0.5 setgray0 0.5 setgray1

Лекция 14

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Определители порядка $n > 1$

Пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\|,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}.$$

Определение 1. *Определителем, или детерминантом квадратной числовой матрицы A называется числовая функция столбцов этой матрицы*

$$\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n} \to \mathbb{K},$$

обозначаемая

$$\det A = |A| = \det\|A_1, A_2, \ldots, A_n\| = |A_1, A_2, \ldots, A_n|$$

и обладающая следующими свойствами:

(1) *полилинейность*, *т. е.*

$$|\alpha^{'} A_1^{'} + \alpha^{''} A_1^{''}, A_2, \ldots, A_n| = \alpha^{'} |A_1^{'}, A_2, \ldots, A_n| + \alpha^{''} |A_1^{''}, A_2, \ldots, A_n|;$$

(2) *кососимметричность*, *т. е. при перестановке двух <u>соседних</u> столбцов определитель меняет знак на противоположный*

$$|A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n| = -|A_1, \ldots, A_{k+1}, A_k, \ldots, A_n|;$$

(3) *нормировка*: *определитель единичной матрицы $\mathbb{I}_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ равен единице*

$$\det \mathbb{I}_n = 1.$$

Замечание. Можно доказать, что при перестановке двух произвольных столбцов определитель меняет свой знак на противоположный.

Формулы Крамера для квадратных систем уравнений.

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \dots + a_n^1x^n = b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \dots + a_n^2x^n = b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^nx^1 + a_2^nx^2 + \dots + a_n^nx^n = b^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

или в матричной форме

$$x^1A_1 + x^2A_2 + \dots + x^nA^n = B, \tag{1.2}$$

где $B = (b^1, b^2, \dots, b^n)^T$. Пусть

$$\triangle \overset{\text{def}}{=} |A_1, A_2, \dots, A_n| \neq 0, \quad \triangle_1 \overset{\text{def}}{=} |B, A_2, \dots, A_n|.$$

$$\begin{aligned} \triangle_1 = |B, A_2, \dots, A_n| = |x^1A_1 + x^2A_2 + \dots + x^nA_n, A_2, \dots, A_n| = \\ = x^1 \underbrace{|A_1, A_2, \dots, A_n|}_{=\triangle} + x^2 \underbrace{|A_2, A_2, \dots, A_n|}_{=0} + \dots + \\ + x^n \underbrace{|A_n, A_2, \dots A_n|}_{=0} = x^1\triangle \Rightarrow x^1 = \frac{\triangle_1}{\triangle}. \end{aligned}$$

$$\triangle_k \overset{\text{def}}{=} |A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n|.$$

$$x^k = \frac{\triangle_k}{\triangle}. \tag{1.3}$$

Теорема 1. *Если* $\triangle \neq 0$, *то при условии существовании решения системы* (1.1) *оно дается формулой* (1.3) *при* $k = \overline{1, n}$.

§ 2. Перестановки

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$.

Определение 2. *Перестановкой множества* N *называется взаимно однозначное отображение* (*инъективное и сюрьективное*)

$$\sigma : N \to N.$$

Множество всех перестановок множества N *обозначается как* S_n.

Замечание 1. Перестановку σ удобно записывать в виде следующей таблицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \sigma(i) \neq \sigma(j) \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а 2. *Количество всех перестановок n–элементного множества N равно $n!$.*

Н а б л ю д е н и е 1. Определена ассоциативная операция произведения перестановок:

$$(\tau\sigma)(i) = \tau(\sigma(i)) \quad \forall\, i \in N.$$

Н а б л ю д е н и е 2. Определена тождественная перестановка.

Н а б л ю д е н и е 3. Для каждой перестановки определена обратная перестановка.

Л е м м а 1. *S_N — группа.*

О п р е д е л е н и е 3. *Будем говорить, что два различных элемента $i, j \in N = \{1, 2..., n\}$ образуют инверсию в перестановке $\sigma \in S_n$, если числа*

$$i - j \quad \text{и} \quad \sigma(i) - \sigma(j)$$

имеют разные знаки.

