МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Вопросы по линейной алгебре, весенний семестр
(2 поток, лектор А. А. Шишкин)

1. Числовые поля. Линейное пространство (**ЛП**). Примеры **ЛП**. Линейная зависимость и линейная независимость элементов **ЛП**.
2. Размерность **ЛП**. Базис **ЛП**. Связь базиса и размерности **ЛП**.
3. Координаты элемента **ЛП**. Преобразование базиса. Преобразование координат элемента **ЛП** при преобразовании базиса. Изоморфизм **ЛП**.
4. Подпространство **ЛП**. Свойства подпространств.
5. Линейная оболочка (**ЛО**) конечного набора элементов **ЛП**. Свойства **ЛО**. **ЛО** столбцов матрицы Теоремы о ранге произведения матриц.
6. Системы линейных уравнений (**СЛУ**). Теорема Кронекера-Капелли. Однородные **СЛУ**. Фундаментальная совокупность решений однородной **СЛУ**.
7. Неоднородные **СЛУ**.
8. Евклидовы и унитарные пространства (**ЕП** и **УП**). Примеры **ЕП** и **УП**. Метрические свойства **ЕП**. Неравенство Коши-Буняковского.
9. Ортонормированный базис (**ОНБ**) в **ЕП**. Процесс ортогонализации Шмидта. Ортогональное дополнение подпространства **ЕП**. Разложение **ЕП** на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств.
10. Ортогональные и унитарные матрицы.
11. Общий вид линейного функционала. Изоморфизм **ЕП**.
12. Линейный оператор. Примеры. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе от одного базиса к другому. Ядро и образ линейного оператора.
13. Действия над линейными операторами и соответствующие действия над матрицами. Теорема о **ЛП** линейных операторов, действующих в данном линейном пространстве над полем К.
14. Присоединенные векторы. Жорданов базис. Жорданова форма матрицы линейного оператора. Теорема о приведении матрицы линейного оператора к жордановой форме (без доказательства).
15. Умножение линейных операторов. Обратный оператор.
16. Инвариантные подпространства линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
17. Сопряжённый линейный оператор в **ЕП**.
18. Симметричный линейный оператор в **ЕП**.
19. Ортогональный линейный оператор в **ЕП**.
20. Сопряжённый линейный оператор в **УП**.
21. Эрмитов линейный оператор в **УП**.
22. Унитарный линейный оператор в **УП**.
23. Квадратичная форма (**КФ**). Матрица **КФ**. Изменение **КФ** при линейном преобразовании переменных.

24. Методы Лагранжа и ортогональных преобразований приведение **КФ** к каноническому виду.
25. Классификация **КФ**. Закон инерции **КФ**. Критерий Сильвестра.
26. Билинейные формы (**БФ**) и их связь с **КФ**. Метод Якоби приведения **КФ** к каноническому виду.
27. Симметричные **БФ**. Канонический базис **БФ**.
28. Приведение общего уравнения второй степени к каноническому виду. Классификация алгебраических уравнений второй степени и кривых второго порядка.
29. Инварианты алгебраического уравнения второй степени. Выражение коэффициентов канонического уравнения кривой второго порядка через его инварианты.
30. Тензоры. Примеры тензоров. Операции над тензорами.
31. Тензоры в **ЕП**. Метрические тензоры. Вычисление координат элемента **ЕП**. Подъём и опускание индексов. Физические примеры тензоров.
32. Группы. Примеры групп. Группа движений. Группа преобразований **ЛП**.
33. Псевдоевклидово пространство. Пространство Минковского. Группа преобразований Лоренца.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Теоретические задачи, входящие в экзаменационные билеты.

