

Понятие разностной схемы. Аппроксимация. Устойчивость. Сходимость.

Большое количество задач физики и техники приводит к краевым либо начально-краевым задачам для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. При этом число задач, имеющих аналитическое решение, ограничено. Это задачи в канонических областях, таких как, например, прямоугольник, круг или шар, и как правило, для уравнений с постоянными коэффициентами. На практике часто приходится решать задачи в весьма сложных областях и для уравнений с переменными коэффициентами, зачастую нелинейных. Это приводит к необходимости искать приближенные решения, пользуясь для этого различными численными методами. Достаточно эффективным методом численного решения задач математической физики является метод конечных разностей или метод сеток, позволяющий сводить приближенное решение уравнений в частных производных к решению систем алгебраических уравнений. Системы алгебраических уравнений при этом формулируются для приближенных значений решения в некотором наборе точек в расчетной области.

Одним из основоположников метода конечных разностей в нашей стране был А.А. Самарский, долгие годы читавший лекции по численным методам в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова для студентов физического и механико-математического факультетов. На основе этих лекций им были написаны такие книги, как «Введение в теорию разностных схем» (1971 г.) и «Теория разностных схем» (1977 г.), содержащие результаты многолетних исследований.

1 Сеточные функции и разностные операторы

Рассмотрим задачу (краевую или начально-краевую):

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x = (x_1, \dots, x_n) \in G, \\ lu(x) = \mu(x), & x \in \Gamma; \quad \bar{G} = G + \Gamma, \end{cases} \quad (1.1)$$

где L — дифференциальный оператор, l — оператор (также в общем случае дифференциальный) всех дополнительных условий (граничных и начальных). Пусть решение задачи ищется в некотором функциональном пространстве H_0 .

Рассмотрим метод конечных разностей приближенного решения задачи (1.1). Как было сказано выше, численное решение при этом ищется не для всех значений аргумента $x \in \overline{G}$, а на некотором множестве точек, называемом *сеткой*. Сами точки, в которых ищется решение, называются *узлами сетки*.

Сетку в области \overline{G} будем обозначать $\overline{\omega}_h$. Множество всех узлов сетки, лежащих строго внутри G , будем обозначать ω_h и называть внутренними узлами, а множество узлов, попадающих на границу Γ , будем обозначать γ_h и называть граничными узлами.

Сетка $\overline{\omega}_h$ характеризуется некоторым параметром h . В одномерном случае это либо расстояние между двумя соседними узлами сетки, если это расстояние не зависит от номера узла, либо совокупность всех расстояний между соседними узлами, если эти расстояния различны. Расстояние между соседними узлами называется шагом сетки. Если шаг сетки не зависит от номера узла, ее называют равномерной. В простейшем случае равномерной одномерной сетки параметр h представляет собой шаг сетки. (см. рис.1).

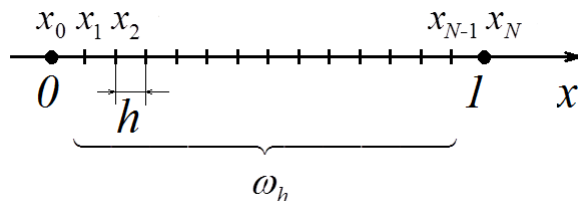


Рис. 1: Равномерная сетка на отрезке

Равномерная сетка на отрезке $x \in [0, 1]$ с шагом h имеет вид:

$$\overline{\omega}_h = \{x_k = h \cdot k, k = 0, 1, \dots, N, h \cdot N = 1\}.$$

Неравномерная сетка на отрезке $x \in [0, 1]$:

$$\overline{\omega}_h = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_{N-1} < x_N = 1, k = 0, 1, \dots, N\}.$$

В более общем многомерном случае параметр $h = \{h_1, \dots, h_n\}$ — вектор, координаты которого представляют собой расстояния между узлами (шаги сетки) по какому-либо координатному направлению, причем $|h| = (h_1^2 + \dots + h_n^2)^{1/2}$.

Функции, заданные на сетке, называют *сеточными* функциями:

$$y_h = y_h(x_k), \quad x_k \in \overline{\omega}_h.$$

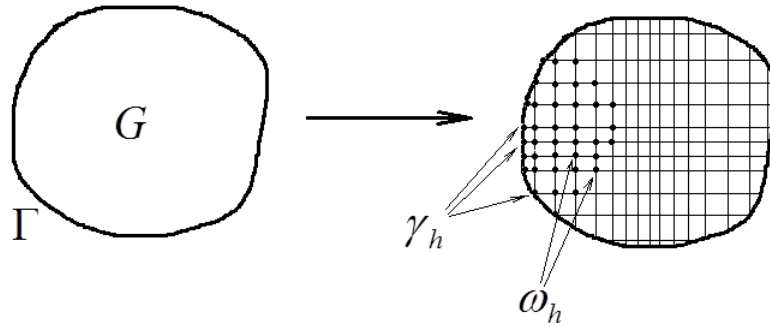


Рис. 2: Пример неравномерной двумерной сетки

Если мы перейдем от исходной задачи (1.1) для функции $u(x) \in H_0$ к задаче для сеточной функции y_h , принадлежащей некоторому функциональному пространству H_h , то необходимо иметь возможность оценивать близость функций $u(x)$ и y_h . Для этого можно использовать два подхода:

- 1) доопределение сеточной функции в точках, где она не задана, то есть $y_h \Rightarrow \tilde{y}(x, h) \in H_0$;
- 2) проектирование функции $u(x) \in H_0$ на сетку: $u_h = \mathcal{P}_h u \in H_h$, где \mathcal{P} — оператор, действующий из H_0 в H_h .

Как правило, на практике используется второй подход. В простейшем случае можно взять $u_h = \mathcal{P}_h u = u(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$. Иногда для того, чтобы получить значения u_h в узлах сетки, используется усреднение по окрестности узла, например:

$$u_h(x) = \mathcal{P}_h u = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x + s \cdot h) ds.$$

Близость функций u_h и y_h будем оценивать по норме $\|\cdot\|_h$ пространства H_h , называемой сеточной нормой. При этом норму в пространстве H_h естественно вводить таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\cdot\|_h = \|\cdot\|_0, \quad (1.2)$$

где $\|\cdot\|_0$ — норма в пространстве H_0 , в котором ищется решение исходной задачи (1.1). Условие (1.2) называется *условием согласования норм* в H_h и H_0 .

Примеры сеточных норм.

- 1) Сеточный аналог равномерной нормы

$$\|y\|_C = \max_{x \in \bar{G}} |y(x)|,$$

где \bar{G} — замкнутая ограниченная область, имеет вид:

$$\|y_h\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y_h(x)|,$$

где $\overline{\omega}_h$ — сетка, введенная в области \overline{G} .

