Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

1. Каждый студент выполняет один вариант задания. Номер варианта равен номеру студента в списке группы.

2. Работа должна быть сдана преподавателю, ведущему семинары, в период с 10 по 14 мая 2016 г.

3. Работа выполняется на листах формата А4. Первый лист — титульный, содержит фамилию, имя, отчество студента, номер группы, номер варианта и список ответов ко всем решенным задачам.

4. Решение каждой задачи необходимо начинать на новом листе. В конце решения выписывается ответ.

5. Чтобы избежать потери листов, их нужно скрепить степлером (не скрепкой и не вложить в пластиковый файл) или сшить каким-либо иным способом (ниткой, клеем).

Линейная алгебра. Контрольное домашнее задание

Вариант 1

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -7e_2 - 2e_3$, $f_2 = -e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 - 18x^1x^3 + 18(x^2)^2 + 14(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $2x + 4y - 3z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/1 = y/2 = z/3$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-3}^{4} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Контрольное домашнее задание

Вариант 2

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 3e_1 - 8e_2 - 2e_3$, $f_2 = -3e_1 + e_2$, $f_3 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 - 6x^1x^3 + 48x^2x^3 - 20(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 4 & 14 & 14 \\ -3 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $2x + 4y - 5z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/1 = y/2 = z/-3$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-3}^{3} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 3

---

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 5e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + 3e_2 - e_3$, $f_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 4x^1x^3 - 7(x^2)^2 + 34x^2x^3 - 24(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 8 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -8 & 9 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -6 & -8 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 2y - z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/1 = y/2 = z/4$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-3}^{2} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 4

---

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 4e_1 - 4e_2 + e_3$, $f_2 = -e_1 + 4e_2 - 3e_3$, $f_3 = -e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 - 4x^1x^3 + 25(x^2)^2 - 26x^2x^3 + (x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -12 & -8 & 3 \\ 8 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 5y - 5z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/1 = y/2 = z/-4$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-3}^{1} f(t)g(t)dt.$

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 5

---

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -5e_1 + 9e_2 + 3e_3$, $f_2 = -8e_1 + 7e_2 + 3e_3$, $f_3 = -3e_1 + 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 4x^1x^3 + 6x^2x^3 - 19(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $2x + y - z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/1 = y/2 = z/5$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-3}^{0} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 6

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -2e_1 - e_2$, $f_2 = 2e_1 - 2e_2 - e_3$, $f_3 = e_1 + 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 8x^1x^3 + 5(x^2)^2 - 8x^2x^3 + 3(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ -7 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + y - 3z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/1 = y/2 = z/-5$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-3}^{-1} f(t)g(t)dt.$

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 7

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_3 = 2e_1 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 - 8x^1x^3 + 13(x^2)^2 + 8x^2x^3 - 4(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -6 \\ -6 & -10 & 6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + 4y - 3z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/2 = y/1 = z/1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-3}^{-2} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 9 & 8 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 8

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 4e_1 - e_2 - 3e_3$, $f_2 = 6e_1 - 2e_2 - 3e_3$, $f_3 = -3e_1 + e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 - 8x^1x^3 - 7(x^2)^2 + 36x^2x^3 - 9(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -7 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + y - 4z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/2 = y/1 = z/-1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-2}^{4} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 9

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -6e_1 + 3e_2 - e_3$, $f_2 = -7e_1 + e_2 + 2e_3$, $f_3 = -2e_1 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 - 2x^1x^3 + 8(x^2)^2 + 12x^2x^3 - 8(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 2 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ -12 & -3 & -24 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 4y - z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/2 = y/1 = z/2$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-2}^{3} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 10

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 5e_1 + e_2 + 2e_3$, $f_2 = -11e_1 + e_2 - 3e_3$, $f_3 = 3e_1 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 - 4x^1x^3 + 10(x^2)^2 + 10x^2x^3 + 4(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -3 & 15 & 5 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + 3y - z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/2 = y/1 = z/-2$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-2}^{2} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 11

