При C=0 из (40) получаем формулу Даламбера:

$$U(z_0, t_0) = \frac{\varphi_1(z_0+t_0)+\varphi_1(z_0-t_0)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{z_0-t_0}^{z_0+t_0} \psi_1(z)dz \qquad (43)$$