Например, рассмотрим такую перестановку

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Справедливы следующие выражения:

$$1 - 3 < 0 \quad \text{и} \quad \sigma(1) - \sigma(3) = 2 - 1 > 0.$$

Следовательно, числа 1 и 3 образуют инверсию в указанной перестановке σ.

З а м е ч а н и е 2. Если перестановка σ задана упорядоченной по верхнему ряду таблицей

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix},$$

то инверсия в перестановке σ обнаруживается в виде наличия в нижнем ряде чисел $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$ таких, что большее число находится левее меньшего. Например, в перестановке

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

имеется 6 инверсий. А именно, следующие пары чисел нижнего ряда предыдущей таблицы:

$$(3,1), \quad (3,2), \quad (5,2), \quad (5,1), \quad (5,4), \quad (2,1).$$

О п р е д е л е н и е 4. *Перестановка $\sigma \in S_n$ называется чётной (нечётной), если она содержит чётное (нечётное) число инверсий. Знаком перестановки σ называется число*

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sigma - \text{чётная перестановка}, \\ -1, & \text{если} \quad \sigma - \text{нечётная перестановка}. \end{cases}$$

Лемма 2. *Справедливо следующее равенство*:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{\{i,j\}\subset N,\, i\neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)}\right). \tag{2.1}$$

Справедлива важная теорема:

Теорема 3. *Знак произведения двух перестановок $\sigma \in S_n$ и $\tau \in S_n$ равен произведению знаков этих перестановок*:

$$\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma)\cdot\operatorname{sign}(\tau). \tag{2.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть даны две перестановки

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Для каждой фиксированной перестановки, например, для σ, помимо записи в виде <u>упорядоченной по верхнему ряду</u> двухрядной таблицы (2.3), существуют способы записи <u>не упорядоченные по верхнему ряду</u>. Например, такой вариант

$$\sigma = \begin{bmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \cdots & \sigma(\tau(n)) \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

поскольку $\tau \in S_n$ — взаимно однозначное отображение. С учётом (2.4) мы приходим к следующей формуле для знака $\operatorname{sign}(\sigma)$:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{\{i,j\}\subset N,\, i\neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{\tau(i)-\tau(j)}{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}\right). \tag{2.5}$$

Шаг 2. Следовательно, имеем

$$\operatorname{sign}(\sigma)\cdot\operatorname{sign}(\tau) =$$

$$= \prod_{\{i,j\}\subset N,\, i\neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{\tau(i)-\tau(j)}{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}\right)\cdot \prod_{\{i,j\}\subset N,\, i\neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{i-j}{\tau(i)-\tau(j)}\right) =$$

$$= \prod_{\{i,j\}\subset N,\, i\neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{\tau(i)-\tau(j)}{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}\right)\cdot \operatorname{sign}\left(\frac{i-j}{\tau(i)-\tau(j)}\right) =$$

воспользуемся очевидным равенством $\operatorname{sign}(xy) = \operatorname{sign}(x)\cdot\operatorname{sign}(y)$ для произвольных чисел $x, y \in \mathbb{R}$

$$= \prod_{\{i,j\}\subset N,\, i\neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{\tau(i)-\tau(j)}{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}\frac{i-j}{\tau(i)-\tau(j)}\right) =$$

$$= \prod_{\{i,j\}\subset N,\, i\neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{i-j}{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}\right) = \operatorname{sign}(\sigma\tau).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Взаимно обратные перестановки имеют один и тот же знак.*

Доказательство.

$$\sigma \cdot \sigma^{-1} = \varepsilon \Rightarrow 1 = \mathrm{sign}(\varepsilon) = \mathrm{sign}\left(\sigma \cdot \sigma^{-1}\right) = \mathrm{sign}\,(\sigma) \cdot \mathrm{sign}\left(\sigma^{-1}\right).$$

Следствие доказано.

§ 3. Существование и единственность определителя

Общий вид полилинейной и кососимметричной функции $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ столбцов квадратной матрицы $A = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\|$ размера $n \times n$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_1 = \sum_{\sigma_1=1}^{n} a_1^{\sigma_1} \mathbf{e}_{\sigma_1}, \quad \cdots, \quad A_n = \sum_{\sigma_n=1}^{n} a_n^{\sigma_n} \mathbf{e}_{\sigma_n}.$$

В силу полилинейности функции $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$F\left(A_1, A_2, \ldots, A_n\right) = F\left(\sum_{\sigma_1=1}^{n} a_1^{\sigma_1} \mathbf{e}_{\sigma_1}, \sum_{\sigma_2=1}^{n} a_2^{\sigma_2} \mathbf{e}_{\sigma_2}, \ldots, \sum_{\sigma_n=1}^{n} a_n^{\sigma_n} \mathbf{e}_{\sigma_n}\right) =$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^{n} \sum_{\sigma_2=1}^{n} \cdots \sum_{\sigma_n=1}^{n} a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \cdots a_n^{\sigma_n} F\left(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma_n}\right). \tag{3.1}$$

Поскольку

$$F\left(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma_j}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma_j}, \ldots \mathbf{e}_{\sigma_n}\right) = 0, \tag{3.2}$$

$$F\left(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma_n}\right) = \mathrm{sign}(\sigma) F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n), \tag{3.3}$$

то силу формул (3.1)–(3.3) приходим к равенству

$$F\left(A_1, A_2, \ldots, A_n\right) = c \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \cdots a_n^{\sigma_n}, \quad \sigma_k = \sigma(k), \tag{3.4}$$

где
$$c := F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = F(\mathbb{I}_n). \tag{3.5}$$

Теорема 4. *Справедлива следующая формула полного развертывания определителя*:

$$\det A = |A_1, A_2, \ldots, A_n| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \cdots a_n^{\sigma_n}, \quad \sigma_k = \sigma(k), \tag{3.6}$$

где
$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}.$$

Следствие. *Всякая кососимметрическая и полилинейная числовая функция $F(A)$ столбцов квадратной $n \times n$ матрицы A имеет следующий вид*:
$$F(A) = F(\mathbb{I}_n) \det A,$$
где $\mathbb{I}_n$ — это единичная квадратная $n \times n$ матрица.

§ 4. Свойства определителя.

Теорема 5. $\det A^T = \det A$.

Доказательство.

Пусть
$$A^T = \left(\widetilde{a}_k^j\right)_n^n, \quad A = \left(a_k^j\right)_n^n, \quad \widetilde{a}_k^j = a_j^k.$$
$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \widetilde{a}_1^{\sigma_1} \widetilde{a}_2^{\sigma_2} \cdot \widetilde{a}_n^{\sigma_n} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma_1}^1 a_{\sigma_2}^2 \cdots a_{\sigma_n}^n. \tag{4.1}$$

Теперь нам нужно переставить множители
$$a_{\sigma(1)}^1 a_{\sigma(2)}^2 \cdot a_{\sigma(n)}^n, \quad \sigma(k) = \sigma_k,$$
таким образом, чтобы нижние индексы упорядочить по возрастанию. Рассмотрим соответствующую перестановку:
$$\tau = \begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix} \Rightarrow \tau = \sigma^{-1}.$$

Но тогда
$$\tau = \sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma^{-1}(1) & \sigma^{-1}(2) & \cdots & \sigma^{-1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1^{-1} & \sigma_2^{-1} & \cdots & \sigma_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,
$$a_{\sigma_1}^1 a_{\sigma_2}^2 \cdots a_{\sigma_n}^n = a_1^{\sigma_1^{-1}} a_2^{\sigma_2^{-1}} \cdots a_n^{\sigma_n^{-1}}. \tag{4.2}$$

Поскольку $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$, то

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) a_1^{\sigma_1^{-1}} a_2^{\sigma_2^{-1}} \cdots a_n^{\sigma_n^{-1}} =$$

$$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) a_1^{\sigma_1^{-1}} a_2^{\sigma_2^{-1}} \cdots a_n^{\sigma_n^{-1}} =$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign}(\tau) a_1^{\tau_1} a^{\tau_2} \cdots a_n^{\tau_n} = \det A. \qquad (4.3)$$

Теорема доказана.

Следствие. *Определитель* $\det A$ *матрицы* $A = \|A^1, A^2, \ldots, A^n\|^T$ *является полилинейной и кососимметрической функцией своих строк.*

§ 5. Определители специального вида

Лемма 3. *Определитель квадратной треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство.

Рассмотрим, например, нижнетреугольную матрицу $A = (a)_k^j$, которая определяется условием, что

$$a_k^j = 0 \quad \text{при} \quad j < k,$$

т. е. имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & 0 \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \cdots a_n^{\sigma_n}. \qquad (5.1)$$

Заметим, что в этой сумме остается только одно слагаемое

$$\operatorname{sign}(1, 2, \ldots, n) a_1^1 a_2^2 \cdots a_n^n = a_1^1 a_2^2 \cdots a_n^n.$$

$\square$ Действительно, в силу определения нижнетреугольной матрицы имеем

$$a_k^{\sigma_k} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma_k < k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n}. \qquad (5.2)$$

Отсюда в сумму (5.1) ненулевой вклад могут дать только слагаемые, для которых

$$\sigma_k \geqslant k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n}. \qquad (5.3)$$

С другой стороны, имеем

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = 1 + 2 + \cdots + n. \tag{5.4}$$

Из сравнения (5.3) с (5.4) приходим к выводу, что

$$\sigma_k = k \Leftrightarrow \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \cdots, \sigma_n = n. \quad \boxtimes$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая важная теорема об определители блочной матрицы.

Теорема 6. *Пусть квадратная матрица $A \in \mathbb{K}^{(m+n)\times(m+n)}$ имеет блочную структуру*

$$A = \begin{Vmatrix} B & D \\ O & C \end{Vmatrix},$$

где B и C — это квадратные блоки размеров $m \times m$ и $n \times n$ соответственно. Тогда

$$\begin{vmatrix} B & D \\ O & C \end{vmatrix} = |B| \cdot |C|. \tag{5.5}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что $\det A$ является полилинейной кососимметрической функцией первых m столбцов ($m \times m$ — это размер квадратной матрицы B) при фиксированных оставшихся столбцах матрицы A.

□ Действительно, пусть

$$F(A_1, \ldots, A_n) = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} A_1 & A_2 & \ldots & A_m & D \\ \hline O & O & \ldots & O & C \end{array}\right|.$$

Тогда имеем

$$F(A_1, \cdots, \alpha A_k' + \beta A_k'', \cdots, A_m) = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_1 & \ldots & \alpha A_k' + \beta A_k'' & \ldots & A_m & D \\ \hline O & \ldots & O & \ldots & O & C \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_1 & \ldots & \alpha A_k' + \beta A_k'' & \ldots & A_m & D \\ \hline O & \ldots & \alpha O + \beta O & \ldots & O & C \end{array}\right| =$$

$$= \alpha \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_1 & \ldots & A_k' & \ldots & A_m & D \\ \hline O & \ldots & O & \ldots & O & C \end{array}\right| + \beta \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_1 & \ldots & A_k'' & \ldots & A_m & D \\ \hline O & \ldots & O & \ldots & O & C \end{array}\right| =$$

$$= \alpha F(A_1, \cdots, A_k', \cdots, A_m) + \beta F(A_1, \cdots, A_k'', \cdots, A_m).$$

Полилинейность доказана. Докажем кососимметричность.

$$F(A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_l, \cdots, A_n) =$$

$$= \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} A_1 & \ldots & A_k & \ldots & A_l & \ldots & A_m & D \\ \hline O & \ldots & O & \ldots & O & \ldots & O & C \end{array}\right| = -\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} A_1 & \ldots & A_l & \ldots & A_k & \ldots & A_m & D \\ \hline O & \ldots & O & \ldots & O & \ldots & O & C \end{array}\right| =$$

$$= -F(A_1, \cdots, A_l, \cdots, A_k, \cdots, A_n). \quad \boxtimes$$

Тогда согласно получим формулу

$$\det A = F(B), \tag{5.6}$$

где

$$F(B) = F(\mathbb{I}_m)|B|, \quad F(\mathbb{I}_m) = \begin{vmatrix} \mathbb{I}_m & D \\ O & C \end{vmatrix} \tag{5.7}$$

Шаг 2. В силу следствия из теоремы 5 числовая функция $F(\mathbb{I}_m)$ (как определитель соответствующей матрицы) является полилинейной и кососимметрической функцией своих последних n строк ($n \times n$ — это размер матрицы C) при фиксированной матрице D. Поэтому

$$F(\mathbb{I}_m) = G(C) = G(\mathbb{I}_n) \cdot |C|, \tag{5.8}$$

где

$$G(\mathbb{I}_n) = \begin{vmatrix} \mathbb{I}_m & D \\ O & \mathbb{I}_n \end{vmatrix}. \tag{5.9}$$

Теперь заметим, что (5.9) — это определитель верхнетреугольной матрицы, у которой на главной диагонали расположены единицы, т. е.

$$G(\mathbb{I}_n) = 1. \tag{5.10}$$

Собирая формулы (5.6)–(5.10), получим формулу

$$\det A = |B| \cdot |C|.$$

Теорема доказана.

§ 6. Разложение определителя по столбцам и строкам

Пусть $A = \|A_1, ..., A_n\|$, $A_k \in \mathbb{R}^n$. Введём естественный базис арифметического пространства вектор–столбцов $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем k–й столбец в следующем виде разложения по арифметическому базису:

$$A_k = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathbf{e}_j. \tag{6.1}$$

Тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$\det A = |A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n| = \left| A_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathbf{e}_j, \ldots, A_n \right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_k^j \left| A_1, \ldots, \mathbf{e}_j, \ldots, A_n \right| = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j. \quad (6.2)$$

Определение 5. *Определитель* $\mathcal{A}_k^j$ *при* $j, k \in \overline{1, n}$ *называется алгебраическим дополнением элемента* a_k^j *k–го столбца и j–ой строки.*

Лемма 4. *Имеет место следующее равенство*:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j. \quad (6.3)$$

Доказательство.

Это равенство следствие равенства $\det A^T = \det A$.

Лемма доказана.

Формулы для вычисления алгебраических дополнений.

Сначала вычислим алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_1^1$ элемента a_1^1 матрицы A.

□ Итак, справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{A}_1^1 = \left| \mathbf{e}_1, A_2, \ldots, A_n \right| = \begin{vmatrix} 1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = |1| \cdot \begin{vmatrix} a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix},$$

где мы воспользовались формулой (5.5) для вычисления определителя блочной матрицы. ⊠

Теперь вычислим алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_k^j$ элемента a_k^j матрицы A.

□ Действительно,

$$\mathcal{A}_k^j = \left| A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n \right| = \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & 0 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & 0 & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ a_1^j & \cdots & a_{k-1}^j & 1 & a_{k+1}^j & \cdots & a_n^j \\ a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & 0 & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & 0 & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Теперь многократно переставляя k–й столбец мы получим следующий определитель

$$\mathcal{A}_k^j = \left| A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n \right| =$$
$$= (-1)^{k-1} \left| \mathbf{e}_j, A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n \right| =$$

$$
= (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} 0 & a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ 1 & a_1^{j} & \cdots & a_{k-1}^{j} & a_{k+1}^{j} & \cdots & a_n^{j} \\ 0 & a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.
$$

Теперь многократно мы должны переставить j–ую строчку. В результате получим равенство

$$
\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & a_1^{j} & \cdots & a_{k-1}^{j} & a_{k+1}^{j} & \cdots & a_n^{j} \\ 0 & a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ 0 & a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.
$$

Теперь мы можем воспользоваться формулой (5.5) для вычисления блочной матрицы и получить следующую формулу:

$$
\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k+j}\overline{M}_k^j, \tag{6.4}
$$

где символом $\overline{M}_k^j$ мы обозначили *дополнительный минор* к элементу a_k^j. Черта сверху означает, что мы из определителя $\det A$ вычеркнули j–ю строчку и k–й столбец:

$$
\overline{M}_k^j = \left| \begin{array}{ccc|ccc} a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ \hline a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{array} \right|.
$$

Минор $\overline{M}_k^j$ — это определитель $(n-1)$–го порядка.
Т е о р е м а 7. *Справедливы следующие формулы*:

$$
\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\overline{M}_k^j a_k^j = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\overline{M}_k^j a_k^j. \tag{6.5}
$$

Фальшивое разложение определителя. Рассмотрим определитель
$$|A_1, \dots, A_{k-1}, B_p, A_{k+1}, \dots, A_n|, \tag{6.6}$$
у которого вместо столбца A_k находится столбец B_p, который зададим его разложением по арифметическому базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ следующим образом:
$$B_p = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \mathbf{e}_j. \tag{6.7}$$
После подстановки (6.7) в (6.6) получим равенство
$$|A_1, \dots, A_{k-1}, B_p, A_{k+1}, \dots, A_n| = \\ = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \, |A_1, \dots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \dots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \mathcal{A}_k^j, \tag{6.8}$$
где $\mathcal{A}_k^j$ — это алгебраическое дополнение элемента a_k^j матрицы A.

Теперь возьмём в качестве $B_p = A_p$. Тогда если $p \neq k$ мы получим равенство
$$0 = |A_1, \dots, A_{k-1}, A_p, A_{k+1}, \dots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} a_p^j \mathcal{A}_k^j,$$
поскольку в определителе два столбца равны в этом случае.

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 8. *Справедливы следующие формулы*:
$$\sum_{j=1}^{n} a_p^j \mathcal{A}_k^j = \begin{cases} \det A, & \text{если} \quad p = k; \\ 0, & \text{если} \quad p \neq k. \end{cases} \tag{6.9}$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k^q \mathcal{A}_k^j = \begin{cases} \det A, & \text{если} \quad q = j; \\ 0, & \text{если} \quad q \neq j. \end{cases} \tag{6.10}$$

§ 7. Важные теоремы об определителях

Теорема 9. *Определитель матрицы A равен нулю тогда и только тогда, когда её столбцы (строки) линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть $A = (a)_k^j$ — это квадратная матрица порядка n :
$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \vdots & a_n^n \end{pmatrix}, \quad A = \|A_1, A_2, \dots, A_n\|, \quad A = \begin{Vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{Vmatrix}.$$

Шаг 1. Достаточность. Пусть столбцы $A_1, \ldots, A_n$ матрицы A линейно зависимы. Например,

$$A_1 = c^2 A_2 + \cdots + c^n A_n.$$

$$\det A = |A_1, A_2, \ldots, A_n| = \left| c^2 A_2 + \cdots + c^n A_n, A_2, \ldots, A_n \right| = \\ = c^2 |A_2, A_2, \ldots, A_n| + \cdots + c_n |A_n, A_2, \ldots, A_n| = 0.$$

Шаг 2. Необходимость. Пусть $\det A = 0$. Проведём доказательство утверждения по индукции. Для случая $n = 2$ утверждение проверяется непосредственно. Предположим, что утверждение имеет место для квадратных матриц порядка $n-1$. Докажем утверждение для случая квадратных матриц порядка n.

□ Без ограничения общности можно считать, что $a_1^1 \neq 0$. Вычтем из всех остальных строчек первую умноженную соответственно на числа

$$-\frac{a_1^2}{a_1^1}, \ldots, -\frac{a_1^n}{a_1^1},$$

тогда получим

$$0 = \det \begin{Vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1 \\ A^2 - \dfrac{a_1^2}{a_1^1} A^1 \\ \vdots \\ A^n - \dfrac{a_1^n}{a_1^1} A^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 - \dfrac{a_1^2}{a_1^1} a_2^1 & \cdots & a_n^2 - \dfrac{a_1^2}{a_1^1} a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^n - \dfrac{a_1^n}{a_1^1} a_2^1 & \cdots & a_n^n - \dfrac{a_1^n}{a_1^1} a_n^1 \end{vmatrix}. \tag{7.1}$$

Разлагая этот определитель по первому столбцу, с учётом неравенства $a_1^1 \neq 0$ получим равенство

$$0 = \begin{vmatrix} a_2^2 - \dfrac{a_1^2}{a_1^1} a_2^1 & \cdots & a_n^2 - \dfrac{a_1^2}{a_1^1} a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^n - \dfrac{a_1^n}{a_1^1} a_n^1 & \cdots & a_n^n - \dfrac{a_1^n}{a_1^1} a_n^1 \end{vmatrix}$$

Это определитель матрицы порядка $n-1$, поэтому по предположению индукции строки этого определителя зависимы, но тогда, очевидно, линейно зависимы и строки, начиная со второй, в определителе (7.1)

$$B^2 = \left(0, a_2^2 - \frac{a_1^2}{a_1^1} a_2^1, \ldots, a_n^2 - \frac{a_1^2}{a_1^1} a_n^1\right) = A^2 - \frac{a_1^2}{a_1^1} A^1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B^n = \left(0, a_2^n - \frac{a_1^n}{a_1^1} a_2^1, \ldots, a_n^n - \frac{a_1^n}{a_1^1} a_n^1\right) = A^n - \frac{a_1^n}{a_1^1} A^1.$$

Таким образом, найдётся такой нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_2, ..., \alpha_n$, что

$$\alpha_2 B^2 + \dots + \alpha_n B^n = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\left(\alpha_2 \frac{a_1^2}{a_1^1} + \dots + \alpha_n \frac{a_1^n}{a_1^1}\right) A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n = O.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Однородная система n уравнений $AX = O$ относительно n переменных имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $\det A = 0$.

$\square$ $\det A = 0 \Leftrightarrow \exists\, X_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)^T \neq O, \quad A_1 x_0^1 + \dots + A_n x_0^n = O.$ $\boxtimes$

Теорема 10. *Если A и B матрицы из $\mathbb{K}^{n\times n}$, то*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доказательство.

Пусть $C := AB$, где

$$A = \|A_1, \dots, A_n\|\,, \quad C = \|C_1, \dots, C_n\|\,, \quad C_k = A \cdot B_k = \sum_{j=1}^{n} A_j b_k^j.$$

$$\det C = |C_1, \dots, C_n| = \left| \sum_{j_1=1}^{n} A_{j_1} b_1^{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} A_{j_n} b_n^{j_n} \right| =$$
$$= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} b_1^{j_1} \cdots b_n^{j_n} \det \|A_{j_1}, ..., A_{j_n}\|\,. \quad (7.2)$$

Очевидно, что ненулевой вклад дают лишь те слагаемые, в которых числа

$$\{j_1, \cdots, j_n\}$$

различны, т. е. образуют перестановку из чисел $1, ..., n$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{bmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}.$$

Проведем перестановку столбцов в выражении

$$\det \|A_{j_1}, ..., A_{j_n}\| \mapsto \det \|A_1, ..., A_n\| :$$
$$\det \|A_{j_1}, ..., A_{j_n}\| = \operatorname{sign}(\sigma) \det A.$$
$$\det C = \det A \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) b_1^{\sigma_1} \cdots b_n^{\sigma_n} = \det A \cdot \det B.$$

Теорема доказана.

§ 8. Обратная матрица

Определение 1. *Квадратная матрица A называется невырожденной или не особой, если* $\det A \neq 0$.
Теорема 11. *Квадратная матрица A обратима тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$.

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть квадратная матрица A обратима и A^{-1} — это обратная.

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n \Rightarrow \left|A \cdot A^{-1}\right| = 1 \Rightarrow |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0.$$

Шаг 2. Достаточность. Пусть $\det A \neq 0$.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Сопоставим матрице A^T матрицу $A^\vee$, составленную из алгебраических дополнений к элементам матрицы A^T:

$$A^\vee = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1^1 & \mathcal{A}_1^2 & \cdots & \mathcal{A}_1^n \\ \mathcal{A}_2^1 & \mathcal{A}_2^2 & \cdots & \mathcal{A}_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_n^1 & \mathcal{A}_n^2 & \cdots & \mathcal{A}_n^n \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\{A \cdot A^\vee\}_k^j = \sum_{p=1}^{n} \{A\}_p^j \{A^\vee\}_k^p = \sum_{p=1}^{n} a_p^j \mathcal{A}_p^k = \det A \cdot \delta_{kj} \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^\vee}{\det A}.$$

Теорема доказана.