# Разностные схемы для уравнения колебаний в многомерном случае

Для многомерных уравнений колебаний можно составить аналог схемы «крест» и неявной схемы. При этом явная схема «крест» так же, как и в одномерном случае, будет условно устойчивой. В случае неявной схемы весовой параметр $\sigma$, с которым в разностное уравнение входят аппроксимированные на сетке слагаемые с пространственными производными, взятые на слоях $j-1$ и $j+1$, можно подобрать так, чтобы схема была безусловно устойчивой. Непосредственное решение получающейся при этом системы алгебраических уравнений требует большого числа действий, а соответствующая схема не является экономичной. Поэтому на практике часто от неявной схемы переходят к модифицированной факторизованной схеме, безусловно устойчивой при тех же значениях $\sigma$, что и неявная схема, и аппроксимирующей исходную задачу с тем же порядком погрешности аппроксимации, что и неявная схема. Факторизованная схема является экономичной и решается в несколько этапов для каждого координатного направления. Каждая из возникающих при этом вспомогательных задач решается методом прогонки.

## 1 Двумерное уравнение колебаний в прямоугольной области

Для того чтобы продемонстрировать основные идеи численного решения уравнения колебаний конечно-разностными методами, рассмотрим двумерное уравнение колебаний в прямоугольной области. Пусть нам необходимо решить следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,y,t), \quad x \in (0, l_x),\ y \in (0, l_y),\ t \in (0, T], \\[2ex] u|_{t=0} = \varphi(x,y), \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y), \\[2ex] u|_{x=0} = \mu_1(y,t), \qquad u|_{x=l_x} = \mu_2(y,t), \\[2ex] u|_{y=0} = \mu_3(x,t), \qquad u|_{y=l_y} = \mu_4(x,t). \end{cases} \tag{1.1}$$

Введем в области $x \in [0, l_x]$, $y \in [0, l_y]$ равномерную сетку с шагом $h_x$ по переменной $x$, $h_y$ по переменной $y$ и шагом $\tau$ по времени:

$$x_n = nh_x,\ \ n = 0, 1, ..., N,\ \ Nh_x = l_x, \qquad y_m = mh_y,\ \ m = 0, 1, ..., M,\ \ Mh_y = l_y,$$

$$t_j = j\tau,\ \ j = 0, 1, ..., J,\ \ J\tau = T.$$

Граничные условия задачи (1.1) аппроксимируются на сетке точно:

$$\begin{aligned} &w^j_{0,m} = \mu_1(y_m, t_j), \quad w^j_{N,m} = \mu_2(y_m, t_j), \quad m = 0, 1, ..., M,\ \ j = 0, 1, ..., J, \\ &w^j_{n,0} = \mu_3(x_n, t_j), \quad w^j_{n,M} = \mu_4(x_n, t_j), \quad n = 0, 1, ..., N,\ \ j = 0, 1, ..., J. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Начальные условия задачи аппроксимируем со вторым порядком погрешности по $\tau$:

$$\begin{aligned} &w^0_{n,m} = \varphi(x_n, y_m), \\ &\frac{w^1_{n,m} - w^0_{n,m}}{\tau} = \psi(x_n, y_m) + \frac{\tau}{2}\left(a^2 \Delta\varphi(x_n, y_m) + f(x_n, y_m, 0)\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

при $n = 0, 1, ..., N$, $m = 0, 1, ..., M$.

Дифференциальное уравнение в задаче (1.1) при $j = 1, 2, ..., J-1$ можно аппроксимировать с помощью явной схемы «крест», а можно использовать факторизованную неявную схему.

## 1.1 Схема «крест» в двумерном случае

Используем для аппроксимации двумерного уравнения колебания шаблон, приведенный на рис. 1.

Заменяя производные в уравнении конечными разностями, приходим к следующему разностному уравнению:

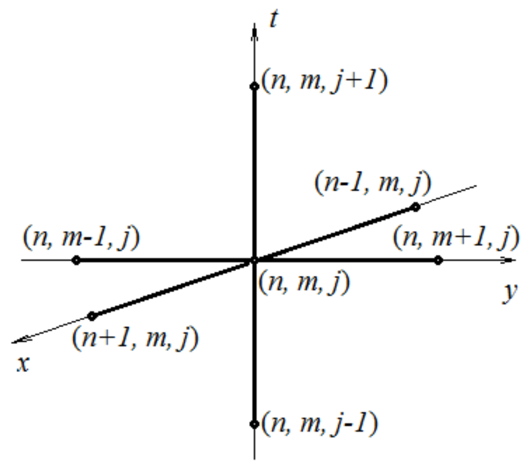


Рис. 1: Шаблон схемы «крест» в двумерном случае

$$\frac{w_{n,m}^{j+1} - 2w_{n,m}^{j} + w_{n,m}^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \left( \frac{w_{n+1,m}^{j} - 2w_{n,m}^{j} + w_{n-1,m}^{j}}{h_x^2} + \frac{w_{n,m+1}^{j} - 2w_{n,m}^{j} + w_{n,m-1}^{j}}{h_y^2} \right) + f_{n,m}^{j} \tag{1.4}$$

при $j = 1, ..., J-1$, $n = 1, ..., N-1$, $m = 1, ..., M-1$.

В узле $(x_n, y_m, t_j)$ разностное уравнение (1.4) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение с погрешностью $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$.

При каждом фиксированном $j = 1, 2, ..., J-1$ неизвестными в уравнении (1.4) являются $w_{n,m}^{j+1}$, которые могут быть легко выражены. После того как все $w_{n,m}^{j+1}$ при $n = 1, ..., N-1$, $m = 1, ..., M-1$ найдены , для завершения перехода на слой $j+1$ нужно воспользоваться граничными условиями при $n = 0$, $n = N$, $m = 0$ и $m = M$.