2) Сеточные аналоги нормы

$$\|y\|_{L_2} = \left(\int_0^1 y^2(x) dx \right)^{1/2}$$

в пространстве L_2 на отрезке $[0, 1]$ в случае равномерной сетки с шагом h , содержащей $N + 1$ узлов $x_k = h \cdot k$, $k = 0, 1, \dots, N$, определяются с помощью интегральных сумм и имеют вид:

$$\|y_h\| = \left(\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 h \right)^{1/2}, \quad \|y_h\| = \left(\sum_{k=1}^N y_k^2 h \right)^{1/2}, \quad \|y_h\| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} y_k^2 h \right)^{1/2}.$$

Построим *разностную аппроксимацию* операторов L и l в задаче (1.1), заменяя все производные в выражениях Lu и lu разностными отношениями. В результате получим выражения $L_h u_h$ и $l_h u_h$, представляющие собой линейные комбинации значений сеточной функции u_h на некотором множестве узлов сетки.

Определение 1.1 *Множество узлов сетки $\overline{\omega}_h$, на котором строится разностный оператор, называется его шаблоном.*

Будем обозначать шаблон оператора в точке $x \in \overline{\omega}_h$ как $\Pi(x, h)$. Линейный разностный оператор L_h можно записать следующим образом:

$$L_h u_h(x) = \sum_{\xi \in \Pi(x, h)} A_h(x, \xi) u_h(\xi), \quad (1.3)$$

где $u_h(\xi)$ — значение функции u_h в узле ξ шаблона, выражения $A_h(x, \xi)$ — коэффициенты в линейной комбинации.

Определение 1.2 *Величина $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ называется погрешностью разностной аппроксимации Lu в точке x .*

Пусть V — класс достаточно гладких функций, заданных в окрестности точки x , содержащей при $|h| < h_0$ шаблон $\Pi(x, h)$ разностного оператора L_h . Будем считать, что функции $u \in V$ имеют столько непрерывных производных, сколько требуется для построения соответствующей погрешности аппроксимации. Говорят, что разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L с порядком $m > 0$ в точке x , если для погрешности аппроксимации имеет место равенство:

$$\psi(x) = O(|h|^m)$$

при любой функции $u(x) \in V$.

Замечание 1.3 Напомним, что подразумевается под символом « O большое». Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, а B — семейство всех интервалов пространства \mathbb{R} , которые либо все содержат точку x_0 как внутреннюю, либо для всех этих интервалов точка x_0 является только левым или только правым концом. Пусть F — семейство числовых функций f , таких что для любой из них существует интервал $X \subset B$, такой что f определена на X за исключением, быть может, самой точки x_0 . Если для функций $f, g \in F$, таких что $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, где $X, Y \subset B$, существует интервал $Z \subset X \cap Y$ и такое число $A > 0$, что для $\forall x \in Z$, кроме, быть может, самой точки x_0 , выполняется неравенство:

$$|g(x)| \leq A|f(x)|,$$

то f и g называют функциями одного порядка при $x \rightarrow x_0$. Для функций одного порядка при $x \rightarrow x_0$ используют обозначение $g = O(f)$. [И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач «Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл» Том 1, 2001 г.]

Перейдем к построению так называемой *разностной схемы* для задачи (1.1). Для этого заменим операторы L и l их разностными аналогами, а также аппроксимируем на сетке правые части уравнения и дополнительных условий. Пусть сеточные функции φ_h и χ_h аппроксимируют на сетке функции $f(x)$ и $\mu(x)$ в правых частях уравнения и дополнительных условий задачи (1.1) соответственно. Тогда можно составить систему алгебраических уравнений для сеточной функции y_h :

$$\begin{cases} L_h y_h = \varphi_h(x), & x \in \omega_h, \\ l_h y_h(x) = \chi_h(x), & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (1.4)$$

Определение 1.4 Семейство уравнений (1.4) относительно значений функции y_h в узлах сетки, зависящее от параметра h , называется *разностной схемой* для задачи (1.1).

Предположим, что решение разностной схемы (1.4) найдено. Возникает вопрос: с какой точностью в зависимости от h сеточная функция y_h приближает решение $u(x)$ исходной задачи (1.1)? Строго дать ответ на этот вопрос можно в случае, когда система (1.4) линейная. Для исследования нелинейных схем сначала производят их линеаризацию. Поэтому далее будем рассматривать случай, когда L_h и l_h — линейные операторы. Введем *погрешность* схемы $z_h = y_h - u_h$. Тогда

$$\begin{cases} L_h z_h = \varphi_h - L_h u_h = (\varphi_h - f) - (L_h u_h - (Lu)_h) = \psi_h, & x \in \omega_h, \\ l_h z_h = \chi_h - l_h u_h = (\chi_h - \mu) - (l_h u_h - (lu)_h) = \nu_h, & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (1.5)$$

Как видно из полученных уравнений, погрешность ψ_h аппроксимации уравнения $Lu = f$ складывается из погрешности аппроксимации Lu разностным выражением $L_h u_h$ и погрешности аппроксимации правой части f сеточной функцией φ_h , а погрешность ν_h аппроксимации дополнительных условий складывается из погрешности аппроксимации lu выражением $l_h u_h$ и погрешности аппроксимации функции μ функцией χ_h .

Определение 1.5 *Говорят, что разностная схема (1.4)*

1а) *аппроксимирует задачу (1.1), если $\|\psi_h\|_{(h2)} \rightarrow 0$ и $\|\nu_h\|_{(h3)} \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$;*

1б) *имеет m -й порядок аппроксимации, если*

$$\|\psi_h\|_{(h2)} = O(|h|^m), \quad \|\nu_h\|_{(h3)} = O(|h|^m);$$

2а) *сходится, если $\|y_h - u_h\|_{(h1)} \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$;*

2б) *имеет m -й порядок точности, если $\|y_h - u_h\|_{(h1)} = O(|h|^m)$.*

Нормы $\|\cdot\|_{(h1)}$, $\|\cdot\|_{(h2)}$ и $\|\cdot\|_{(h3)}$ вводятся в пространствах сеточных функций, заданных на $\overline{\omega_h}$, ω_h и γ_h соответственно.