Доказать, что в линейном пространстве $H_n^n(K_o)$ подмножество, состоящее из симметричных матриц, т.е. матриц, удовлетворяющих условию $A^т=A$, является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

1. Доказать, что в линейном пространстве $H_n^n(K_o)$ подмножество, состоящее из антисимметричных матриц, т.е. матриц, удовлетворяющих условию $A^т=-A$, является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.
2. Доказать, что линейное пространство V_3 представляет собой прямую сумму P_1 и P_2, где P_1 – множество векторов, ортогональных данному ненулевому вектору **b**, а P_2 - множество векторов, параллельных вектору **b**.
3. Доказать, что матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ образуют базис в пространстве $H_2^2(C)$.
4. Доказать, что однородная система линейных уравнений $AX=\theta$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда столбцы матрицы A линейно зависимы.
5. Рассматривается линейное пространство $P_{2n}(K_0)$ полиномов степени не выше 2n. Является ли подпространством этого пространства множество всех полиномов p(x), удовлетворяющих условиям: p(-1)=0, p(1)=0? В случае положительного ответа найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

7. Рассматривается линейное пространство R, $\dim R=n\in\mathbf{N}$. Матрица A является матрицей перехода от базиса e к базису f, а матрица B – матрицей перехода от базиса f к базису g. Найти матрицу перехода от базиса g к базису e.

8. Доказать, что в линейном пространстве $H_n^m(K_0)$ можно ввести скалярное произведение элементов X.Y по формуле: $(X,Y)=tr(X^тY)$, где $tr(X^тY)$ – след матрицы $X^тY$.

9.Пусть П – линейное пространство положительных чисел, в котором сумма элементов x,y определяется как произведение xy, а произведение элемента x на вещественное число c – степень x^c. Доказать, что в пространстве П любые два элемента x и y линейно зависимы.

10. Доказать, что размерность линейного пространства не меньше размерности любого его подпространства.

11. Доказать, что ранг матрицы равен размерности линейной оболочки её столбцов.

12. Доказать: если линейные пространства R и R* изоморфны , то линейно независимым элементам $x_1,x_2,\ldots,x_m\in R$ соответствуют линейно независимые элементы $x_1^*,x_2^*,\ldots,x_m^*\in R^*$.

13. В евклидовом пространстве **E** с ортонормированным базисом $(e_к)_n$ действует линейный оператор A. Доказать равенство: $a^k_m=(e_k,Ae_m)$, k,m=1,n, где $(a^k_m)^n_n$ - матрица оператора A в базисе $(e_к)_n$.

14. Пусть A – линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве **E**. Доказать, что оператор A является ортогональным оператором тогда и только тогда, когда $\|Ax\|=\|x\|$.

15. Пусть A,B – линейные симметричные операторы, действующие в евклидовом пространстве **E**. Доказать, что оператор AB является симметричным тогда и только тогда, когда AB=BA.

16. Пусть A – линейный оператор, действующий в линейном пространстве R. Доказать, что сумма двух различных собственных подпространств оператора A является инвариантным подпространством оператора A. Является ли эта сумма собственным подпространством оператора A? Ответ обоснуйте.

17. Пусть A – линейный оператор, действующий в линейном унитарном пространстве U. Доказать, что i(A-A*) – эрмитов оператор.

18. Найти общий вид ортогональной матрицы 2x2.

19. В линейном пространстве R_3 в базисе $(e_к)_3$ задана матрица $G=(g_{ij})=$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ дважды ковариантного тензора $[G]^0_2$. Доказать, что

этот тензор можно трактовать как метрический тензор пространства R.

20. Пусть G – множество, состоящее из чисел 1,i,-1,-i. Доказать, что G абелева группа по умножению четвёртого порядка.

1. В ортонормированном базисе e_1,e_2 евклидова пространства элемент f_1 имеет координаты 1 и 0, а элемент f_2 – координаты $0,5\sqrt{3}$ и 0,5. Найти координаты метрического тензора $[G]^0_2$ в базисе $(f_k)_2$.
2. В ОНБ $(e_к)_2$ евклидова пространства элемент f_1 имеет координаты 1 и 0, а элемент f_2 – координаты $0,5\sqrt{3}$ и 0,5. Найти координаты контравариантного тензора $[G]^2_0$ в базисе $(f_k)_2$.
3. Пусть G – множество всех комплексных чисел, по модулю равных 1,а групповая операция есть умножение комплексных чисел. Доказать, что множество G с указанной операцией образует абелеву группу.
4. Доказать: если для любого элемента x группы G выполнено условие $x\circ x=e$, то G – абелева группа.