Для исследования схемы «крест» на устойчивость по начальным данным можно использовать метод гармоник. Множители роста при этом удовлетворяют квадратному уравнению:

$$\lambda_{pq}^2 - 2\lambda_{pq} + 1 = -\lambda_{pq} \left( \frac{4a^2\tau^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + \frac{4a^2\tau^2}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta_p}{2} \right). \tag{1.5}$$

Условие $|\lambda_{pq}| \leqslant 1$ выполняется, если дискриминант уравнения (1.5) неположителен:

$$\frac{D}{4} = \left( 1 - 2a^2\tau^2 \left( \frac{\sin^2 \frac{\alpha_q}{2}}{h_x^2} + \frac{\sin^2 \frac{\beta_p}{2}}{h_y^2} \right) \right)^2 - 1 \leqslant 0,$$

то есть когда справедливы неравенства

$$-1 \leqslant 1 - 2a^2\tau^2 \left( \frac{\sin^2 \frac{\alpha_q}{2}}{h_x^2} + \frac{\sin^2 \frac{\beta_p}{2}}{h_y^2} \right) \leqslant 1.$$

Последнее условие выполнено, если:

$$a^2\tau^2 \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \leqslant 1,$$

откуда получаем условие устойчивости схемы «крест» в двумерном случае:

$$a\tau\sqrt{\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}}\leqslant 1. \tag{1.6}$$

**Замечание 1.1** *В трехмерном случае условие устойчивости схемы «крест» имеет вид:*

$$a\tau\sqrt{\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}+\frac{1}{h_z^2}}\leqslant 1.$$

Схему «крест» удобно использовать в расчетах, не требующих высокой надежности вычислений, то есть когда не может возникнуть локальное нарушение условия (1.6).

## 1.2 Неявная схема для двумерного уравнения колебаний. Эволюционная факторизация.

Двумерный аналог неявной схемы с весами для уравнения колебаний имеет вид:

$$w_{\bar{t}t}=a^2\sum_{s=1}^{2}\Lambda_s[\sigma\hat{w}+(1-2\sigma)w+\sigma\check{w}]+f, \tag{1.7}$$

где $\Lambda_1 w = w_{\bar{x}x}$ и $\Lambda_2 w = w_{\bar{y}y}$.

За счет своей симметрии относительно слоя $j$ схема (1.7) обладает погрешностью аппроксимации $O(\tau^2+h_x^2+h_y^2)$, однако она не является экономичной, так как переход со слоя на слой требует слишком большого числа действий.

Заметим, что для выражения, на которое действуют операторы $\Lambda_s$ в правой части уравнения (1.7), справедливо равенство:

$$\sigma\hat{w}+(1-2\sigma)w+\sigma\check{w}=\sigma\tau^2 w_{\bar{t}t}+w,$$

которое позволяет переписать уравнение (1.7) в виде:

$$\underbrace{\left(E-\sigma\tau^2a^2\sum_{s=1}^{2}\Lambda_s\right)}_{B}w_{\bar{t}t}=a^2\sum_{s=1}^{2}\Lambda_s w+f. \tag{1.8}$$

Рассмотрим приближенный факторизованный оператор $\tilde{B}$ следующего вида:

$$\tilde{B}=(E-\sigma\tau^2a^2\Lambda_1)(E-\sigma\tau^2a^2\Lambda_2)=\underbrace{E-\sigma\tau^2a^2(\Lambda_1+\Lambda_2)}_{B}+\underbrace{\sigma^2\tau^4a^4\Lambda_1\Lambda_2}_{O(\tau^4)}.$$

Операторы $B$ и $\tilde{B}$ отличаются на величину порядка $O(\tau^4)$. Таким образом, если в уравнении (1.8) заменить оператор $B$ на оператор $\tilde{B}$, погрешность аппроксимации этим разностным уравнением исходного дифференциального уравнения не будет испорчена (она останется равной $O(\tau^2+h_x^2+h_y^2)$). В результате замены $B$ на $\tilde{B}$ получаем факторизованную разностную схему:

$$(E-\sigma\tau^2a^2\Lambda_1)(E-\sigma\tau^2a^2\Lambda_2)w_{\bar{t}t}=a^2\Lambda w+f,\quad \Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2. \tag{1.9}$$

Исследовать схему (1.9) на устойчивость можно с помощью метода гармоник. При этом для множителей роста получаем следующее квадратное уравнение:

$$\left(1+\frac{4\sigma a^2\tau^2}{h_x^2}\sin^2\frac{\alpha_q}{2}\right)\left(1+\frac{4\sigma a^2\tau^2}{h_y^2}\sin^2\frac{\beta_p}{2}\right)\left(\lambda_{pq}^2-2\lambda_{pq}+1\right)=$$

$$=-\lambda_{pq}4a^2\tau^2\left(\frac{\sin^2\frac{\alpha_q}{2}}{h_x^2}+\frac{\sin^2\frac{\beta_p}{2}}{h_y^2}\right),$$

которое можно переписать в виде:

$$\lambda_{pq}^2-2\left(1-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{(1+2\sigma\gamma_1)(1+2\sigma\gamma_2)}\right)\lambda_{pq}+1=0, \tag{1.10}$$

где введены обозначения

$$\gamma_1=\frac{2a^2\tau^2}{h_x^2}\sin^2\frac{\alpha_q}{2},\quad \gamma_2=\frac{2a^2\tau^2}{h_y^2}\sin^2\frac{\beta_p}{2}.$$

Условие $|\lambda_{pq}|\leqslant 1$ выполнено, если дискриминант уравнения (1.10) неположителен, то есть если справедливы неравенства:

$$-1\leqslant 1-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{(1+2\sigma\gamma_1)(1+2\sigma\gamma_2)}\leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; (1+2\sigma\gamma_1)(1+2\sigma\gamma_2)\geqslant\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}.$$

Последнее неравенство заведомо выполнено при $\sigma\geqslant\dfrac{1}{4}$. Следовательно, как и в одномерном случае, схема (1.9) безусловно устойчива при $\sigma\geqslant\dfrac{1}{4}$. На практике целесообразно выбирать $\sigma\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$, так чтобы вес $(1-2\sigma)$ центрального слоя не был отрицателен.

Добавляя к системе уравнений (1.9), рассматриваемых при $j=1,2,...,J-1$, $n=1,2,...,N-1$, $m=1,2,...,M-1$, разностную аппроксимацию начальных и граничных условий задачи (1.1), получаем для не разностную схему. Рассмотрим алгоритм ее решения. Введем вспомогательную функцию $w^{(1)}=(E-\sigma\tau^2a^2\Lambda_2)w_{\bar{t}t}$. Тогда

$$(E-\sigma\tau^2a^2\Lambda_1)\underbrace{(E-\sigma\tau^2a^2\Lambda_2)w_{\bar{t}t}}_{w^{(1)}}=a^2\Lambda w+f,$$

откуда для $w^{(1)}$ получаем уравнение

$$(E-\sigma\tau^2a^2\Lambda_1)w^{(1)}=a^2\Lambda w+f,\quad n=1,...,N-1,\ \ m=1,...,M-1. \tag{1.11}$$