Определение 1.6 *Разностная задача (1.4) называется поставленной корректно, если при всех достаточно малых $|h| \leq h_0$:*

1) *она однозначно разрешима для любых входных данных φ_h и χ_h ;*

2) *решения y_h непрерывно зависят от входных данных φ_h и χ_h равномерно по h .*

Свойство равномерной по h непрерывной зависимости решения y_h от φ_h и χ_h называется *устойчивостью схемы* (1.4). Это означает, что при всех достаточно малых $|h| \leq h_0$ найдутся такие числа $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, не зависящие ни от h , ни от входных данных, что

$$\|y_h\|_{(h1)} \leq M_1 \|\varphi_h\|_{(h2)} + M_2 \|\chi_h\|_{(h3)}. \quad (1.6)$$

Если операторы L_h и l_h линейны, то погрешность схемы удовлетворяет системе (1.5), которая отличается от (1.4) лишь правой частью. Следовательно, если схема (1.4) устойчива, то имеет место неравенство:

$$\|z_h\|_{(h1)} = \|y_h - u_h\|_{(h1)} \leq M_1 \|\psi_h\|_{(h2)} + M_2 \|\nu_h\|_{(h3)}.$$

Если схема (1.4) имеет порядок погрешности аппроксимации, равный m , то $\|\psi_h\|_{(h2)} = O(|h|^m)$ и $\|\nu_h\|_{(h3)} = O(|h|^m)$, то есть

$$\|z_h\|_{(h1)} = O(|h|^m).$$

Таким образом, если *линейная* схема (1.4) устойчива и аппроксимирует исходную задачу (1.1), то она сходится. При этом порядок точности схемы определяется ее порядком аппроксимации.

2 Аппроксимация дифференциальных операторов и уравнений

2.1 Разностная аппроксимация первой производной

В качестве первого примера рассмотрим дифференциальный оператор $Lu = \frac{du}{dx}$ и построим его разностную аппроксимацию на равномерной сетке $\bar{\omega}_h$ с шагом h . В произвольной внутренней точке $x \in \omega_h$ разностные операторы, аппроксимирующие L , можно построить следующими способами:

$$L_h^+ u = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}; \quad L_h^- u = \frac{u(x) - u(x-h)}{h};$$

$$L_h^{0.5} u = 0.5(L_h^+ u + L_h^- u) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}.$$

Оператор L_h^+ называют правой односторонней производной, L_h^- — левой односторонней производной, и $L_h^{0.5}$ — центральной производной. Они используются для построения разностных аппроксимаций дифференциальных операторов более высокого порядка. В дальнейшем изложении будем использовать для этих фундаментальных разностных операторов следующие более краткие обозначения:

$$u_x = L_h^+ u, \quad u_{\bar{x}} = L_h^- u, \quad u_{\dot{x}} = L_h^{0.5} u.$$

Оценим погрешность аппроксимации оператора $Lu = \frac{du}{dx}$ приведенными выше разностными операторами. Пусть $u(x)$ — достаточно гладкая функция. Тогда при малом h имеют место равенства:

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3),$$

из которых получаем

$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2) \Rightarrow \psi(x) = u_x - u'(x) = O(h);$$

$$u_{\bar{x}} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x) - \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2) \Rightarrow \psi(x) = u_{\bar{x}} - u'(x) = O(h);$$

$$u_{\dot{x}} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + O(h^2) \Rightarrow \psi(x) = u_{\dot{x}} - u'(x) = O(h^2).$$

Таким образом, односторонние разностные производные u_x и $u_{\bar{x}}$ аппроксимируют первую производную в точке x с первым порядком, а симметричная разностная производная $u_{\dot{x}}$ — со вторым.

Пример 2.1. Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана равномерная сетка

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = 1.$$

Определите, аппроксимирует ли разностное отношение $L_h u$ выражение Lu в указанной точке:

$$а) L_h u = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}, \quad Lu = \frac{du}{dx} \text{ в точке } x = x_i + \frac{h}{2};$$

$$б) L_h u = \frac{2u(x_{i+1}) - u(x_i) - u(x_{i-1}))}{3h}, \quad Lu = \frac{du}{dx} \text{ в точке } x = x_i;$$

$$в) L_h u = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{h}, \quad Lu = \frac{du}{dx} \text{ в точке } x = x_{i+1}.$$

РЕШЕНИЕ. Пусть $u(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция (по крайней мере трижды непрерывно дифференцируемая). Тогда при малом h имеют место равенства:

Случай а)

$$\begin{aligned} L_h u|_{x=x_i+0.5h} &= \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} = \frac{u(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - u(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h} = \\ &= \frac{u(x) + \frac{h}{2}u'(x) + \frac{h^2}{8}u''(x) + \frac{h^3}{48}u'''(x + \theta_1 \frac{h}{2}) - u(x) + \frac{h}{2}u'(x) - \frac{h^2}{8}u''(x) + \frac{h^3}{48}u'''(x + \theta_2 \frac{h}{2})}{h} = \\ &= u'(x) + O(h^2) = Lu + O(h^2), \quad \theta_1, \theta_2 \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Следовательно, погрешность аппроксимации имеет вид:

$$\psi(x) = (L_h u - Lu)|_{x=x_i+0.5h} = O(h^2),$$

то есть разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L в точке $x = x_i + \frac{h}{2}$ со вторым порядком.

Случай б)

$$\begin{aligned} L_h u &= \frac{2u(x_i + h) - u(x_i) - u(x_i - h))}{3h} = \frac{1}{3h} \left\{ 2 \left[u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i + \theta_1 h) \right] - \right. \\ &\quad \left. - u(x_i) - \left[u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i + \theta_2 h) \right] \right\} = u'(x_i) + \frac{h}{6}u''(x_i) + O(h^2) = \\ &= Lu + O(h), \quad \theta_1, \theta_2 \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Следовательно, погрешность аппроксимации имеет вид:

$$\psi(x) = (L_h u - Lu)|_{x=x_i} = O(h),$$

то есть разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L в точке $x = x_i$ с первым порядком.

Случай в)

$$\begin{aligned} L_h u|_{x=x_{i+1}} &= \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i+1} - 2h)}{h} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i+1}) + 2hu'(x_{i+1}) + O(h^2)}{h} = \\ &= 2u'(x_{i+1}) + O(h). \end{aligned}$$

Следовательно, погрешность аппроксимации имеет вид:

$$\psi(x) = (L_h u - Lu)|_{x=x_{i+1}} = u'(x_{i+1}) + O(h) = O(1),$$

то есть разностный оператор L_h не аппроксимирует дифференциальный оператор L в точке $x = x_{i+1}$. ■

Пример 2.2. Пусть в прямоугольнике $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$ задана равномерная сетка

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = 1; \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad M\tau = 1.$$

Определите погрешность аппроксимации уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = u$$

разностной схемой

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h} = y_i^j$$

в точке (x_i, t_j) , где использованы обозначения $y_i^j = y(x_i, t_j)$.