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 7e_2 + 2e_3$, $f_2 = -e_1 + 7e_2 + 2e_3$, $f_3 = 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 + 6x^1x^3 + 8(x^2)^2 + 2x^2x^3 - 16(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 9 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -8 \\ -12 & -3 & 12 \\ 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + 4y - 5z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/2 = y/1 = z/3$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-2}^{1} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 11 & 8 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание
Вариант 12

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 + 4e_2 + 2e_3$, $f_2 = 9e_1 - e_2 - 2e_3$, $f_3 = -3e_1 + e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 - 4x^1x^3 + 8(x^2)^2 + 20x^2x^3 - 12(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -8 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 14 & 24 & 24 \\ -8 & -14 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 3y - 4z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/2 = y/1 = z/-3$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-2}^{0} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 13

---

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 8e_1 - e_2 - e_3$, $f_2 = -5e_1 - 5e_2 + 3e_3$, $f_3 = -e_1 - 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 - 4x^1x^3 + 18(x^2)^2 - 24x^2x^3 + 22(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 15 & 36 & -36 \\ -6 & -15 & 12 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + 3y - 2z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/1 = z/1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-2}^{-1} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 6 & 13 & 12 \\ 6 & 12 & 13 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 14

---

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -5e_1 + e_3$, $f_2 = 2e_2 + e_3$, $f_3 = -3e_1 + e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 4x^1x^3 + 8(x^2)^2 - 4x^2x^3 - 16(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 11 & 28 & 0 \\ -6 & -15 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + 3y + z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/1 = z/-1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-1}^{4} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 6 & 11 & 12 \\ 6 & 12 & 11 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 15

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -8e_1 + 5e_2 + 2e_3$, $f_2 = 4e_2 + e_3$, $f_3 = -3e_1 + 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 - 8x^1x^3 - 7(x^2)^2 + 44x^2x^3 - 12(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -8 & 10 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -17 & 15 & -15 \\ -10 & 8 & -10 \\ 10 & -10 & 8 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 3y - 3z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/-1 = z/1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-1}^{3} f(t)g(t)dt.$

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 6 & 14 & 12 \\ 6 & 12 & 14 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание
Вариант 16

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -2e_1 + 3e_2 - e_3$, $f_2 = 4e_1 - 5e_2 + 2e_3$, $f_3 = 3e_1 - 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 - 12x^1x^3 + 10(x^2)^2 + 10x^2x^3 + 16(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + 3y - z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/2 = z/1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-1}^{2} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 12 \\ 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 17

---

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f_2 = 5e_1 + 3e_2 - e_3$, $f_3 = -2e_1 - 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 8x^1x^3 - 7(x^2)^2 + 4x^2x^3 - (x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + y - 2z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/2 = z/-1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 15 & 12 \\ 6 & 12 & 15 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 18

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -4e_1 - e_3$, $f_2 = -5e_1 - e_3$, $f_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 + 6x^1x^3 - 7(x^2)^2 + 18x^2x^3 - 8(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $4x + 2y - 5z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/-2 = z/1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-1}^{0} f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \\ 6 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 19

---

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f_2 = -2e_1 - 5e_2 + 3e_3$, $f_3 = -e_1 - 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 + 6x^1x^3 + 13(x^2)^2 - 26x^2x^3 + 25(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & -3 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + 2y - z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/-2 = z/-1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_0^4 f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 8 & 17 & 16 \\ 8 & 16 & 17 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 20

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 4e_1 + 7e_2 - 3e_3$, $f_2 = -8e_2 + 3e_3$, $f_3 = e_1 - 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 + 12x^1x^3 - 6x^2x^3 - (x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -9 & -7 & 3 \\ 10 & 7 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -15 \\ -15 & 3 & -15 \\ 10 & 0 & 13 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + 4y - 5z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/3 = z/1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_0^3 f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 8 \\ 8 & 15 & 16 \\ 8 & 16 & 15 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 21

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 - 2e_2$, $f_2 = -e_1 + e_3$, $f_3 = -e_1 - e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 + 12x^1x^3 + 6x^2x^3 - 5(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -8 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -5 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & -5 \\ -2 & 9 & -10 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -11 & 15 & 15 \\ -20 & 24 & 20 \\ 10 & -10 & -6 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + 2y - 4z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/3 = z/-1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_0^2 f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 8 & 18 & 16 \\ 8 & 16 & 18 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 22