Для того чтобы при каждом фиксированном $m=1,2,...,M-1$ получить для неизвестных $w^{(1)}_{n,m}$ полую систему уравнений, к уравнению (1.11) нужно добавить граничные условия для $w^{(1)}_{n,m}$ при $n=0$ и $n=N$. Получим их из граничных условий для функции $w^j_{n,m}$:

$$w^{(1)}_{0,m}=(E-\sigma\tau^2a^2\Lambda_2)w_{\bar{t}t}\big|_{n=0}=(E-\sigma\tau^2a^2\Lambda_2)\frac{\mu_1(y_m,t_{j+1})-2\mu_1(y_m,t_j)+\mu_1(y_m,t_{j-1})}{\tau^2}=\overline{\mu}_{1,m},$$

$$w^{(1)}_{N,m}=(E-\sigma\tau^2a^2\Lambda_2)w_{\bar{t}t}\big|_{n=N}=(E-\sigma\tau^2a^2\Lambda_2)\frac{\mu_2(y_m,t_{j+1})-2\mu_2(y_m,t_j)+\mu_2(y_m,t_{j-1})}{\tau^2}=\overline{\mu}_{2,m},$$

где $m=1,...,M-1$.

В результате для $w^{(1)}_{n,m}$ при каждом фиксированном $m=1,2,...,M-1$ приходим к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} w^{(1)}_{0,m}=\overline{\mu}_{1,m},\\[2mm] \dfrac{\sigma\tau^2a^2}{h_x^2}w^{(1)}_{n-1,m}-\left(1+\dfrac{2\sigma\tau^2a^2}{h_x^2}\right)w^{(1)}_{n,m}+\dfrac{\sigma\tau^2a^2}{h_x^2}w^{(1)}_{n+1,m}=-\left\{a^2\dfrac{w^j_{n-1,m}-2w^j_{n,m}+w^j_{n+1,m}}{h_x^2}+\right.\\ \qquad\qquad\qquad\left.+a^2\dfrac{w^j_{n,m-1}-2w^j_{n,m}+w^j_{n,m+1}}{h_y^2}+f^j_{n,m}\right\},\quad n=1,...,N-1,\\[2mm] w^{(1)}_{N,m}=\overline{\mu}_{2,m}, \end{cases} \tag{1.12}$$

которая может быть решена методом прогонки. В результате решения системы (1.12) находим значения вспомогательной функции $w^{(1)}_{n,m}$ для всех $n=0,1,...,N$ и $m=1,2,...,M-1$.

После того, как значения $w^{(1)}_{n,m}$ найдены, рассмотрим уравнение

$$(E-\sigma a^2\tau^2\Lambda_2)w_{\bar{t}t}=w^{(1)},\quad n=1,...,N-1,\quad m=1,...,M-1.$$

Добавляя к нему граничные условия при $m=0$ и $m=M$, при каждом фиксированном

$n = 1, ..., N-1$ получаем систему:

$$\begin{cases} w_{n,0}^{j+1} = \mu_3(x_n, t_{j+1}), \\ \dfrac{\sigma\tau^2 a^2}{h_y^2} w_{n,m-1}^{j+1} - \left(1 + \dfrac{2\sigma\tau^2 a^2}{h_y^2}\right) w_{n,m}^{j+1} + \dfrac{\sigma\tau^2 a^2}{h_y^2} w_{n,m+1}^{j+1} = -\Big\{ \tau^2 w_{n,m}^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{\sigma\tau^2 a^2}{h_y^2} \left(w_{n,m-1}^{j-1} - 2w_{n,m-1}^{j}\right) - \left(1 + \dfrac{2\sigma\tau^2 a^2}{h_y^2}\right) (w_{n,m}^{j-1} - 2w_{n,m}^{j}) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\sigma\tau^2 a^2}{h_y^2} \left(w_{n,m+1}^{j-1} - 2w_{n,m+1}^{j}\right) \Big\}, \quad m = 1, ..., M-1, \\ w_{n,M}^{j+1} = \mu_4(x_n, t_{j+1}). \end{cases} \tag{1.13}$$

Система (1.13) при каждом фиксированном $n = 1, 2, ..., N-1$ решается прогонкой. После того, как $w_{n,m}^{j+1}$ найдены при всех $m = 0, 1, ..., M$, $n = 1, 2, ..., N-1$, значения $w_{0,m}^{j+1}$ и $w_{N,m}^{j+1}$ можно найти из граничных условий при $x = 0$ и $x = l_x$.

# 2 Пример реализации схемы «крест» и эволюционно-факторизованной схемы для уравнения колебаний в прямоугольнике

Проиллюстрируем применение схемы «крест» и эволюционно-факторизованной безусловно устойчивой схемы на примере следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\Delta u, \quad x \in (0, 2), \;\; y \in (0, 1), \;\; t \in (0, T], \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=2} = 2ty, \quad u|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = tx, \\ u|_{t=0} = \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\dfrac{\pi y}{2}\right), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = xy. \end{cases} \tag{2.1}$$

Задача (2.1) допускает аналитическое решение. Будем искать ее решение в виде суммы двух функций, одна из которых удовлетворяет неоднородным граничным условиям: $u(x, y, t) = v(x, y, t) + q(x, y, t)$, где

$$q|_{x=0} = 0, \quad q|_{x=2} = 2ty, \quad q|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial q}{\partial y}\right|_{y=1} = tx.$$

Этим условиям удовлетворяет, например, функция $q(x, y, t) = txy$. При этом для функции

$v(x,y,t)$ получаем начально-краевую задачу с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 4\Delta v, \quad x \in (0,2), \;\; y \in (0,1), \;\; t \in (0,T], \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=2} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=1} = 0, \\ v|_{t=0} = \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi y}{2}\right), \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Используя для ее решения метод разделения переменных, находим:

$$v = \cos(\pi\sqrt{2}t)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right).$$

Следовательно, решение задачи (2.1) имеет вид:

$$u = txy + \cos(\pi\sqrt{2}t)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right). \tag{2.2}$$

Для численного решения задачи (2.1) введем равномерную сетку:

$$x_n = nh_x, \;\; n = 0,1,...,N, \;\; h_x = \frac{2}{N},$$

$$y_m = mh_y, \;\; m = 0,1,...,M, \;\; Mh_y = 1 + \frac{h_y}{2} \;\Leftrightarrow\; h_y = \frac{1}{M-1/2},$$

$$t_j = j\tau, \;\; j = 0,1,...,J, \;\; \tau = \frac{T}{J}.$$

Аппроксимируем начальные и граничные условия задачи. Граничные условия:

$$w^j_{0,m} = 0, \quad w^j_{N,m} = 2t_j y_m, \quad j = 0,1,...,J, \;\; m = 0,1,...,M,$$

$$w^j_{n,0} = 0, \quad \frac{w^j_{n,M} - w^j_{n,M-1}}{h_y} = t_j x_n, \quad j = 0,1,...,J, \;\; n = 0,1,...N.$$

За счет выбора сетки по направлению $y$ граничное условие Неймана при $y = 1$ аппроксимируется со вторым порядком погрешности аппроксимации.