РЕШЕНИЕ. Дифференциальное уравнение можно переписать в виде $Lu = 0$, где

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - u,$$

а соответствующее разностное уравнение — в виде $L_{h\tau} y = 0$, где

$$L_{h\tau} y = \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h} - y_i^j.$$

Пусть $z_i^j = y_i^j - u_i^j$. По определению, погрешность аппроксимации разностной схемы $L_{h\tau} y = 0$ в точке (x_i, t_j) имеет вид:

$$\psi(x_i, t_j) = L_{h\tau} z|_{(x_i, t_j)} = \underbrace{L_{h\tau} y|_{(x_i, t_j)}}_{=0} - L_{h\tau} u|_{(x_i, t_j)} = -L_{h\tau} u|_{(x_i, t_j)} + Lu|_{(x_i, t_j)} - \underbrace{Lu|_{(x_i, t_j)}}_{=0} =$$

$$= (Lu - L_{h\tau}u)|_{(x_i, t_j)}.$$

Если $u(x, t)$ является достаточно гладкой функцией, то при малых τ и h имеют место равенства:

$$\begin{aligned} L_{h\tau}u|_{(x_i, t_j)} &= \frac{u(x_i, t_j + \tau) - u(x_i, t_j)}{\tau} + \frac{u(x_i + h, t_j) - u(x_i - h, t_j)}{2h} - u(x_i, t_j) = \\ &= \frac{u_i^j + \tau \frac{\partial u}{\partial t}|_{(x_i, t_j)} + O(\tau^2) - u_i^j}{\tau} + \\ &+ \frac{u_i^j + h \frac{\partial u}{\partial x}|_{(x_i, t_j)} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_i, t_j)} - u_i^j + h \frac{\partial u}{\partial x}|_{(x_i, t_j)} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_i, t_j)} + O(h^3)}{2h} - u_i^j = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - u \right) \Big|_{(x_i, t_j)} + O(\tau) + O(h^2) = \underbrace{Lu|_{(x_i, t_j)}}_{=0} + O(\tau + h^2). \end{aligned}$$

Следовательно, погрешность аппроксимации разностной схемы в точке (x_i, t_j) равна

$$\psi(x_i, t_j) = O(\tau + h^2),$$

то есть разностная схема аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение с первым порядком по τ и вторым по h . ■

Иногда бывает удобно использовать несимметричную первую разностную производную, аппроксимирующую $u'(x)$ со вторым порядком:

$$\begin{aligned} L_h^{\sigma,+}u &= \sigma \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + (1-\sigma) \frac{u(x+2h) - u(x+h)}{h} = \\ &= \frac{\sigma}{h} \left(u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3) - u(x) \right) + \\ &+ \frac{1-\sigma}{h} \left(u(x) + 2hu'(x) + 2h^2u''(x) - u(x) - hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3) \right) = \\ &= u'(x) + \frac{h}{2}(3-2\sigma)u''(x) + O(h^2). \end{aligned}$$

Выбирая $\sigma = 3/2$, получаем

$$L_h^{3/2,+}u(x) = \frac{4u(x+h) - 3u(x) - u(x+2h)}{2h}, \quad \psi(x) = L_h^{3/2,+}u(x) - u'(x) = O(h^2).$$

Аналогично можно получить

$$L_h^{3/2,-}u(x) = \frac{3u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)}{2h}, \quad \psi(x) = L_h^{3/2,-}u(x) - u'(x) = O(h^2).$$

2.2 Разностная аппроксимация второй производной

Рассмотрим теперь разностную аппроксимацию второй производной $Lu = \frac{d^2u}{dx^2}$ на равномерной сетке с шагом h . Для произвольной достаточно гладкой в окрестности точки x функции $u(x)$ при достаточно малом h справедливы равенства:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + 0.5h^2u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + O(h^4),$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + 0.5h^2u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + O(h^4),$$

Сложив эти равенства и разделив результат на h^2 , получим:

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + O(h^2).$$

Следовательно, разностный оператор

$$L_h u = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

аппроксимирует u'' в точке x со вторым порядком.

Оператор $L_h u$ можно переписать следующим образом:

$$L_h u = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = \frac{u_x(x) - u_{\bar{x}}(x)}{h} = u_{\bar{x}x}.$$

Задача 2.3. Для уравнения

$$2\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

построена разностная схема

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{\tau} + \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}$$

на равномерной сетке из примера 2.2. Найдите ее погрешность аппроксимации в точке (x_i, t_j) .

2.3 Разностная аппроксимация краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

Пример 2.4. Постройте разностную схему для краевой задачи

$$\begin{cases} u'' = -f(x), & 0 < x < 1; \\ u(0) = g_0, & u(1) = g_1, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $f(x)$ — заданная функция, g_0 и g_1 — некоторые числа, и найдите ее порядок аппроксимации.

РЕШЕНИЕ. Введем на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N; hN = 1\}.$$

Введем сеточную функцию φ , которая определяется значениями функции $f(x)$ в узлах сетки: $\varphi(x) = f(x)$, $x \in \omega_h$. Заменяв оператор второй производной его разностным аналогом, получим следующую разностную схему:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x} = -\varphi(x), & x \in \omega_h, \\ y_0 = g_0, & y_N = g_1, \end{cases} \quad (2.2)$$

или же, в явном виде:

$$\begin{cases} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = -h^2\varphi_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = g_0, & y_N = g_1, \end{cases} \quad (2.3)$$

где для краткости введены обозначения: $y_i = y(x_i)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$.

Рассмотрим погрешность аппроксимации уравнения (2.1) схемой (2.2) :

$$\psi(x) = -\underbrace{(\varphi - f)}_{=0} - \underbrace{(u_{\bar{x}x} - u'')}_{=O(h^2)} = O(h^2), \quad x \in \omega_h.$$

Граничные условия в данном случае аппроксимируются точно. Следовательно, схема имеет второй порядок аппроксимации.

Запишем систему (2.3) в матричном виде. Для этого объединим неизвестные y_i в столбец:

$$Y = [y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{N-1} \ y_N]^T.$$

Тогда система (2.3) примет вид:

$$AY = -F,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F = [-g_0 \ h^2\varphi_1 \ \dots \ h^2\varphi_{N-1} \ -g_1].$$

Матрица системы (2.3) является трехдиагональной, то есть имеет ненулевую главную диагональ $A_{i,i}$, где $i = 0, 1, \dots, N$ и две ненулевые побочные диагонали $A_{i,i-1}$, где $i = 1, 2, \dots, N$, и $A_{i,i+1}$, где $i = 0, 1, \dots, N-1$. Все остальные ее элементы равны нулю. Структура матрицы A схематически представлена на рис.3. В задачах для дифференциальных уравнений второго порядка мы часто будем сталкиваться с необходимостью решать СЛАУ с трехдиагональной матрицей. Такие системы уравнений решаются методом прогонки, который мы рассмотрим в следующем разделе. ■

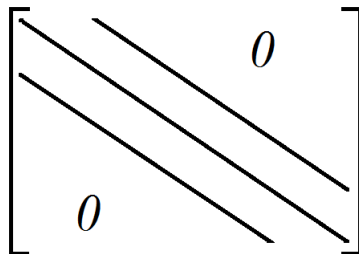


Рис. 3: Структура трехдиагональной матрицы

Заметим, что для достаточно гладкой функции $u(x)$ справедливо равенство:

$$u_{\bar{x}x} = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(IV)}(x) + \frac{h^4}{360}u^{(VI)}(x + \theta h), \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

Если правая часть $f(x)$ уравнения (2.1) — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то

$$u''(x) = -f(x) \Rightarrow u^{(IV)}(x) = -f''.$$

Аналогично, если $f(x)$ — четыре раза непрерывно дифференцируема, то для решения уравнения (2.1) справедливо равенство:

$$u^{(VI)}(x) = -f^{(IV)}(x),$$

и так далее. Следовательно, если $f^{(k)}(x) = 0$ при $k \geq 2$, то есть $f(x) = ax + b$ — линейная функция, то схема (2.2) точно аппроксимирует исходную задачу (2.1), так как погрешность аппроксимации в этом случае равна нулю. Если же $f''(x) \neq 0$, то погрешность аппроксимации имеет вид:

$$\psi = u'' - u_{\bar{x}x} = -\frac{h^2}{12}u^{(IV)}(x) + O(h^4) = \frac{h^2}{12}f'' + O(h^4).$$

Пользуясь этим равенством, можно повысить порядок аппроксимации уравнения (2.1). Действительно, рассмотрим оператор:

$$\tilde{L}_h = u_{\bar{x}x} + \frac{h^2}{12}f''.$$

Погрешность аппроксимации уравнения (2.1) разностным уравнением

$$\tilde{L}_h y_h = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h,$$

в этом случае будет иметь вид:

$$\tilde{\psi} = u'' - \tilde{L}_h u = O(h^4).$$

Следовательно, схема

$$\begin{cases} \tilde{L}_h y = -\varphi(x), & x \in \omega_h, \\ y_0 = g_0, & y_N = g_1, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x} = -\tilde{\varphi}(x), & x \in \omega_h, \\ y_0 = g_0, & y_N = g_1, \end{cases}$$

где $\tilde{\varphi}(x_i) = f(x_i) + \frac{h^2}{12} f''(x_i)$, аппроксимирует исходную задачу (2.1) с четвертым порядком.

Число узлов шаблона при этом не увеличивается.

3 Метод прогонки

Как было сказано выше, при построении разностных схем для дифференциальных уравнений второго порядка возникают системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами:

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - C_n y_n + B_n y_{n+1} = -F_n, & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1, \\ y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Пусть $A_n \neq 0$ и $B_n \neq 0$ при $n = 1, 2, \dots, N-1$. Используем для решения системы метод Гаусса, позволяющий в результате линейных преобразований перейти к эквивалентной системе с треугольной (например, верхне-треугольной) матрицей. В данном случае мы должны перейти от системы (3.1) с трехдиагональной матрицей к системе с двухдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n, & n = 0, 2, \dots, N-1, \\ y_N = \beta_N. \end{cases} \quad (3.2)$$

Прежде всего, найдем коэффициенты α_n и β_n в преобразованной системе (3.2). Заметим, что первое уравнение системы (3.1), соответствующее $n = 0$, уже имеет нужный вид:

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1 \Leftrightarrow y_0 = \alpha_0 y_1 + \beta_0 \Rightarrow \alpha_0 = \varkappa_1, \beta_0 = \mu_1.$$

Рассмотрим теперь уравнения системы (3.1), соответствующие $n = 1, 2, \dots, N - 1$:

$$y_{n-1} = \alpha_{n-1}y_n + \beta_{n-1} = \alpha_{n-1}\alpha_n y_{n+1} + \alpha_{n-1}\beta_n + \beta_{n-1} \Rightarrow$$

$$(\alpha_n(A_n\alpha_{n-1} - C_n) + B_n)y_{n+1} + (\beta_n(A_n\alpha_{n-1} - C_n) + A_n\beta_{n-1} + F_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$\Rightarrow \alpha_n(A_n\alpha_{n-1} - C_n) + B_n = 0, \quad \beta_n(A_n\alpha_{n-1} - C_n) + A_n\beta_{n-1} + F_n = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_n = \frac{B_n}{C_n - A_n\alpha_{n-1}}, \quad \beta_n = \frac{A_n\beta_{n-1} + F_n}{C_n - A_n\alpha_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.3)$$

Вычисление коэффициентов α_n, β_n по рекуррентным формулам (3.3) называется *прямым ходом* прогонки. Будем считать, что все коэффициенты в преобразованной системе (3.2) найдены. Рассмотрим уравнение при $n = N - 1$:

$$\begin{cases} y_{N-1} = \alpha_{N-1}y_N + \beta_{N-1} \\ y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2 \end{cases} \Rightarrow y_N = \frac{\mu_2 + \varkappa_2 \beta_{N-1}}{1 - \varkappa_2 \alpha_{N-1}}.$$

Обратный ход прогонки:

$$y_N = \beta_N = \frac{\mu_2 + \varkappa_2 \beta_{N-1}}{1 - \varkappa_2 \alpha_{N-1}};$$

$$y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n, \quad n = N - 1, N - 2, \dots, 0.$$

Достаточные условия устойчивости прогонки:

$$\begin{aligned} |C_n| &\geq |A_n| + |B_n|, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1; \\ |\varkappa_p| &\leq 1, \quad p = 1, 2; \quad |\varkappa_1| + |\varkappa_2| < 2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Докажем по индукции, что если выполнены условия (3.4), то $|\alpha_n| \leq 1$ для всех $n = 0, 1, \dots, N - 1$. В самом деле:

$$|\alpha_0| = |\varkappa_1| \leq 1.$$

Пусть $|\alpha_{n-1}| \leq 1$. Из условий (3.4) следует, что

$$|C_n - A_n\alpha_{n-1}| - |B_n| \geq |C_n| - |\alpha_{n-1}||A_n| - |B_n| \geq |A_n|(1 - |\alpha_{n-1}|) \geq 0 \Rightarrow$$

$$|C_n - A_n\alpha_{n-1}| \geq |B_n| \Rightarrow |\alpha_n| = \frac{|B_n|}{|C_n - A_n\alpha_{n-1}|} \leq 1.$$

Покажем, что если $|\alpha_{n-1}| < 1$, то и $|\alpha_n| < 1$. В самом деле, если $|\alpha_{n-1}| < 1$, то

$$|C_n - \alpha_{n-1}A_n| > |B_n| \Rightarrow |\alpha_n| < 1.$$

Если выполнены условия (3.4), то $1 - \alpha_{N-1}\varkappa_2 \neq 0$, то есть y_N определено:

$$\text{а) } |\varkappa_2| < 1 \Rightarrow |\varkappa_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_0| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_{N-1}| \leq 1 \Rightarrow$$

$$|1 - \alpha_{N-1}\varkappa_2| \geq 1 - |\alpha_{N-1}||\varkappa_2| \geq 1 - |\varkappa_2| > 0;$$

$$\text{б) } |\varkappa_2| \leq 1 \Rightarrow |\varkappa_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_0| < 1 \Rightarrow |\alpha_{N-1}| < 1 \Rightarrow$$

$$|1 - \alpha_{N-1}\varkappa_2| \geq 1 - |\alpha_{N-1}||\varkappa_2| \geq 1 - |\alpha_{N-1}| > 0.$$

При $|\alpha_n| \leq 1$ возникающая при численном решении ошибка $\delta y_{n+1} = \tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}$ округления не возрастает:

$$y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n, \quad \tilde{y}_n = \alpha_n \tilde{y}_{n+1} + \beta_n \Rightarrow \delta y_n = \alpha_n \delta y_{n+1} \Rightarrow |\delta y_n| = |\alpha_n| |\delta y_{n+1}| \leq |\delta y_{n+1}|.$$

Если в коэффициенты α_n, β_n внесено возмущение, то $\max_{1 \leq n \leq N} |\delta y_n| \approx \varepsilon_0 N^2$, где ε_0 — ошибка округления.

Замечание 3.1 Если все коэффициенты A_n, B_n и C_n в системе (3.1) одного знака, то достаточные условия устойчивости прогонки (3.4) можно ослабить:

$$\begin{aligned} A_n > 0; B_n > 0; C_n \geq A_n + B_n; C_n \neq A_n + B_n; \quad n = 1, 2, \dots, N-1; \\ 0 \leq \varkappa_p \leq 1, \quad p = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Число арифметических операций прогонки $O(N)$.

Пример 3.1. Выполнены ли для системы

$$\begin{cases} y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1} = -F_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = 2, \quad y_N = 4 \end{cases}$$

достаточные условия устойчивости метода прогонки? Решите ее численно, если $F_i = \sin(\pi x_i)$, где $x_i = \frac{i}{N}$, $i = 0, 1, \dots, N$, и найдите невязку $|df| = \sqrt{\sum_{i=0}^N (df_i)^2}$, где df — разность правой части системы:

$$f = \{2 \quad -F_1 \quad -F_2, \quad \dots \quad -F_{N-1} \quad 4\}^T$$

и результата подстановки в систему найденного численного решения.

РЕШЕНИЕ. В данном случае $A_i = B_i = 1$, $C_i = -2$ при $i = 1, 2, \dots, N-1$, и $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, то есть условия $|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, и $|\varkappa_{1,2}| \leq 1$, $|\varkappa_1| + |\varkappa_2| < 2$ выполнены. Следовательно, метод прогонки применим.

На рис. 4 приведено отклонение правой части системы от результата подстановки в систему численного решения при $N = 1000$.

Для $N = 1000$ величина невязки правой части составляет $|df| = 7.6871 \cdot 10^{-15}$.

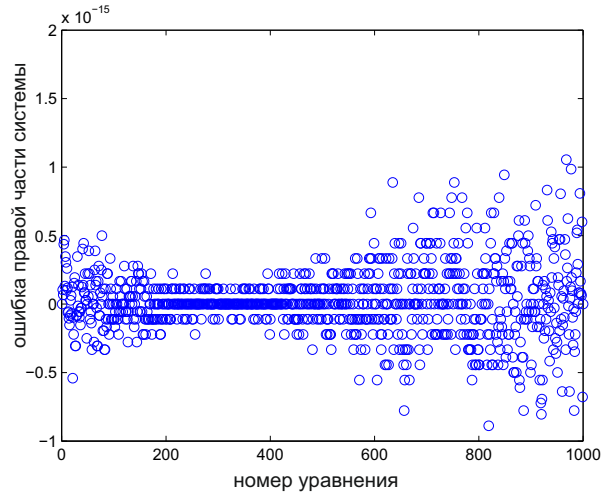


Рис. 4: Результат подстановки численного решения в исходную систему в примере 3.1

Пример 3.2. Решите для системы:

$$\begin{cases} y_{i-1} - 3y_i + y_{i+1} = -F_i, & i = 1, 2, \dots, N - 1, \\ y_0 = y_1 + 2, & y_N = y_{N-1} - 1 \end{cases}$$

задачу, аналогичную предыдущей.

РЕШЕНИЕ. В данном случае $A_i = B_i = 1$, $C_i = 3$ при $i = 1, 2, \dots, N - 1$, и $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$, то есть условия $C_i > A_i + B_i$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, и $0 \leq \varkappa_{1,2} \leq 1$ выполнены. Следовательно, метод прогонки применим. Для $N = 1000$ величина невязки правой части составляет $|df| = 5.9523 \cdot 10^{-15}$.

На рис. 5 приведено отклонение правой части системы от результата подстановки в систему численного решения при $N = 1000$.

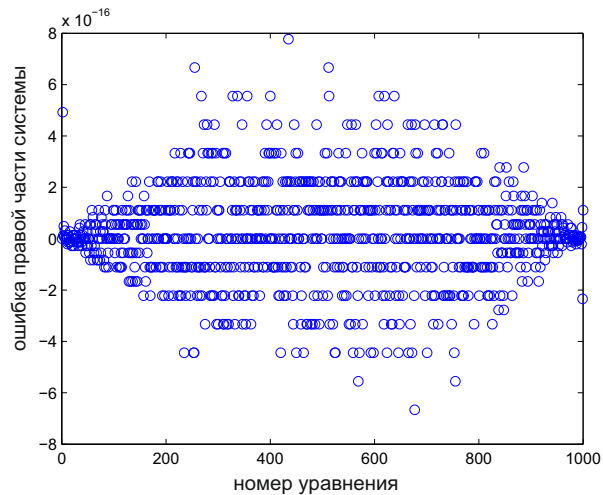


Рис. 5: Результат подстановки численного решения в исходную систему в примере 3.2

4 Примеры решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

В качестве примера рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u'' = -f(x), & x \in (0, 1), \\ u'(0) = g_0, & u(1) = g_1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Задача (4.1) отличается от рассмотренной ранее тем, что при $x = 0$ сформулировано условие Неймана, которое можно аппроксимировать на сетке различными способами. Рассмотрим несколько примеров построения разностных схем для задачи (4.1) с различными входными данными и сравним их между собой.

Пример 4.1. Пусть в задаче (4.1) входные данные имеют вид:

$$f(x) = x \sin(\pi x), \quad g_0 = 1, \quad g_1 = -\frac{2}{\pi^3}.$$

Решите задачу аналитически и численно с помощью разностной схемы на равномерной сетке. Сравните результаты. Исследуйте зависимость погрешности численного решения от шага сетки.

РЕШЕНИЕ. При выбранных входных данных аналитическое решение задачи имеет вид:

$$u(x) = \frac{x \sin(\pi x)}{\pi^2} + \frac{2 \cos(\pi x)}{\pi^3} + x - 1.$$

Введем на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку:

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = 1.$$

Аппроксимируем уравнение, заменяя вторую производную u'' ее разностным аналогом $u_{\bar{x}x}$, и беря в качестве аппроксимации правой части уравнения значения функции $f(x)$ в узлах сетки:

$$y_{\bar{x}x,i} = -x_i \sin(\pi x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Граничное условие при $x = 1$ аппроксимируется точно: $y_N = -\frac{2}{\pi^3}$. Для аппроксимации условия Неймана при $x = 0$ используем простейший вариант, а именно, заменим $u'(0)$ соответствующей правой односторонней производной:

$$y_{x,0} = 1.$$

Явный вид соответствующей разностной схемы:

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = -h^2 x_i \sin(\pi x_i), & i = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_1 - h, & y_N = -\frac{2}{\pi^3}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Система (4.2) имеет трехдиагональную матрицу, принадлежит классу систем (3.1), причем:

$$A_i = B_i = 1, \quad C_i = 2, \quad \varkappa_1 = 1, \quad \varkappa_2 = 0.$$

Достаточные условия устойчивости прогонки для (4.2) выполнены. На рис. 6 представлен график аналитического решения (сплошная синяя линия) и результаты численного решения (красные кружки).

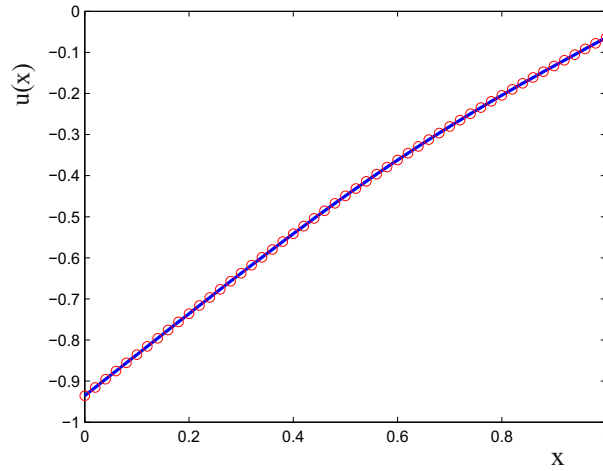


Рис. 6: Аналитическое и численное решение задачи в случае $N = 50$

Поскольку граничное условие при $x = 0$ аппроксимируется с первым порядком (односторонняя разностная производная имеет первый порядок аппроксимации), то в общем случае порядок погрешности аппроксимации задачи (4.1) схемой (4.2) должен быть первым. Однако в данном случае он определяется правой частью уравнения. В самом деле, рассмотрим для точного решения задачи (4.1) выражение:

$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2) = u'(x) - \frac{h}{2}x \sin(\pi x) + O(h^2).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $x \rightarrow 0$:

$$u_{x,0} = u'(0) + O(h^2) = 1 + O(h^2).$$

Следовательно, в данном частном случае порядок аппроксимации граничного условия при $x = 0$ на решении задачи оказывается вторым благодаря свойствам правой части

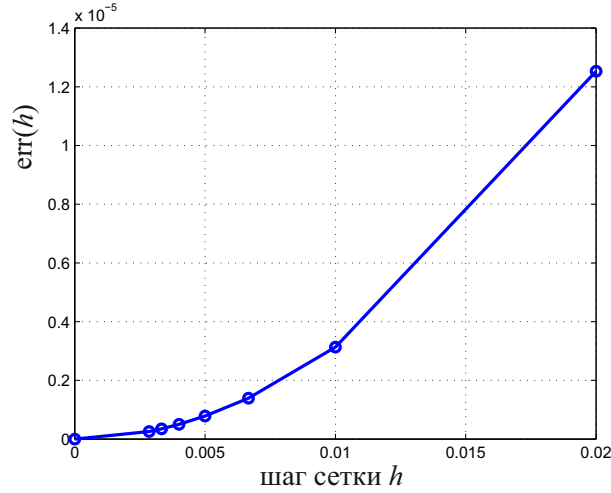


Рис. 7: Зависимость нормы $err = \|y_i - u_i\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} (u_i - y_i)^2 h}$ погрешности численного решения от шага сетки

уравнения. Таким образом, схема (4.2) для рассматриваемого частного случая имеет второй порядок аппроксимации на решении, а значит, в силу ее линейности и выполнения достаточных условий устойчивости прогонки, и второй порядок точности (см. рис. 7).

Пример 4.2. Пусть в задаче (4.1) входные данные имеют вид:

$$f(x) = \cos(\pi x), \quad g_0 = 1, \quad g_1 = -\frac{1}{\pi^2}.$$

Решите задачу аналитически и численно с помощью разностной схемы на равномерной сетке. Сравните результаты. Исследуйте зависимость погрешности численного решения от шага сетки.

РЕШЕНИЕ. При выбранных входных данных аналитическое решение задачи имеет вид:

$$u(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + x - 1.$$

Введем на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку, как в предыдущем примере. Уравнение аппроксимируем как:

$$y_{\bar{x},i} = -\cos(\pi x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

граничное условие при $x = 1$ аппроксимируется точно: $y_N = -\frac{1}{\pi^2}$.

Первый вариант аппроксимации граничного условия Неймана при $x = 0$: как и в предыдущем случае, заменим $u'(0)$ односторонней производной:

$$y_{x,0} = 1.$$

В результате получаем разностную схему:

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = -h^2 \cos(\pi x_i), & i = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_1 - h, & y_N = -\frac{1}{\pi^2}, \end{cases} \quad (4.3)$$

которую можно решить с помощью метода прогонки. В данном случае:

$$\alpha_1 = 1, \quad \mu_1 = -h, \quad \alpha_2 = 0, \quad \mu_2 = -\frac{1}{\pi^2}, \quad A_i = B_i = 1, \quad C_i = 2, \quad F_i = h^2 \cos(\pi x_i).$$

Достаточные условия устойчивости прогонки выполнены. На рисунке 8 представлено аналитическое решение (сплошная синяя линия) и результаты численного расчета по схеме (4.3).

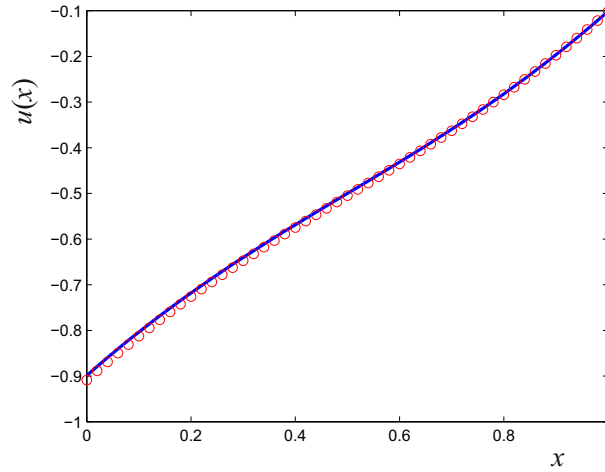


Рис. 8: Аналитическое и численное решение задачи в случае $N = 50$

Схема (4.3) обладает первым порядком погрешности аппроксимации, поскольку уравнение аппроксимируется со вторым порядком, а граничное условие при $x = 0$ — только с первым. В самом деле, рассмотрим равенство:

$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2} u''(x) + O(h^2) = u'(x) - \frac{h}{2} \cos(\pi x) + O(h^2),$$

где $u(x)$ — решение задачи (4.1) при рассматриваемых входных данных, и перейдем в нем к пределу при $x \rightarrow 0$. В результате получим:

$$u_{x,0} = u'(0) - \frac{h}{2} + O(h^2), \quad (4.4)$$

где $\nu_h = u_{x,0} - u'(0) = O(h)$ — погрешность аппроксимации. Следовательно, порядок погрешности решения также будет первым, что можно видеть из рис. 9.