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 - 3e_3$, $f_2 = 2e_1 + 2e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 8x^1x^3 + 25(x^2)^2 - 28x^2x^3 + 4(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -6 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -6 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 4y + z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/3 = z/2$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 8 & 14 & 16 \\ 8 & 16 & 14 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 23

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 7e_1 - e_3$, $f_2 = 9e_1 - e_2 - 2e_3$, $f_3 = -3e_1 + e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 + 6x^1x^3 + 5(x^2)^2 - 10x^2x^3 + 4(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 18 \\ -4 & 8 & 8 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 2y - 5z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/3 = z/-2$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_1^4 f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 \\ 8 & 19 & 16 \\ 8 & 16 & 19 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Контрольное домашнее задание

Вариант 24

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 9e_1 + 5e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + 5e_2 + 2e_3$, $f_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 + 18x^1x^3 + 8(x^2)^2 - 16x^2x^3 + 8(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -15 & -16 & -32 \\ -4 & -3 & -8 \\ 8 & 8 & 17 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $2x + 2y - 3z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/-3 = z/1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_1^3 f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 8 & 13 & 16 \\ 8 & 16 & 13 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание
Вариант 25

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 - 6e_2 + 2e_3$, $f_2 = -8e_1 - 5e_2 + 3e_3$, $f_3 = -2e_1 - 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 - 24x^1x^3 + 18(x^2)^2 + 28(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 10 & -8 \\ -3 & -8 & 11 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -8 & 12 & 24 \\ -16 & 20 & 32 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + 2y - z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/-3 = z/-1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_1^2 f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 20 & 16 \\ 8 & 16 & 20 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Контрольное домашнее задание

Вариант 26

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 + 2e_2$, $f_2 = -2e_1 - e_2 + e_3$, $f_3 = -2e_1 - 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 + 2x^1x^3 - 7(x^2)^2 + 18x^2x^3 - 12(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -9 & 32 & -8 \\ -4 & 15 & -4 \\ -4 & 16 & -5 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 2y - 3z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/-3 = z/2$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_2^4 f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 16 \\ 8 & 16 & 12 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 27

---

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -e_1 - 2e_2 + e_3$, $f_2 = -7e_1 - e_2 + 2e_3$, $f_3 = -3e_1 - e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 4x^1x^3 - 7(x^2)^2 + 26x^2x^3 - 15(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & -8 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -28 & 50 & -50 \\ -15 & 27 & -30 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 2y + 7z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/4 = z/1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_2^3 f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 28

---

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 8e_1 + 8e_2 - 3e_3$, $f_2 = -5e_1 - 5e_2 + 2e_3$, $f_3 = -2e_1 - 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 8x^1x^3 + 10(x^2)^2 - 22x^2x^3 + 13(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -9 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -15 & 12 & 0 \\ -18 & 15 & 0 \\ 12 & -12 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + y - 2z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/4 = z/-1$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_3^4 f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 29

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = 5e_2 - 2e_3$, $f_3 = -2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 - 12x^1x^3 + 5(x^2)^2 + 22x^2x^3 + 7(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -15 & 12 & 30 \\ 5 & -5 & -13 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 4y - 5z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/4 = z/2$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:
$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_2^5 f(t)g(t)dt$.

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ -4 & -7 & -8 \\ -4 & -8 & -7 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра.
Контрольное домашнее задание

Вариант 30

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 16e_1 + 3e_2 + 3e_3$, $f_2 = 7e_1 + 7e_2 + 3e_3$, $f_3 = 3e_1 + 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 - 10x^1x^3 + 48x^2x^3 + 16(x^3)^2$

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -24 \\ -15 & 20 & -30 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + 5y - 3z = 0$.

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/4 = z/-2$.

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_3^5 f(t)g(t)dt.$

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ -4 & -6 & -8 \\ -4 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

1. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f:

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

3. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора.

4. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису.

5. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$.

6. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции

7. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии

8. Применить процесс ортогонализации к заданной системе столбцов:

9. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой

10. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе: