Лекция 17

ПРИВЕДЕНИЕ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

§ 1. Преобразование базисов и координат на плоскости

Пусть на плоскости заданы две прямоугольные декартовы системы координат с общим началом:

$$\{O, \mathbf{I}\} \quad \text{и} \quad \{O\mathbf{I}^{'}\},$$

где

$$\mathbf{I} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}, \quad \mathbf{I} = \{\mathbf{i}^{'}, \mathbf{j}^{'}\},$$

соответствующая пара ортонормированных базисов.

Разложим «новый» базис $\mathbf{I}^{'}$ по векторам «старго» базиса $\mathbf{I}^{'}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i}^{'} = r_1^1\mathbf{i} + r_1^2\mathbf{j}; \\ \mathbf{j}^{'} = r_2^1\mathbf{i} + r_2^2\mathbf{j}, \end{array} \right. \Leftrightarrow (\mathbf{i}^{'}, \mathbf{j}^{'}) = (\mathbf{i}, \mathbf{j})R \Leftrightarrow \mathbf{I}^{'} = \mathbf{I}R, \tag{1.1}$$

где

$$R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Определение 1. *Матрица R, составленная из коэффициентов разложения нового базиса $\mathbf{I}^{'}$ по старому базису $\mathbf{I}$ и записанных в виде столбцов, называется матрицей перехода от базиса $\mathbf{I}$ к базису $\mathbf{I}^{'}$.*

Замечание 1. Формулы (1.1) составлены таким образом, чтобы строка $\mathbf{I} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ умножалась на матрицу R слева.

Вывод специального вида матрицы R. Базисы $\mathbf{I}$ и $\mathbf{I}^{'}$ являются ортонормированными и поэтому, с одной стороны, имеют место следующие равенства:

$$r_1^1 = \langle \mathbf{i}^{'}, \mathbf{i} \rangle, \quad r_1^2 = \langle \mathbf{i}^{'}, \mathbf{j} \rangle, \quad r_2^1 = \langle \mathbf{j}^{'}, \mathbf{i} \rangle, \quad r_2^2 = \langle \mathbf{j}^{'}, \mathbf{j} \rangle. \tag{1.3}$$

С другой стороны,

$$\langle \mathbf{i}^{'}, \mathbf{i} \rangle = |\mathbf{i}^{'}||\mathbf{i}| \cos\varphi_1 = \cos\varphi_1, \quad \langle \mathbf{i}^{'}, \mathbf{j} \rangle = |\mathbf{i}^{'}||\mathbf{j}| \cos\varphi_2 = \cos\varphi_2, \tag{1.4}$$

$$\langle \mathbf{j}^{'}, \mathbf{i} \rangle = |\mathbf{j}^{'}||\mathbf{i}| \cos\varphi_3 = \cos\varphi_3, \quad \langle \mathbf{j}^{'}, \mathbf{j} \rangle = |\mathbf{j}^{'}||\mathbf{j}| \cos\varphi_4 = \cos\varphi_4. \tag{1.5}$$

Если угол φ_1 положить равным углу α, то имеют место следующие равенства:

$$\varphi_1 = \alpha, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \varphi_4 = \alpha. \tag{1.6}$$

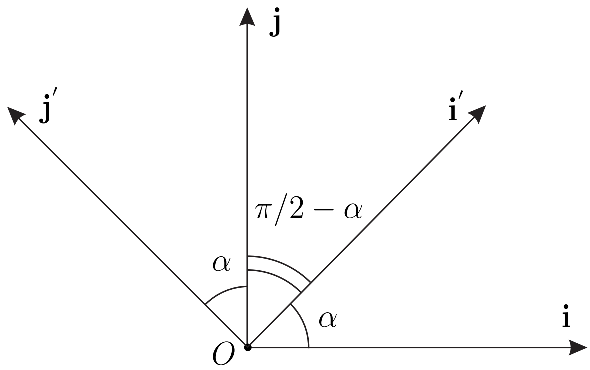

Рис. 1. Связь ортонормированных базисов.

