0.5 setgray0 0.5 setgray1

Лекция 2

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СВОЙСТВА

§ 0. План лекции

1. Свойство определителей.

1.1. Определение транспонированной матрицы.

1.2. Свойство 1: $|A^t| = |A|$.

1.3. Свойство 2: $|A, B, C| = -|A, C, B|$.

1.4. Свойство 3: тоже для перестановки строк.

1.5. Свойство 4: $|A, A, C| = 0$ **и тоже для строк.**

1.6. Свойство 5: Фальшивое разложение определителя.

1.7. Свойство 6: $|O, B, C| = 0$.

1.8. Свойство 7: $|\lambda A, B, C| = \lambda|A, B, C|$.

1.9. Свойство 8: $|\lambda B, B, C| = 0$.

1.10. Свойство 9: $|A' + A'', B, C| = |A', B, C| + |A'', B, C|$.

1.11. Свойство 10: $|\lambda B + A, B, C| = |A, B, C|$.

2. Теорема о равенстве нулю определителя.

2.1. Столбцы и арифметические операции над ними.

2.2. Наблюдение 1: свойство 2: $|A_1, B_1, C_1| = -|B_1, A_1, C_1|$.

2.3. Наблюдение 2: свойство 4: $|A_1, D, D| = 0$.

2.4. Наблюдение 3: свойство 6: $|O, B_1, C_1| = 0$.

2.5. Наблюдение 4: свойство 7: $|\lambda A_1, B_1, C_1| = \lambda|A_1, B_1, C_1|$.

2.6. Наблюдение 5: свойство 9: $|A_1' + A_1'', B_1, C_1| = |A_1', B_1, C_1| + |A_1'', B_1, C_1|$.

2.7. Лемма о линейной комбинации.

2.8. Вывод формул Крамера.

2.9. Доказательство достаточности теоремы о равенстве нулю определителя.

§ 1. Свойства определителей

Сначала дадим определение матрицы, транспонированной к данной.

Определение 3. *Транспонированной матрицей к матрице*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

называется матрица

$$A^t = \begin{pmatrix} a^t_{11} & a^t_{12} & a^t_{13} \\ a^t_{21} & a^t_{22} & a^t_{23} \\ a^t_{31} & a^t_{32} & a^t_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Замечание 1. Элементы a^t_{jk} матрицы A^t связаны с элементами матрицы A следующим равенством: $a^t_{jk} = a_{kj}$.

Приступим к рассмотрению свойств определителя третьего порядка.

Свойство 1. *Справедливо равенство* $|A^t| = |A|$.

Доказательство. Прежде всего введём следующие обозначения: A^t_{jk} — это алгебраическое дополнение элемента a^t_{jk} матрицы A^t, M^t_{jk} — это дополнительный минор элемента a^t_{jk} транспонированной матрицы A^t. Разложим определитель $|A^t|$ транспонированной матрицы A^t по первой строчке

$$|A^t| = a^t_{11}A^t_{11} + a^t_{12}A^t_{12} + a^t_{13}A^t_{13} = a^t_{11}M^t_{11} - a^t_{12}M^t_{12} + a^t_{13}M^t_{13}. \tag{1.3}$$

Вычислим дополнительные миноры M^t_{11}, M^t_{12} и M^t_{13}. Действительно, справедливы следующие выражения:

$$\begin{pmatrix} a^t_{11} & a^t_{12} & a^t_{13} \\ a^t_{21} & a^t_{22} & a^t_{23} \\ a^t_{31} & a^t_{32} & a^t_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M^t_{11} = \begin{vmatrix} a^t_{22} & a^t_{23} \\ a^t_{32} & a^t_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{11},$$

$$\begin{pmatrix} a^t_{11} & a^t_{12} & a^t_{13} \\ a^t_{21} & a^t_{22} & a^t_{23} \\ a^t_{31} & a^t_{32} & a^t_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M^t_{12} = \begin{vmatrix} a^t_{21} & a^t_{23} \\ a^t_{31} & a^t_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{21},$$

$$\begin{pmatrix} a^t_{11} & a^t_{12} & a^t_{13} \\ a^t_{21} & a^t_{22} & a^t_{23} \\ a^t_{31} & a^t_{32} & a^t_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M^t_{13} = \begin{vmatrix} a^t_{21} & a^t_{22} \\ a^t_{31} & a^t_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = M_{31}.$$

С учетом этих равенств из равенства (1.3) получаем следующее равенство:

$$|A^t| = a^t_{11}M^t_{11} - a^t_{12}M^t_{12} + a^t_{13}M^t_{13} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}. \tag{1.4}$$

Последнее выражение — это разложение определителя матрицы A по первому столбцу. Итак, $|A^t| = |A|$.