Начальные условия:

$$w^0_{n,m} = \sin\left(\frac{\pi x_n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y_m}{2}\right),$$

$$\frac{w^1_{n,m} - w^0_{n,m}}{\tau} = x_n y_m + \frac{\tau}{2}\left.(4\Delta u)\right|_{t=0} = x_n y_m - \tau\pi^2\sin\left(\frac{\pi x_n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y_m}{2}\right),$$

при $n = 0,1,...,N$, $m = 0,1,...,M$.

*Схема «крест».* Для устойчивости схемы «крест» будем задавать $N$ и $M$ произвольно, а число $J$ интервалов по времени подбирать так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{2T}{J}\sqrt{\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}} \leqslant 1.$$

Например, пусть

$$J = 1 + \mathrm{round}\left(2T\sqrt{\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}}\right).$$

Разностная аппроксимация уравнения колебаний в задаче (2.1) имеет вид:

$$\frac{w_{n,m}^{j+1} - 2w_{n,m}^{j} + w_{n,m}^{j-1}}{\tau^2} = 4\left(\frac{w_{n+1,m}^{j} - 2w_{n,m}^{j} + w_{n-1,m}^{j}}{h_x^2} + \frac{w_{n,m+1}^{j} - 2w_{n,m}^{j} + w_{n,m-1}^{j}}{h_y^2}\right), \quad (2.3)$$

где $n = 1, 2, ..., N-1$, $m = 1, 2, ..., M-1$, $j = 1, 2, ..., J-1$. Когда начальные условия заданы, при $j = 1$ в уравнении (2.3) неизвестными являются значения $w_{n,m}^{j+1}$, которые легко могут быть найдены по формуле

$$w_{n,m}^{j+1} = 2w_{n,m}^{j} - w_{n,m}^{j-1} + 4\tau^2\left(\frac{w_{n+1,m}^{j} - 2w_{n,m}^{j} + w_{n-1,m}^{j}}{h_x^2} + \frac{w_{n,m+1}^{j} - 2w_{n,m}^{j} + w_{n,m-1}^{j}}{h_y^2}\right)$$

в цикле при $n = 1, 2, ..., N-1$, $m = 1, 2, ..., M-1$. После этого можно найти значения $w_{0,m}^{j+1}$, $w_{N,m}^{j+1}$, $w_{n,0}^{j+1}$ и $w_{n,M}^{j+1}$, пользуясь граничными условиями:

$$w_{0,m}^{j+1} = 0, \quad w_{N,m}^{j+1} = 2t_{j+1}y_m, \quad m = 0, 1, ..., M,$$

$$w_{n,0}^{j+1} = 0, \quad w_{n,M}^{j+1} = w_{n,M-1}^{j+1} + h_y t_{j+1} x_n, \quad n = 1, ...N-1.$$

Когда переход на слой $j = 2$ завершен, аналогично можно найти значения $w_{n,m}^{j+1}$ на всех оставшихся временных слоях.

Результаты расчетов по схеме «крест» для нескольких моментов времени в случае, когда $T = 1$, $N = 100$ и $M = 50$, приведены на рис. 2 - 4.

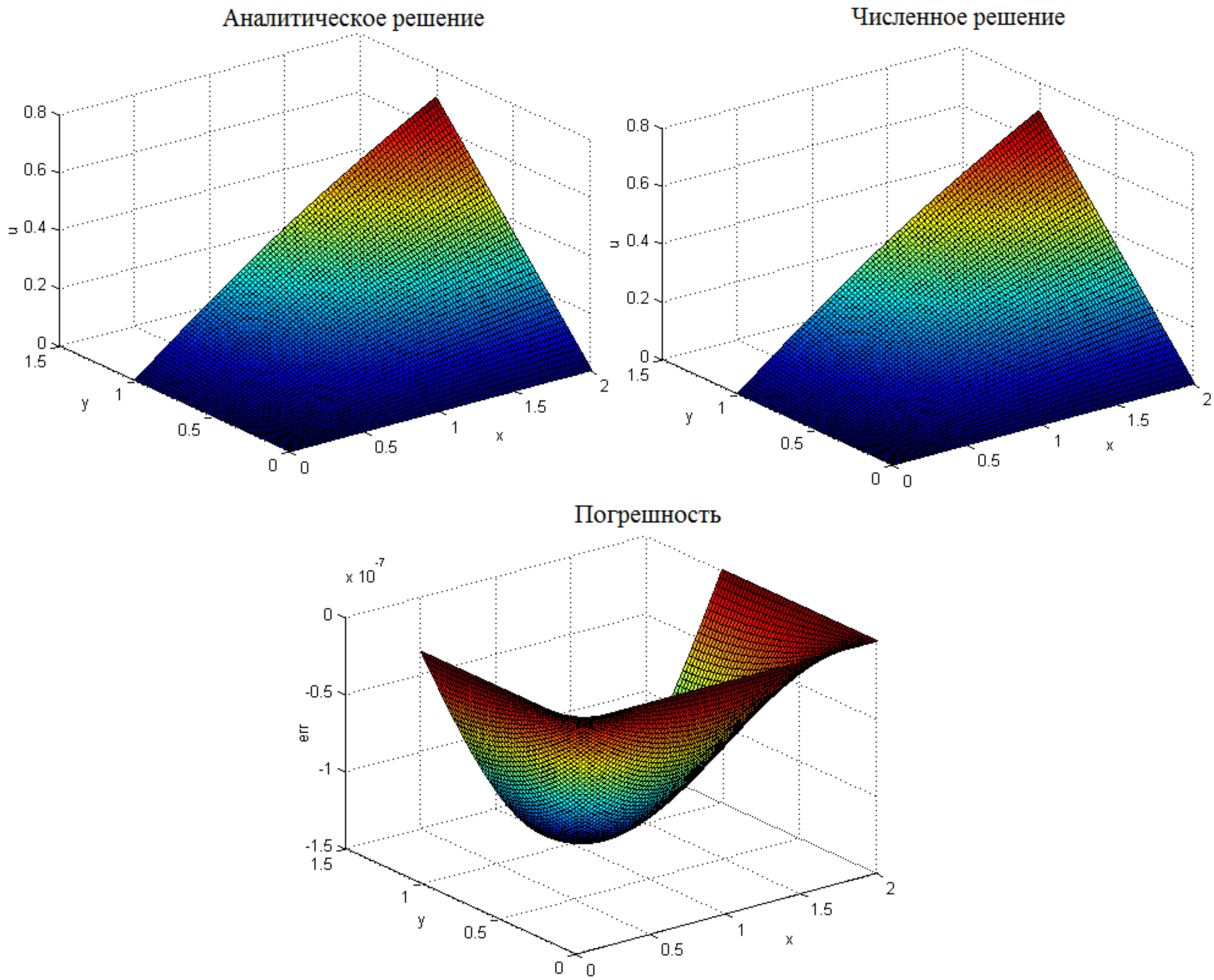


Рис. 2: График аналитического решения задачи (2.1), ее численного решения по схеме «крест», а также погрешности в момент времени $t = 0.3451$ (соответствует $j = 50$)

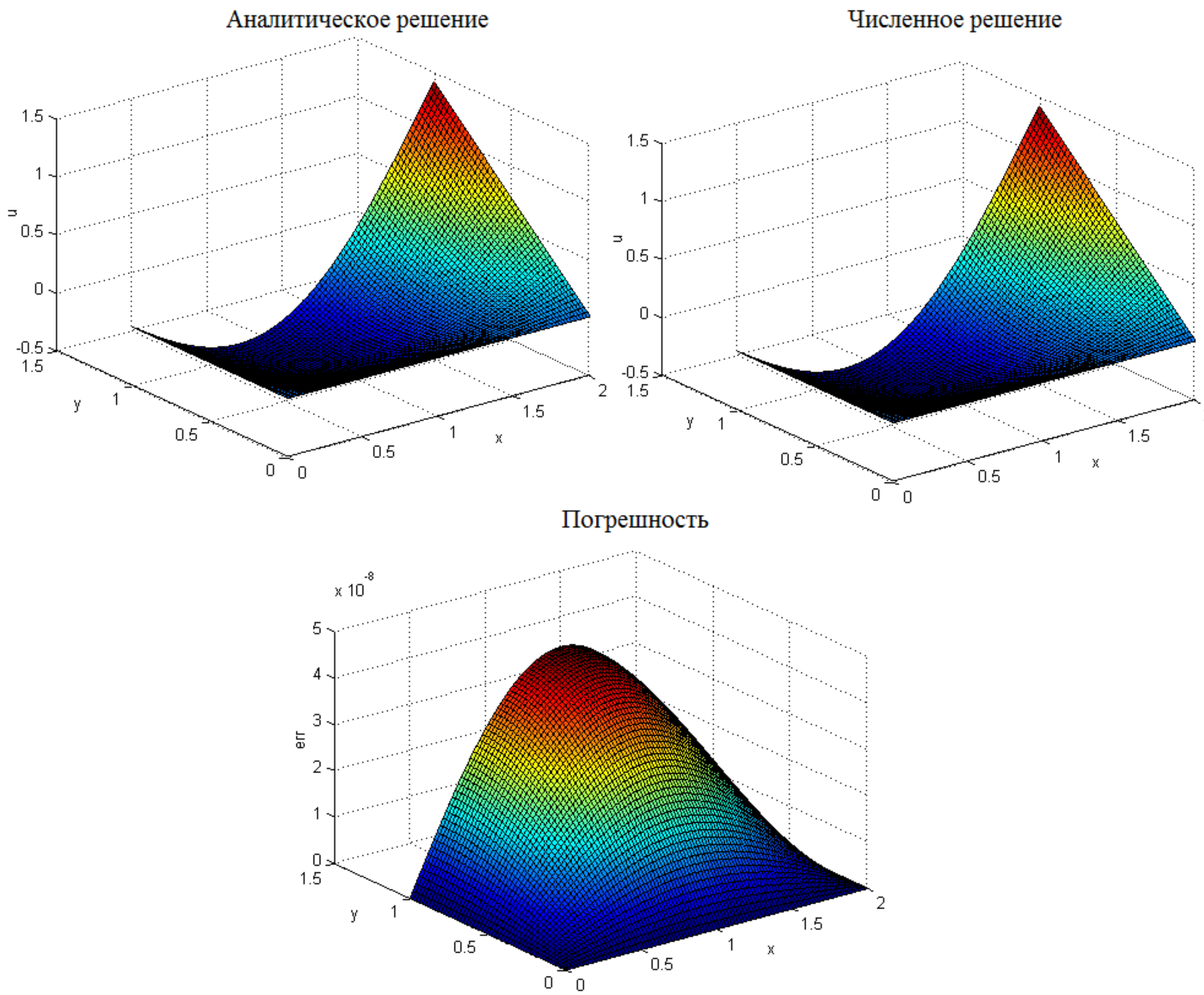


Рис. 3: График аналитического решения задачи (2.1), ее численного решения по схеме «крест», а также погрешности в момент времени $t = 0.6972$ (соответствует $j = 100$)

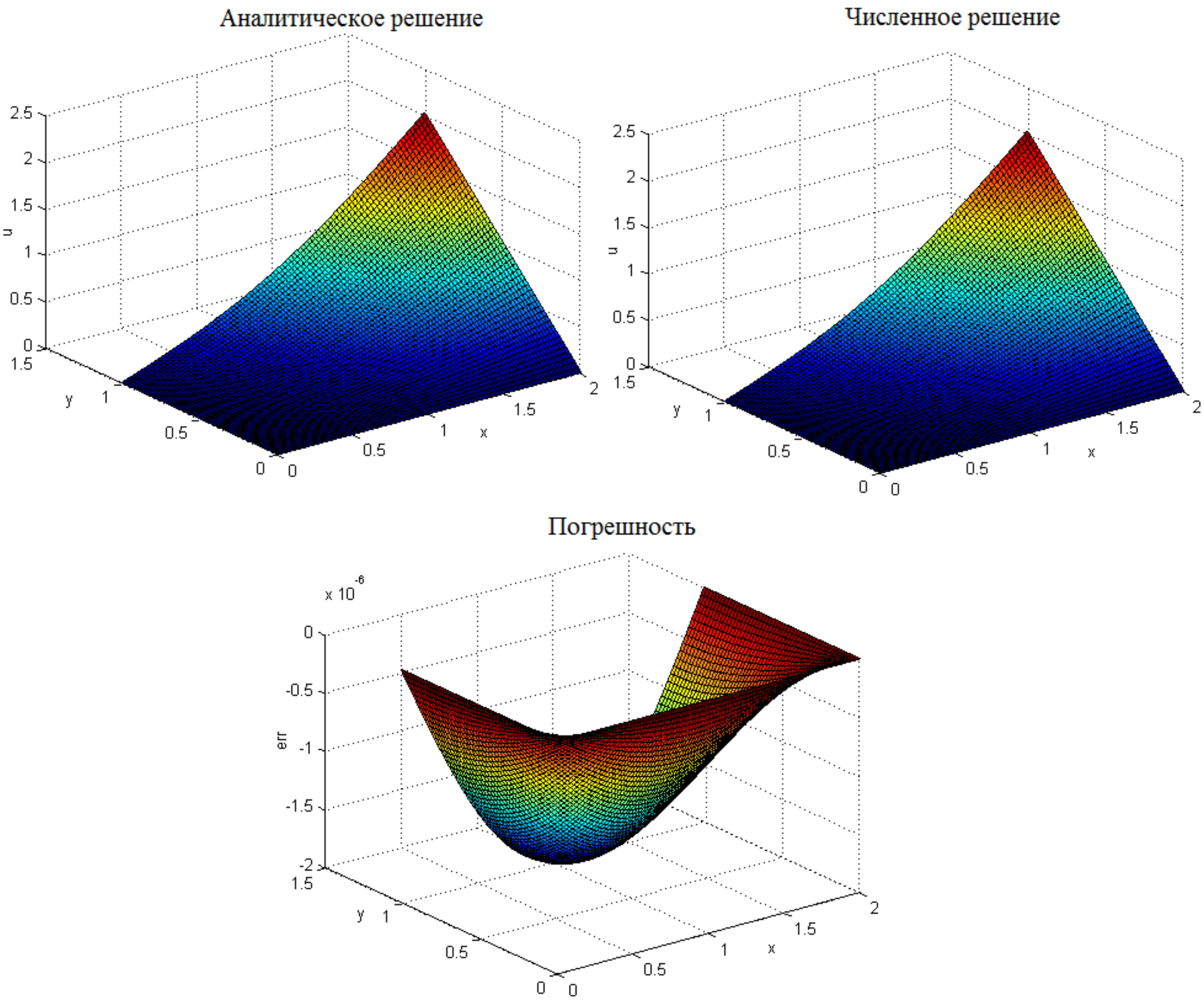


Рис. 4: График аналитического решения задачи (2.1), ее численного решения по схеме «крест», а также погрешности в момент времени $t = 1$ (соответствует $j = J = 143$)

*Эволюционно-факторизованная схема.* При использовании эволюционно- факторизованной схемы переход со слоя $j$ на слой $j+1$ осуществляется в два этапа с использованием вспомогательной функции $w_{n,m}^{(1)}$. Прежде всего, получим для этой функции граничные условия, пользуясь тем, что в рассматриваемой задаче

$$u|_{x=0} = \mu_1(y,t), \quad u|_{x=2} = \mu_2(y,t),$$

где $\mu_1(y,t) = 0$, $\mu_2(y,t) = 2ty$. Следовательно, в нашем случае

$$\overline{\mu}_{1,m} = (E - 4\sigma\tau^2\Lambda_2)\mu_{1,\bar{t}t} = 0, \quad \overline{\mu}_{2,m} = (E - 4\sigma\tau^2\Lambda_2)\mu_{2,\bar{t}t} = 0,$$

так как $\mu_1 = 0$ и $\mu_{2,\bar{t}t} = 2y_m\dfrac{(j+1)\tau - 2j\tau + (j-1)\tau}{\tau^2} = 0.$

Для функции $w^{(1)}_{n,m}$ при каждом фиксированном $m = 1, 2, ..., M-1$ получаем систему:

$$\begin{cases} w^{(1)}_{0,m} = 0, \\ \dfrac{4\sigma\tau^2}{h_x^2} w^{(1)}_{n-1,m} - \left(1 + \dfrac{8\sigma\tau^2}{h_x^2}\right) w^{(1)}_{n,m} + \dfrac{4\sigma\tau^2}{h_x^2} w^{(1)}_{n+1,m} = -4 \left( \dfrac{w^j_{n-1,m} - 2w^j_{n,m} + w^j_{n+1,m}}{h_x^2} + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{w^j_{n,m-1} - 2w^j_{n,m} + w^j_{n,m+1}}{h_y^2} \right), \quad n = 1, 2, ..., N-1, \\ w^{(1)}_{N,m} = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Решая систему (2.4) прогонкой в цикле по $m$, находим $w^{(1)}_{n,m}$ при всех $n = 0, 1, ..., N$, $m = 1, 2, ..., M-1$.

Переход на слой $j+1$ осуществим, пользуясь уравнением $(E - 4\sigma\tau^2\Lambda_2) w_{\bar{t}t} = w^{(1)}$ и граничными условиями для функции $w^{j+1}_{n,m}$ при $m = 0$ и $m = M$. В результате при каждом фиксированном $n = 1, 2, ..., N-1$ получаем систему с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} w^{j+1}_{n,0} = 0, \\ \dfrac{4\sigma\tau^2}{h_y^2} w^{j+1}_{n,m-1} - \left(1 + \dfrac{8\sigma\tau^2}{h_y^2}\right) w^{j+1}_{n,m} + \dfrac{4\sigma\tau^2}{h_y^2} w^{j+1}_{n,m+1} = - \left( \tau^2 w^{(1)}_{n,m} + \right. \\ \qquad + \dfrac{4\sigma\tau^2}{h_y^2} \left( w^{j-1}_{n,m-1} - 2w^j_{n,m-1} \right) - \left(1 + \dfrac{8\sigma\tau^2}{h_y^2}\right) \left( w^{j-1}_{n,m} - 2w^j_{n,m} \right) + \\ \qquad \left. + \dfrac{4\sigma\tau^2}{h_y^2} \left( w^{j-1}_{n,m+1} - 2w^j_{n,m+1} \right) \right), \quad m = 1, 2, ..., M-1, \\ w^{j+1}_{n,M} = w^{j+1}_{n,M-1} + h_y t_{j+1} x_n. \end{cases} \tag{2.5}$$

Решая систему (2.5) методом прогонки в цикле по $n$, находим значения $w^{j+1}_{n,m}$ при всех $n = 1, 2, ..., N-1$ и $m = 0, 1, ..., M$. При $n = 0$ и $n = N$ значения функции $w^{j+1}_{n,m}$ получаем из граничных условий:

$$w^{j+1}_{0,m} = 0, \quad w^{j+1}_{N,m} = 2t_{j+1} y_m, \quad m = 0, 1, ..., M.$$

Результаты численного решения задачи с помощью эволюционно-факторизованной схемы для тех же параметров сетки, что и в случае схемы «крест», представлены на рис. 5 - 7.

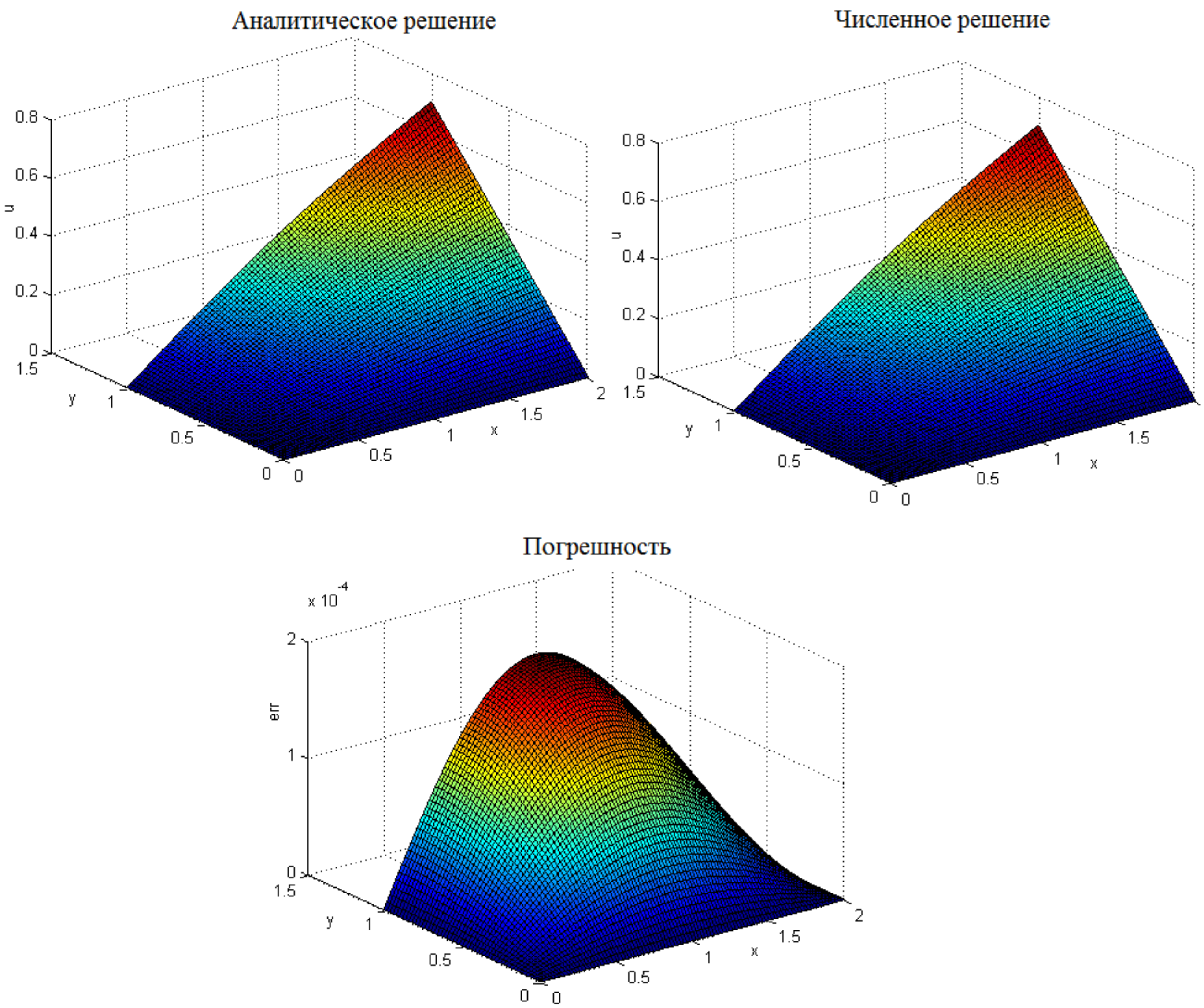


Рис. 5: График аналитического решения задачи (2.1), ее численного решения с помощью эволюционно-факторизованной схемы, а также погрешности в момент времени $t = 0.3451$ (соответствует $j = 50$)