С учётом формул (1.3)–(1.6) мы приходим к искомым формулам

$$r_1^1 = \cos\varphi_1 = \cos\alpha, \quad r_1^2 = \cos\varphi_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \tag{1.7}$$

$$r_2^1 = \cos\varphi_3 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha, \quad r_2^2 = \cos\varphi_4 = \cos\alpha. \tag{1.8}$$

Таким образом, мы пришли к следующему виду матрицы перехода R :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

З а м е ч а н и е 2. Матрица перехода R обладает важным свойством ортогональности:

$$R^T = R^{-1}.$$

§ 2. Композиция поворота и параллельного переноса

Рассмотрим теперь общий случай, когда «новая» ортогональная система координат $O'\mathbf{i}'\mathbf{j}'$ получается из «старой» системы координат $O\mathbf{ij}$ параллельным переносом точки O в точку O' на вектор $\overrightarrow{OO'}$ и ортогональным поворотом, рассмотренным в предыдущем параграфе.

Пусть A — это произвольная точка. Тогда имеем

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}.$$

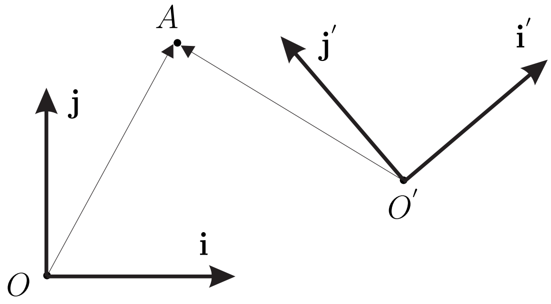

Рис. 2. Общее преобразование.

Радиус векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OO'}$ разложим по базису $\mathbf{I}$, а радиус–вектор $\overrightarrow{O'A}$ разложим по базису $\mathbf{I}'$. Введём столбцы координат в соответствующих базисах

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{O'A} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{gathered}\mathbf{I}X = \mathbf{I}X_0 + \mathbf{I}'X' \Leftrightarrow \mathbf{I}X = \mathbf{I}X_0 + \mathbf{I}RX' \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(X - X_0 - RX'\right)\mathbf{I} = O \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow X = X_0 + RX' \Leftrightarrow X' = R^{-1}(X - X_0) \Leftrightarrow X' = R^T(X - X_0). \quad (2.1)\end{gathered}$$

Распишем матричные формулы (2.1).

$$\begin{cases} x = x_0 + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \\ y = y_0 + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha; \\ y' = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha. \end{cases} \quad (2.3)$$

Запись преобразований плоскости в однородных координатах. Выпишем следующие столбцы:

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \frac{X}{1} \right\|, \quad Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \frac{X'}{1} \right\|. \quad (2.4)$$

Введём теперь расширенную матрицу преобразования

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|. \quad (2.5)$$

Справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 1. *Матрица P обратима и обратная имеет следующий вид*:

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x_0^{'} \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y_0^{'} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Используя правило перемножения блочных матриц, получим следующую цепочку равенств:

$$P^{-1} \cdot P = \left\|\begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & O \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$P \cdot P^{-1} = \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| \cdot = \left\|\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & O \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Л е м м а д о к а з а н а.

Л е м м а 2. *Справедливы следующие равенства*:

$$Z = PZ^{'}, \quad Z^{'} = P^{-1}Z.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$PZ^{'} = \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c} X^{'} \\ \hline 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} R \cdot X^{'} + X_0 \\ \hline 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right\| = Z;$$

$$P^{-1} \cdot Z = \left\|\begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} R^T \cdot X - R^T \cdot X_0 \\ \hline 1 \end{array}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{array}{c} R^T \cdot (X - X_0) \\ \hline 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} X^{'} \\ \hline 1 \end{array}\right\| = Z^{'}.$$

Л е м м а д о к а з а н а.

З а м е ч а н и е 3. Справедливо равенство

$$P^{-1} = \left\|\begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x_0^{'} \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y_0^{'} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|,$$

где

$$X_0^{'} = -R^T X_0,$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} x_0^{'} = -x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha, \\ y_0^{'} = x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha. \end{cases}$$

§ 3. Уравнения квадрики на плоскости

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Определение 1. *Линия на плоскости, координаты точек $M(x, y)$ которой и только они являются решениями уравнения*

$$F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \tag{3.1}$$

причём коэффициенты этого уравнения вещественные числа и

$$|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| > 0$$

называется уравнением линии второго порядка или квадрикой.

Введём следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad B = (b_1, b_2), \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.1) квадрики можно записать в следующем виде:

$$X^T AX + 2BX + c = 0. \tag{3.2}$$

Уравнение квадрики в однородных координатах.

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array}\right\|, \quad Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left\|\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right\|. \tag{3.3}$$

Тогда уравнение квадрики (3.2) можно записать в следующем виде:

$$Z^T DZ = 0. \tag{3.4}$$

$\square$ $$\left\| X^T \middle| 1 \right\| \cdot \left\|\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right\| =$$
$$= \left\| X^T A + B \middle| X^T B^T + c \right\| \cdot \left\|\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right\| =$$
$$= X^T AX + BX + X^T B^T + c = X^T AX + 2BX + c. \quad \boxtimes$$

§ 4. Ортогональные преобразования уравнения квадрики

Рассмотрим на плоскости помимо $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ ещё одну декартову прямоугольную систему координат $\{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$, полученную из $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$

параллельным переносом и поворотом. Напомним, что однородные координаты в этих системах координат связаны соотношением

$$Z = PZ^{'}, \quad P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|, \tag{4.1}$$

где

$$Z = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right\|, \quad Z^{'} = \left(\begin{array}{c} x^{'} \\ y^{'} \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c} X^{'} \\ \hline 1 \end{array}\right\|.$$

После подстановки в уравнение (3.4) преобразования (4.1) получим следующую цепочку равенств:

$$0 = Z^T DZ = Z^{'T} P^T DPZ^{'} = Z^{'T} D^{'} Z^{'},$$

где

$$D^{'} = P^T DP, \quad D^{'} = \left\|\begin{array}{c|c} A^{'} & B^{'T} \\ \hline B^{'} & c^{'} \end{array}\right\|. \tag{4.2}$$

$$\square \quad P^T \cdot D = \left\|\begin{array}{c|c} R^T & O \\ \hline X_0^T & 1 \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|c} R^T A & R^T B^T \\ \hline X_0^T A + B & X_0^T B^T + c \end{array}\right\|,$$

$$\begin{aligned} \left(P^T \cdot D\right) \cdot P &= \left\|\begin{array}{c|c} R^T A & R^T B^T \\ \hline X_0^T A + B & X_0^T B^T + c \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| = \\ &= \left\|\begin{array}{c|c} R^T AR & R^T AX_0 + R^T B^T \\ \hline X_0^T AR + BR & X_0^T AX_0 + BX_0 + X_0^T B^T + c \end{array}\right\| = \\ &= \left\|\begin{array}{c|c} R^T AR & R^T (AX_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T A + B)R & X_0^T AX_0 + 2BX_0 + c \end{array}\right\|, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где мы воспользовались равенством $X_0^T B^T = BX_0$, поскольку это матрица размера 1×1 — число, а также тем, что $A^T = A$. Сравнивая формулы (4.2) и (4.3) мы получим равенства

$$A^{'} = R^T AR, \quad B^{'} = (X_0^T A + B)R, \quad c^{'} = X_0^T AX_0 + 2BX_0 + c, \tag{4.4}$$

а уравнение квадрики в новой системе координат примет следующий вид:

$$X^{'T} A^{'} X^{'} + 2B^{'} X^{'} + c^{'} = 0. \quad \boxtimes \tag{4.5}$$

Наблюдение 1. Матрица A меняется только при повороте.

Наблюдение 2. Матрица B меняется и при повороте и при параллельном переносе.

Наблюдение 3. Свободный член c меняется только при параллельном переносе.

Ортогональные инварианты уравнения квадрики.
Теорема 1. *При ортогональных преобразованиях декартовой прямоугольной системы координат величины*

$$S := \operatorname{tr} A, \quad \delta := \det A, \quad \triangle := \det D \tag{4.6}$$

не изменяются.

Доказательство.

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}(R^T A R) = \operatorname{tr}(A R R^T) = \operatorname{tr}(A R R^{-1}) = \operatorname{tr} A;$$

$$\det A' = \det(R^T A R) = \det R^T \det A \det R = \det A, \quad \det R = 1;$$

$$\det D' = \det(P^T D P) = \det P^T \det D \det P = \det D, \quad \det P = 1.$$

Теорема доказана.

Определение 2. *Величины* (4.6) *называются ортогональными инвариантами.*

§ 5. Уничтожение слагаемого $2a_{12}xy$ при помощи поворота на угол α

Задача заключается в том, чтобы найти поворот на такой угол α, при котором справедливо равенство

$$A' = R^T A R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Лемма 3. *При наличии в уравнении квадрики* (3.1) *слагаемого $2a_{12}xy$ необходимо выполняется условие $\lambda_1 \neq \lambda_2$* [1]).

Доказательство.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда

$$A = (R^T)^{-1} A' R^{-1} = R A' R^{-1} = R\,(\lambda \mathbb{I})\,R^{-1} = \lambda R R^{-1} = \lambda \mathbb{I}.$$

Лемма доказана.

Замечание 4. Числа λ_1 и λ_2 могут быть найдены с помощью ортогональных инвариантов.

□ Действительно, имеем

$$S = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \delta = \det A = \det A' = \lambda_1 \lambda_2.$$

Поэтому по теореме Виета числа λ_1 и λ_2 являются решениями следующего квадратного уравнения:

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \quad \boxtimes \tag{5.2}$$

[1]) Отметим, что это утверждение имеет место только в прямоугольных декартовых системах координат.

Характеристический многочлен. Итак, при ортогональном преобразовании R ($R^T = R^{-1}$) матрица A квадрики преобразуется по следующему закону:

$$A^{'} = R^T AR \Leftrightarrow RA^{'} = AR, \tag{5.3}$$

поскольку $R^T = R^{-1}$. Нам нужно найти такой новый базис $\mathbf{i}^{'}, \mathbf{j}^{'}$, в котором матрица $A^{'}$ имеет вид

$$A^{'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся равенством (5.3) и получим следующее выражение:

$$A[R_1, R_2] = [R_1, R_2] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = [\lambda_1 R_1, \lambda_2 R_2]. \tag{5.4}$$

Заметим теперь, что согласно формуле произведения матрицы A на матрицу $R = [R_1, R_2]$ имеет место равенство

$$AR = A[R_1, R_2] = [AR_1, AR_2]. \tag{5.5}$$

Из равенств (5.4) и (5.5) мы приходим к равенствам

$$[AR_1, AR_2] = [\lambda_1 R_1, \lambda_2 R_2] \Leftrightarrow AR_k = \lambda_k R_k \quad \text{при} \quad k = 1, 2. \tag{5.6}$$

Уравнения (5.6) можно переписать в следующем виде:

$$(A - \lambda_k \mathbb{I})\, R_k = O \quad \text{при} \quad k = 1, 2. \tag{5.7}$$

Нетривиальные решения систем уравнений (5.7) существуют тогда и только тогда, когда λ_1 и λ_2 являются решениями следующего уравнения:

$$\det (A - \lambda \mathbb{I}) = 0. \tag{5.8}$$

Определение 3. *Уравнение* (5.8) *называется характеристическим уравнением или характеристическим многочленом.*

Вычисление определителя в характеристическом уравнении.

$$\square \quad \det (A - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} =$$
$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$$
$$= \lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \quad \boxtimes \tag{5.9}$$

Таким образом, мы установили, что *числа* λ_1 *и* λ_2 *являются решениями уравнения* (5.8) *и только они.*

Определение 4. *Корни λ_1 и λ_2 характеристического многочлена* (5.8) *называются собственными значениями матрицы A, а ненулевые решения R_1 и R_2 уравнения*

$$(A - \lambda\mathbb{I})\, X = O$$

называются собственными векторами.

Поэтому, например,

$$AR_2 = \lambda_2 R_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a_{11}\sin\alpha + a_{12}\cos\alpha = -\lambda_2 \sin\alpha, \\ -a_{12}\sin\alpha + a_{22}\cos\alpha = \lambda_2\cos\alpha. \end{array} \right. \tag{5.10}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{5.11}$$

§ 6. Уничтожение линейных слагаемых $2b_1x + 2b_2y$

Из полученных ранее формул (4.4) вытекает, что при общем ортогональном преобразовании матрица–строка $B = (b_1, b_2)$ преобразуется по следующему закону:

$$B^{'} = (X_0^T A + B)R. \tag{6.1}$$

Для уничтожения в уравнении квадрики (3.2) линейного слагаемого

$$2BX$$

необходимо и достаточно потребовать, чтобы $B^{'} = O$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$B^{'} = O \Leftrightarrow (X_0^T A + B)R = O \Leftrightarrow X_0^T A + B = O \Leftrightarrow A^T X_0 = -B^T. \tag{6.2}$$

Поскольку $A^T = A$, то мы приходим к искомому уравнению

$$AX_0 = -B^T, \quad B \neq O. \tag{6.3}$$

Ясно, что эта квадратная неоднородная система линейных уравнений разрешима тогда и только тогда, когда $\delta = \det A \neq 0$.

Случай центральных квадрик. Рассмотрим сначала случай $\delta \neq 0$. В этом случае имеет место равенство

$$X_0 = -A^{-1}B^T,$$

из которого вытекает явный вид искомого преобразования

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} R & -A^{-1}B^T \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

В новых координатах $X^{'} = (x^{'}, y^{'})$ после этого преобразования уравнение квадрики примет следующий вид:

$$\lambda_1 x^{'2} + \lambda_2 y^{'2} + c^{'} = 0, \quad c^{'} = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c. \tag{6.4}$$

Матрица $D^{'}$ при этом имеет следующий вид:

$$D^{'} = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c^{'} \end{array}\right), \tag{6.5}$$

где выражение для $c^{'}$ можно упростить.

$\square \quad c^{'} = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c = -X_0^T B^T + 2BX_0 + c = BX_0 + c. \quad \boxtimes$

Кроме того, из выражения (6.5) имеют место следующие равенства:

$$\triangle = \det D^{'} = \lambda_1 \lambda_2 c^{'} = \delta c^{'} \Rightarrow c^{'} = \frac{\triangle}{\delta}. \tag{6.6}$$

Следовательно, уравнение (6.4) с учётом (6.6) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda_1 x^{'2} + \lambda_2 y^{'2} + \frac{\triangle}{\delta} = 0. \tag{6.7}$$

Определение 5. *Алгебраическая линия второго порядка называется центральной, если* $\det A \neq 0$.

§ 7. Уравнения эллиптического типа

Рассмотрим случай $\delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$. В этом случае, очевидно, числа λ_1 и λ_2 одного знака.

1. Вещественный эллипс. Пусть $c^{'}$ и $\lambda_{1,2}$ имеют разные знаки. Тогда уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x^{'2}}{a^2} + \frac{y^{'2}}{b^2} = 1, \quad a^2 = -\frac{c^{'}}{\lambda_1} = -\frac{\triangle}{\delta \lambda_1} > 0, \quad b^2 = -\frac{c^{'}}{\lambda_2} = -\frac{\triangle}{\delta \lambda_2} > 0. \tag{7.1}$$

2. Мнимый эллипс. Пусть $c^{'}$ и $\lambda_{1,2}$ одного знака. Тогда уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x^{'2}}{a^2} + \frac{y^{'2}}{b^2} = -1, \quad a^2 = \frac{c^{'}}{\lambda_1} = \frac{\triangle}{\delta \lambda_1} > 0, \quad b^2 = \frac{c^{'}}{\lambda_2} = \frac{\triangle}{\delta \lambda_2} > 0. \tag{7.2}$$

3. Пара мнимых прямых. Пусть $c^{'} = 0$ и уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$a^2 x^{'2} + b^2 y^{'2} = 0, \quad a = \sqrt{|\lambda_1|}, \quad b = \sqrt{|\lambda_2|}. \tag{7.3}$$

§ 8. Уравнения гиперболического типа

Рассмотрим теперь случай $\delta = \det A = \lambda_1\lambda_2 < 0$. Это случай, когда числа λ_1 и λ_2 разных знаков.

4. Гипербола. Предположим, что $\triangle = c^{'}\delta \neq 0$. Тогда $c^{'} \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что знаки чисел $c^{'}$ и λ_1 разные, а знаки чисел $c^{'}$ и λ_2 одинаковые. Поэтому уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x^{'2}}{a^2} - \frac{y^{'2}}{b^2} = 1, \quad a^2 = -\frac{c^{'}}{\lambda_1} = -\frac{\triangle}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = \frac{c^{'}}{\lambda_2} = \frac{\triangle}{\delta\lambda_2} > 0. \tag{8.1}$$

5. Пара пересекающихся прямых. Предположим, что $\triangle = c^{'}\delta = 0 \Rightarrow c^{'} = 0$. Это вырожденный случай. Тогда уравнение (6.7) можно привести к следующему виду:

$$a^2x^{'2} - b^2y^{'2} = 0, \quad a^2 = |\lambda_1|, \quad b^2 = |\lambda_2|. \tag{8.2}$$

§ 9. Уравнения параболического типа

Рассмотрим теперь вырожденный случай $\delta = \det A = \lambda_1\lambda_2 = 0$. Поскольку мы рассматриваем алгебраические уравнения второго порядка, то это означает, что только одно из чисел λ_1 и λ_2 равно нулю. Пусть, например, $\lambda_1 = 0$. Тогда

$$S = \operatorname{tr} A = \lambda_2, \quad D^{'} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{'} \\ 0 & S & b_2^{'} \\ \hline b_1^{'} & b_2^{'} & c^{'} \end{array}\right), \quad \triangle = \det D^{'} = -\left(b_1^{'}\right)^2 S. \tag{9.1}$$

Поскольку рассматривается случай $\det A = 0$, то система уравнений $AX_0 = -B^T$ может либо быть несовместной, либо иметь бесконечное множество решений. Это случай *нецентральных кривых на плоскости*. Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 4. *Коэффициент $b_1^{'}$ выражается формулой*

$$b_1^{'} = \pm\sqrt{-\frac{\triangle}{S}} \tag{9.2}$$

и его абсолютная величина $|b_1^{'}|$ является инвариантом относительно сдвигов.

Доказательство.

Если мы используем только преобразование параллельного переноса системы координат, то при этом матрица $D^{'}$ после преобразования вида (формально при $\alpha = 0$)

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

преобразуется только к матрице аналогичного вида:

$$D^{''} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{''} \\ 0 & S & b_2^{''} \\ \hline b_1^{''} & b_2^{''} & c^{''} \end{array}\right).$$

При этом имеем

$$\triangle = \det D^{''} = -\left(b_1^{''}\right)^2 S, \quad \triangle = \det D^{'} = -\left(b_1^{'}\right)^2 S \Rightarrow |b_1^{''}| = |b_1^{'}|.$$

Лемма доказана.