Свойство 2. *При перестановке двух произвольных столбцов матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

соответствующий определитель меняет знак.

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим частный случай, когда меняются местами второй и третий столбцы. Получившееся матрица имеет следующий вид:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}. \qquad (1.6)$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{11}M_{11} + a_{21}M_{21} - a_{31}M_{31} = -|A|.$$

Свойство доказано.

Свойство 3. *При перестановке двух произвольных строчек матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

соответствующий определитель меняет знак.

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим случай, когда переставляются местами вторая и третья строчки:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

В силу свойства 1 справедлива следующая цепочка равенств:

$$|D| = |D^t|, \quad D^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{21} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} \\ a_{13} & a_{33} & a_{23} \end{pmatrix}. \qquad (1.9)$$

В силу свойства 2 имеет место следующее равенство:

$$|D^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{21} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} \\ a_{13} & a_{33} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = -|A^t| = -|A|. \qquad (1.10)$$

Итак, из равенств (1.9) и (1.10) вытекает итоговое равенство:

$$|D| = -|A|.$$

Свойство доказано.

Свойство 4. *Если у матрицы имеются два одинаковых столбца или две одинаковые строчки, то соответствующий определитель равен нулю.*

Доказательство. Пусть у квадратной матрицы A имеются два одинаковых столбца. Переставим эти столбцы местами, тогда с одной стороны в силу свойства 2 определитель получившейся матрицы равен $-|A|$, а с другой стороны, матрица останется той же и поэтому определитель получившейся матрицы равен $|A|$. Итак,

$$-|A| = |A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0.$$

Аналогичным образом с помощью свойства 3 рассматривается случай двух одинаковых строчек.

Свойство 5. *Справедливы следующие две формы фальшивого разложения определителя матрицы A по k–ому столбцу*

$$a_{1k}A_{1p} + a_{2k}A_{2p} + a_{3k}A_{3p} = 0 \quad \text{при} \quad p \neq k, \tag{1.11}$$

и по j–ой строчке

$$a_{j1}A_{l1} + a_{j2}A_{l2} + a_{j3}A_{l3} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq l. \tag{1.12}$$

Доказательство. Без ограничения общности докажем формулу (1.12) в случае, когда $j = 1$ и $l = 2$. Пусть матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Вместо первой строчки матрицы A рассмотрим строчку состоящую из переменных x, y, z :

$$B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Справедлива формула разложения $|B|$ по первой строчке:

$$|B| = xA_{11} + yA_{12} + zA_{13},$$

где алгебраические дополнения A_{11}, A_{12} и A_{13} не зависят от переменных x, y, z. Если мы положим

$$x = a_{21}, \quad y = a_{22}, \quad z = a_{23},$$

то у матрицы B две первые одинаковые строчки и поэтому $|B| = 0$, и поэтому

$$0 = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}.$$

Свойство доказано.

Свойство 6. *Если элементы некоторой строчки или столбца матрицы состоят из нулей, то определитель такой матрицы равен нулю.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что первый столбец состоит из нулей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель этой матрицы при помощи его разложения по первому столбцу:

$$|A| = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} = 0.$$

Свойство доказано.

Свойство 7. *Определитель матрицы, у которой все элементы столбца или строчки умножаются на некоторое число λ, равен произведению этого числа на определитель матрицы A.*

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$|B| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} A_{11} + \lambda a_{21} A_{21} + \lambda a_{31} A_{31} =$$

$$= \lambda \left(a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} \right) = \lambda |A|.$$

Свойство доказано.