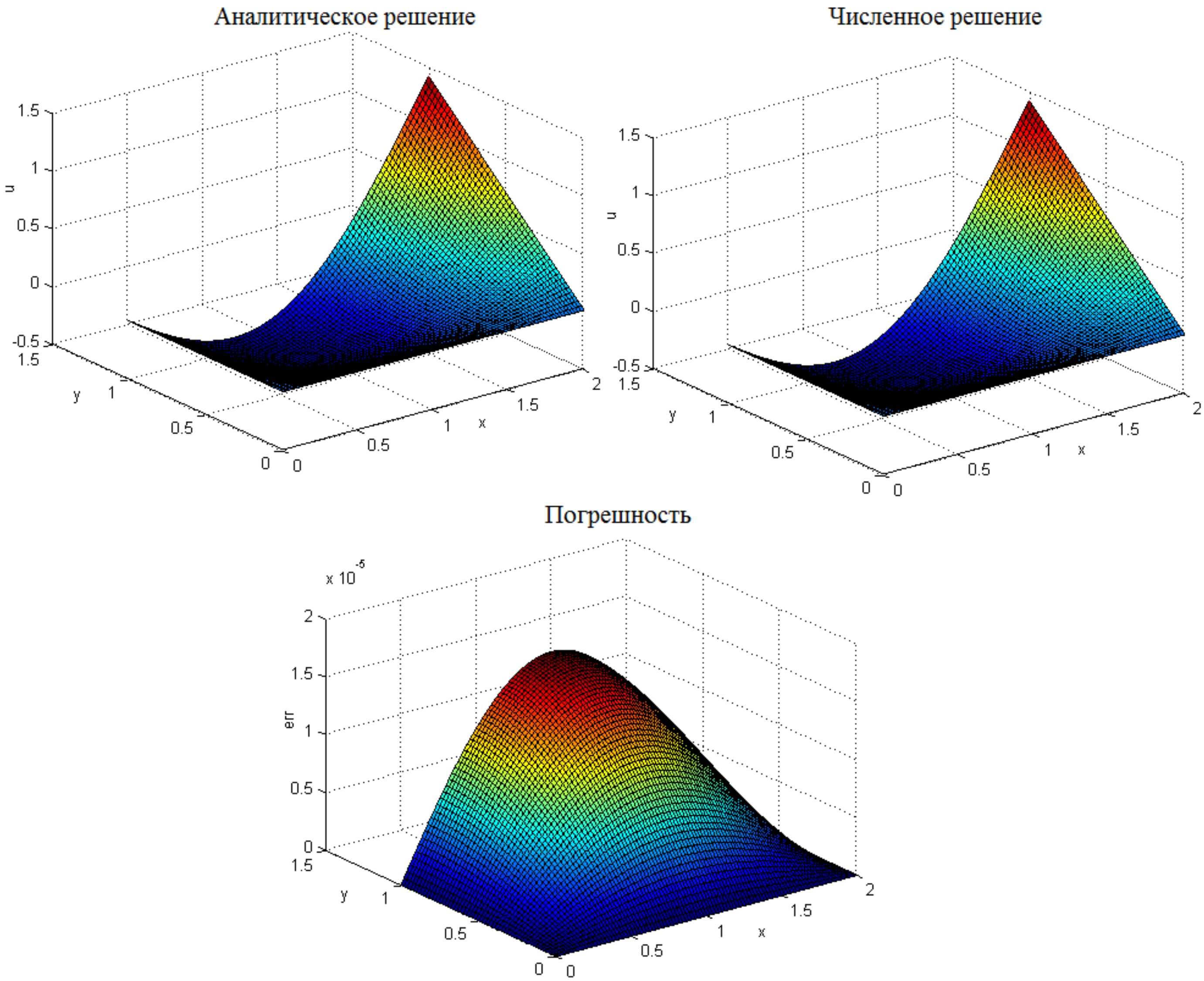


Рис. 6: График аналитического решения задачи (2.1), ее численного решения с помощью эволюционно-факторизованной схемы, а также погрешности в момент времени $t = 0.6972$ (соответствует $j = 100$)

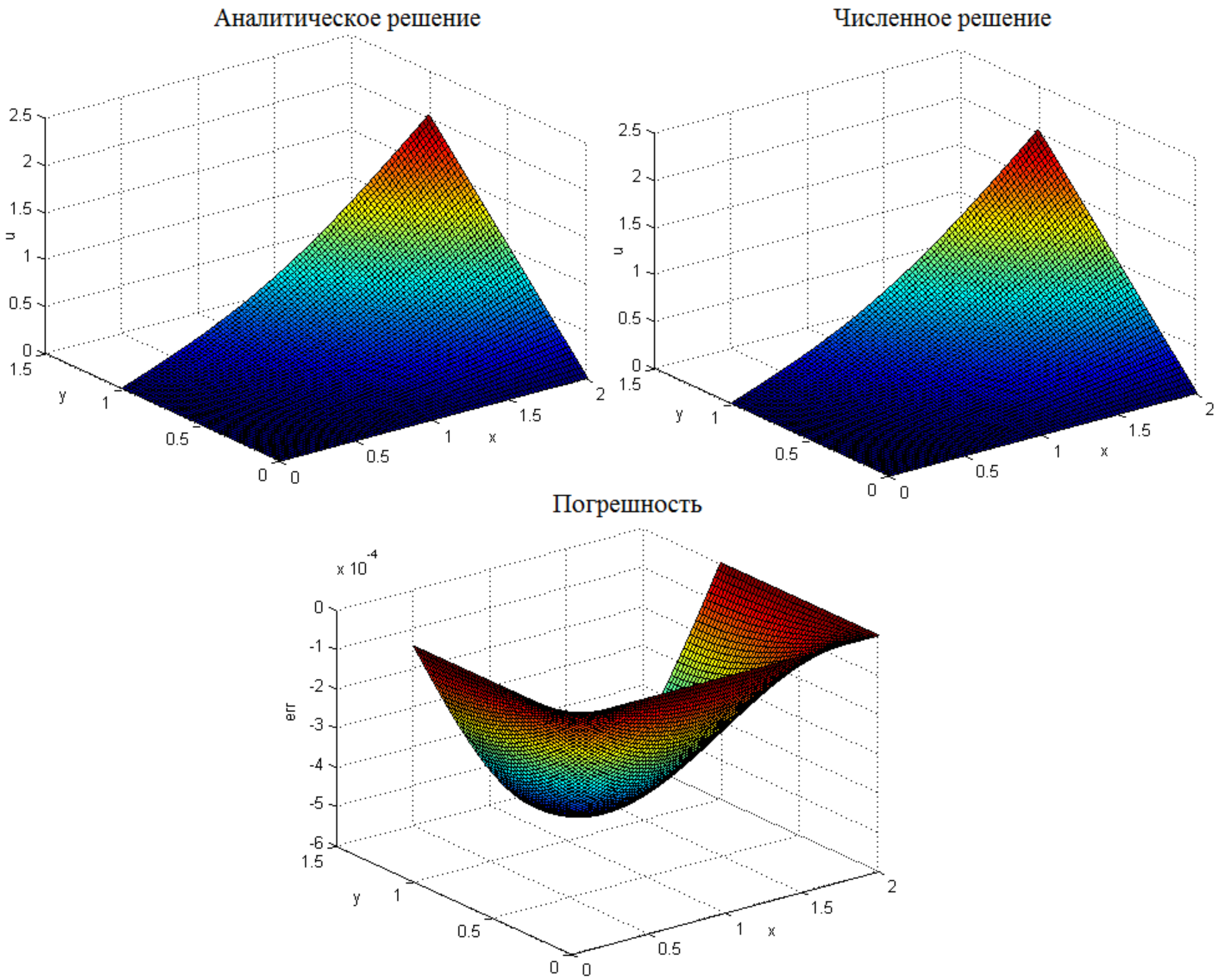


Рис. 7: График аналитического решения задачи (2.1), ее численного решения с помощью эволюционно-факторизованной схемы, а также погрешности в момент времени $t = 1$ (соответствует $j = J = 143$)

# 3 Задания для самостоятельного решения

Решите начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + 2(x+y), \quad x \in (0,1),\ y \in (0,1),\ t \in (0,1], \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t^2(1+y), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = t^2, \quad u|_{y=1} = t^2(x+1), \\ u|_{t=0} = 5\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3\pi y}{2}\right), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

аналитически и численно с помощью схемы крест и эволюционно-факторизованной схемы. Сравните результаты.