6. Параболический тип. Предположим, что $\triangle \neq 0$. Поэтому согласно лемме 4 какие бы мы в дальнейшем не делали бы параллельный перенос системы координат (сдвиг) коэффициент $b_1^{'} \neq 0$ преобразуется в коэффициент $b_1^{''} = \pm b_1^{'} \neq 0$. Пусть мы сделали уже поворот на найденный угол α и уничтожили слагаемое $2a_{12}xy$, которое в однородных координатах имеет следующий вид:

$$D^{'} = P_1^T D P_1, \quad P_1 = \left\|\begin{array}{c|c} R & O \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

При этом в однородных координатах мы пришли к матрице

$$D^{'} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{'} \\ 0 & S & b_2^{'} \\ \hline b_1^{'} & b_2^{'} & c^{'} \end{array}\right), \quad A^{'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad B^{'} = (b_1^{'}, b_2^{'}), \quad b_1^{'} \neq 0.$$

Тогда уравнение для центра примет следующий вид:

$$A^{'} X_0 = -B^{'T} = -\begin{pmatrix} b_1^{'} \\ b_2^{'} \end{pmatrix},$$

где

$$\operatorname{rang} A^{'} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} < \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b_1^{'} \\ 0 & S & -b_2^{'} \end{pmatrix}, \quad \text{если} \quad b_1^{'} \neq 0.$$

Итак, *уравнение цента не имеет решений*. После поворота R (пока без сдвига) уравнение квадрики примет следующий вид:

$$Sy^{'2} + 2b_1^{'}x^{'} + 2b_2^{'}y^{'} + c = 0, \quad b_1^{'} \neq 0. \tag{9.3}$$

Это уравнение после выделения полного квадрата примет следующий вид:

$$S\left(y' + \frac{b_2'}{S}\right)^2 + 2b_1'\left(x' + \frac{c}{2b_1'} - \frac{b_2'^2}{2b_1'S}\right) = 0.$$

Вводя новые переменные

$$\begin{cases} x'' = \pm\left(x' + \dfrac{c}{2b_1'} - \dfrac{b_2'^2}{2b_1'S}\right), \\ y'' = y' + \dfrac{b_2'}{S}, \end{cases} \tag{9.4}$$

получим уравнение

$$Sy''^2 + 2b_1'x'' = 0, \tag{9.5}$$

а затем выбираем знак $\pm$ так, чтобы получилось каноническое уравнение параболы

$$y''^2 = 2px'', \quad p = \left|\frac{b_1'}{S}\right|. \tag{9.6}$$

З а м е ч а н и е 5. Заметим, что после преобразования (9.4) матрица квадрики в системе координат $Ox''y''$ примет следующий вид:

$$D'' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1' \\ 0 & S & 0 \\ \hline b_1' & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В ы р о ж д е н н ы й п а р а б о л и ч е с к и й т и п. Пусть $\triangle = \det D' = 0$, поэтому после чистого поворота, определяемого матрицей

$$P_1 = \left\|\begin{array}{c|c} R & O \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad D' = P_1^T D P_1,$$

получим равенство $b_1' = 0$. В этом случае матрица A' и расширенная матрица $[A', -B'^T]$ имеют одинаковый ранг. Следовательно, система уравнений центра

$$A'X_0 = -B'^T$$

имеет бесконечно много решений. Выберем какое–либо из них X_0. Тогда матрица D' после преобразования

$$P_2 = \left\|\begin{array}{c|c} I & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

примет следующий вид:

$$D'' = P_2^T D P_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ \hline 0 & 0 & c' \end{array}\right). \tag{9.7}$$

А уравнение квадрики примет следующий вид:

$$Sy'^2 + c' = 0. \tag{9.8}$$

7. Вырожденный тип. Две параллельные прямые. Числа S и c' имеют разные знаки, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y'^2 - a^2 = 0, \quad a^2 = \left|\frac{c'}{S}\right|. \tag{9.9}$$

8. Вырожденный тип. Две мнимые параллельные прямые. Числа S и c' имеют одинаковые знаки, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y'^2 + a^2 = 0, \quad a^2 = \frac{c'}{S}. \tag{9.10}$$

9. Вырожденный тип. Две совпадающие прямые. Если $c' = 0$, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y'^2 = 0. \tag{9.11}$$