Свойство 8. *Если две строчки или два столбца матрицы пропорциональны, то определитель такой матрицы равен нулю.*

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что матрица имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

тогда в силу свойств 8 и 4 имеют место следующие равенства:

$$|A| = \lambda \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Свойство доказано.

Свойство 9. *Справедливо следующее равенство*:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.13}$$

и справедливы аналогичные равенства для любой строки или столбца.

Доказательство. Разложим исходный определитель по элементам первого столбца и получим следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a'_{11}+a''_{11})A_{11}+(a'_{21}+a''_{21})A_{21}+(a'_{31}+a''_{31})A_{31} = \\ = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство доказано.

Свойство 10. Если к произвольному столбцу определителя прибавить любой другой столбец определителя, умноженный на произвольное число, то определитель не изменится.

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим частный случай. В силу свойств 9 и 8 справедливы следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство доказано.

§ 2. Теорема о равенстве нулю определителя

Для того, чтобы сформулировать очень важный для нас результат введём арифметические операции над столбцами и над строчками.

Определение 4. *Столбцом длины $n \in \mathbb{N}$ называется упорядоченный набор n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, записанных в виде столбца*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Определение 5. *Строчкой длины $n \in \mathbb{N}$ называется упорядоченный набор n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, записанных в виде строчки*

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Определим две операции — сложение столбцов (строчек) и умножение столбца (строчки) на вещественные числа при условии, что над элементами столбца (строчки) допустимы операции сложения и умножения на вещественными числами. Это условие выполнено, например, тогда, когда элементы столбца (строчки) — это вещественные числа. Дадим соответствующие определения только для столбцов, поскольку соответствующие операции над строчками имеют аналогичный вид.

Определение 6. *Суммой двух столбцов одной и той же длины $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

называется столбец длины n, имеющий следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

Определение 7. *Произведением столбца длины $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

на вещественное число λ называется столбец той же длины имеющий следующий вид:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}.$$

Определение 8. *Два столбца*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \textit{и} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

одной и той же длины $n \in \mathbb{N}$ называются равными, если соответствующие элементы равны:

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

Используется при этом обозначение

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Для дальнейшего нам нужно ввести более удобное обозначение для определителя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Введём следующие обозначения для столбцов длины 3 этой матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Запишем определитель матрицы A как вещественную функцию от столбцов A_1, B_1 и C_1 :

$$|A| = |A_1, B_1, C_1|. \tag{2.3}$$

Н а б л ю д е н и е 1. Свойство 2 гласит, что при перестановке любых двух столбцов матрицы A её определитель меняет знак. Например,

$$|B_1, A_1, C_1| = -|A_1, B_1, C_1|. \tag{2.4}$$

Н а б л ю д е н и е 2. Свойство 4 гласит, что если у матрицы A имеются два одинаковых столбца, то её определитель равен нулю. Например, пусть $B_1 = C_1 = D$, тогда

$$|A_1, D, D| = 0. \tag{2.5}$$

Н а б л ю д е н и е 3. Свойство 6 гласит, в частности, что если какой–то столбец матрицы A является нулевым, то её определитель равен нулю. Например, пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$|O, B_1, C_1| = 0. \tag{2.6}$$

Н а б л ю д е н и е 4. Свойства 7 означает, например, что если

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda A_1^{'}, \quad A_1^{'} = \begin{pmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{pmatrix},$$

то

$$|A_1, B_1, C_1| = |\lambda A_1^{'}, B_1, C_1| = \lambda |A_1^{'}, B_1, C_1|. \tag{2.7}$$

Н а б л ю д е н и е 5. Свойство 9 означает, в частности, что если

$$A_1 = A_1^{'} + A_1^{''}, \quad A_1^{'} = \begin{pmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{pmatrix}, \quad A_1^{''} = \begin{pmatrix} a_1^{''} \\ a_2^{''} \\ a_3^{''} \end{pmatrix},$$

то

$$|A_1^{'} + A_2^{''}, B_1, C_1| = |A_1^{'}, B_1, C_1| + |A_1^{''}, B_1, C_1|. \tag{2.8}$$

Из наблюдений 4 и 5 вытекает следующая лемма:

Л е м м а 1. *Определитель* $|A| = |A_1, B_1, C_1|$ *матрицы* A *как вещественная функция от столбцов* A_1, B_1, C_1 *удовлетворяет следующим свойствам*:

$$|\alpha A_1^{'} + \beta A_2^{''}, B_1, C_1| = \alpha |A_1^{'}, B_1, C_1| + \beta |A_2^{''}, B_1, C_1| \tag{2.9}$$

для любых столбцов $A_1^{'}$ *и* $A_2^{''}$ *и для любых чисел* α *и* β. *Аналогичные свойства линейности справедливы по двум другим столбцам.*

З а м е ч а н и е 2. Свойства, указанные в формулировке леммы 1 называются свойствами полилинейности определителя как функции от столбцов матрицы, а свойство 2 называется свойством кососимметричности определителя.

Справедлива следующая важная лемма, которая носит название формулы Крамера вычисления решения системы трёх уравнений относительно трёх переменных:

Т е о р е м а 1. *Если определитель*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.10}$$

то система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3, \end{cases} \tag{2.11}$$

имеет единственное решение этой системы уравнений даётся следующими формулами:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \qquad (2.12)$$

Доказательство.

Сейчас ограничимся доказательством единственности. Именно,докажем, что если решение существует, то оно даётся указанными формулами. Запишем систему уравнений (2.11) в следующем эквивалентном виде:

$$xA_1 + yB_1 + zC_1 = D_1, \qquad (2.13)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

В силу результата леммы 2 справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} &|D_1, B_1, C_1| = |xA_1 + yB_1 + zC_1, B_1, C_1| = \\ &= x\,|A_1, B_1, C_1| + y\,|B_1, B_1, C_1| + z\,|C_1, B_1, C_1| = x\,|A_1, B_1, C_1|, \end{aligned} \qquad (2.14)$$

$$\begin{aligned} &|A_1, D_1, C_1| = |A_1, xA_1 + yB_1 + zC_1, C_1| = \\ &= x|A_1, A_1, C_1| + y|A_1, B_1, C_1| + z|A_1, C_1, C_1| = y|A_1, B_1, C_1|, \end{aligned} \qquad (2.15)$$

$$\begin{aligned} &|A_1, B_1, D_1| = |A_1, B_1, xA_1 + yB_1 + zC_1| = \\ &= x|A_1, B_1, A_1| + y|A_1, B_1, B_1| + z|A_1, B_1, C_1| = z|A_1, B_1, C_1|. \end{aligned} \qquad (2.16)$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем сформулировать следующую важную теорему:

Теорема 2. *Для того чтобы определитель квадратной матрицы* 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad (2.17)$$

был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие вещественные числа α, β, γ, *не равные одновременно нулю, что*

$$\alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 = O, \qquad (2.18)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. В силу введённых определений 6–8 выражение (2.18) эквивалентно следующим равенствам:

$$\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 0, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = 0, \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = 0. \end{cases}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполнено равенство (2.18). Без ограничения общности предположим, что $\alpha \neq 0$, тогда справедливо следующее равенство:

$$A_1 = -\frac{\beta}{\alpha} B_1 - \frac{\gamma}{\alpha} C_1.$$

Подставим это выражение для определителя, записанного как функция от столбцов матрицы:

$$|A| = |A_1, B_1, C_1| = \left| -\frac{\beta}{\alpha} B_1 - \frac{\gamma}{\alpha} C_1, B_1, C_1 \right| =$$
$$= -\frac{\beta}{\alpha} |B_1, B_1, C_1| - \frac{\gamma}{\alpha} |C_1, B_1, C_1| = 0,$$

где мы воспользовались результатом леммы 1 и свойством 4.

Необходимость. Пусть $\det A = 0$. Рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть $a_1 = b_1 = c_1 = 0$. Докажем. что в этом случае найдутся такие числа α, β, γ, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.19)$$

Рассмотрим следующее уравнение с неизвестными x, y, z :

$$x \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.20)$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0. \end{cases} \qquad (2.21)$$

Докажем, что эта система уравнений имеет нетривиальное решение $x = \alpha$, $y = \beta$ и $z = \gamma$, $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0$.

□ Предположим сначала, что

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}^2 > 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда перепишем систему уравнений (2.21) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{cases} a_2x + b_2y = -c_2z, \\ a_3x + b_3y = -c_3z. \end{cases} \tag{2.22}$$

Пусть $z = \gamma$, где $\gamma \neq 0$ произвольной число, тогда согласно результатам первой лекции имеем

$$x = \alpha := \frac{\begin{vmatrix} -c_2\gamma & b_2 \\ -c_3\gamma & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \beta := \frac{\begin{vmatrix} a_2 & -c_2\gamma \\ a_3 & -c_3\gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}.$$

Поскольку $\gamma \neq 0$, то в этом случае существует нетривиальное решение системы уравнений (2.21).

Пусть теперь

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда согласно определению определителя второго порядка имеют место следующие равенства:

$$a_2b_3 = a_3b_2, \quad b_2c_3 = b_3c_2, \quad c_2a_3 = c_3a_2.$$

Поэтому либо

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{c_2}{c_3} := \lambda$$

либо

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{c_3}{c_2} := \mu.$$

В любом случае одно из уравнений системы двух уравнений (2.21) является следствием другого. Пусть, например, второе уравнение следствие первого. Тогда (2.21) эквивалентна первому уравнению

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что это уравнение имеет нетривиальное решение. ⊠

Второй случай. Пусть $|a_1| + |b_1| + |c_1| > 0$. Без ограничения общности пусть $a_1 \neq 0$. В противном случае мы можем переставить местами столбцы. В силу свойства 10 справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |A_1, B_1, C_1| = \\ = \left| A_1, B_1 - \frac{b_1}{a_1} A_1, C_1 - \frac{c_1}{a_1} A_1 \right|. \quad (2.23)$$

Проведём вычисления.

$$B_1 - \frac{b_1}{a_1} A_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \frac{b_1}{a_1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \frac{b_1}{a_1} a_2 \\ \frac{b_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2 \\ b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

$$C_1 - \frac{c_1}{a_1} A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Продолжим цепочку равенств (2.23).

$$0 = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2 & c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ a_3 & b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3 & c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{vmatrix} = \\ = a_1 \begin{vmatrix} b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2 & c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3 & c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{vmatrix} = a_1 |D_1, D_2| \Rightarrow |D_1, D_2| = 0, \quad (2.26)$$

где

$$D_1 = \begin{pmatrix} b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2 \\ b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix}.$$

В силу результата леммы 1 первой лекции найдутся такие числа β и γ, не равные одновременно нулю, что

$$\beta D_1 + \gamma D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \left(b_2 - \dfrac{b_1}{a_1} a_2 \right) + \gamma \left(c_2 - \dfrac{c_1}{a_1} a_2 \right) = 0, \\ \beta \left(b_3 - \dfrac{b_1}{a_1} a_3 \right) + \gamma \left(c_3 - \dfrac{c_1}{a_1} a_3 \right) = 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Но тогда будет выполнено следующее равенство тоже

$$\beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - \dfrac{b_1}{a_1} a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 - \dfrac{c_1}{a_1} a_2 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Заметим, что

$$\beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - \dfrac{b_1}{a_1} a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix} = \beta \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \frac{b_1}{a_1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right] = \beta \left[B_1 - \frac{b_1}{a_1} A_1 \right], \tag{2.29}$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 - \dfrac{c_1}{a_1} a_2 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix} = \gamma \left[C_1 - \frac{c_1}{a_1} A_1 \right]. \tag{2.30}$$

Таким образом, в силу равенств (2.28)–(2.30) вытекает следующее равенство:

$$\beta \left[B_1 - \frac{b_1}{a_1} A_1 \right] + \gamma \left[C_1 - \frac{c_1}{a_1} A_1 \right] = O, \tag{2.31}$$

из которого вытекает равенство

$$\alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 = O, \quad \alpha = -\frac{b_1}{a_1} \beta - \frac{c_1}{a_1} \gamma, \tag{2.32}$$

причём $|\beta| + |\gamma| > 0$ и тем более $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0$.

Теорема доказана.