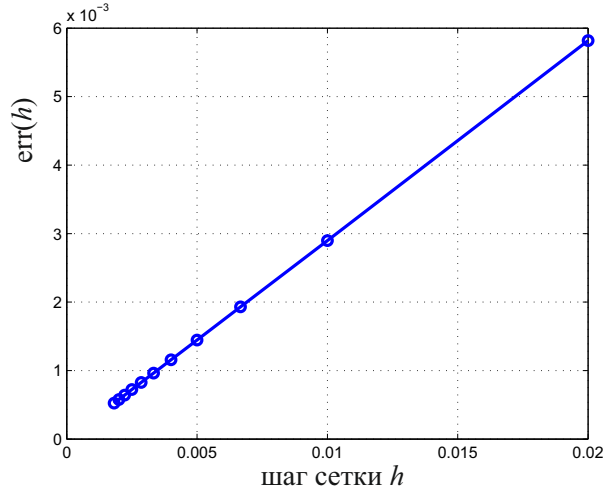


Рис. 9: Зависимость нормы $err = \|y_i - u_i\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} (u_i - y_i)^2} h$ погрешности численного решения задачи по схеме (4.3) от шага сетки

Второй вариант аппроксимации граничного условия при $x = 0$: воспользуемся равенством (4.4) и аппроксимируем производную $u'(0)$ выражением:

$$u_{x,0} + \frac{h}{2}.$$

Тогда разностное уравнение

$$y_{x,0} + \frac{h}{2} = 1$$

будет аппроксимировать граничное условие $u'(0) = 1$ с погрешностью $O(h^2)$. Следовательно, разностная схема

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = -h^2 \cos(\pi x_i), & i = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_1 - h + \frac{h^2}{2}, & y_N = -\frac{1}{\pi^2} \end{cases} \quad (4.5)$$

будет иметь второй порядок аппроксимации на решении задачи (4.1). Зависимость погрешности решения задачи по схеме (4.5) от шага сетки представлена на рис. 10.

Схему, обладающую вторым порядком аппроксимации, также можно построить, пользуясь трехточечной односторонней первой производной:

$$\frac{4u(x+h) - 3u(x) - u(x+2h)}{2h} = u'(x) + O(h^2).$$

При $x = 0$ получаем следующую аппроксимацию граничного условия:

$$\frac{4y_1 - 3y_0 - y_2}{2h} = 1 \Leftrightarrow y_0 = \frac{4}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2h}{3}.$$

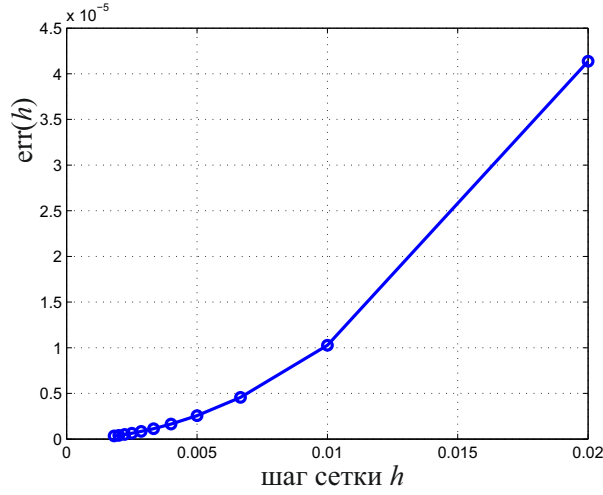


Рис. 10: Зависимость нормы $err = \|y_i - u_i\|$ погрешности численного решения задачи по схеме (4.5) от шага сетки

Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = -h^2 \cos(\pi x_i), & i = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = \frac{4}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2h}{3}, \\ y_N = -\frac{1}{\pi^2}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Матрица этой системы не является трехдиагональной, но ее можно легко преобразовать к системе с трехдиагональной матрицей. В самом деле, рассмотрим уравнение при $i = 1$:

$$y_0 - 2y_1 + y_2 = -h^2 \cos(\pi h) \Rightarrow y_2 = 2y_1 - y_0 - h^2 \cos(\pi h).$$

Подставим это выражение в уравнение, аппроксимирующее граничное условие при $x = 0$:

$$y_0 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_0 + \frac{h^2}{3} \cos(\pi h) - \frac{2h}{3},$$

откуда получаем:

$$y_0 = y_1 - h + \frac{h^2}{2} \cos(\pi h).$$

Система

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = -h^2 \cos(\pi x_i), & i = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_1 - h + \frac{h^2}{2} \cos(\pi h), \\ y_N = -\frac{1}{\pi^2} \end{cases} \quad (4.7)$$

имеет трехдиагональную матрицу, и ее можно решать методом прогонки. Зависимость точности решения, полученного по схеме (4.7), от шага сетки представлена на рис.11. Как можно видеть, результат в этом случае даже несколько лучше, чем при использовании схемы (4.5).

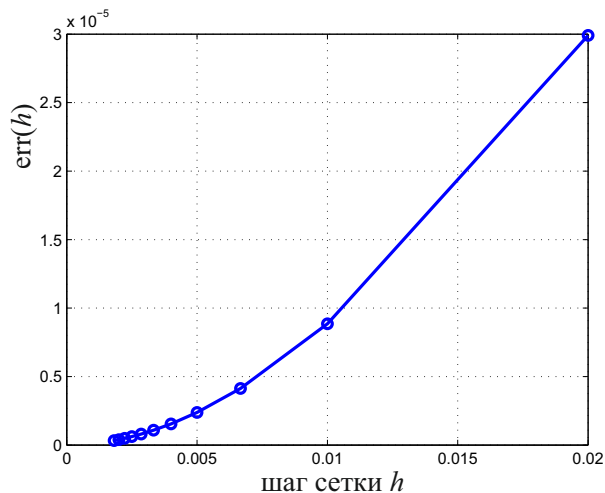


Рис. 11: Зависимость нормы $err = \|[y_i - u_i]\|$ погрешности численного решения задачи по схеме (4.7) от шага сетки

5 Задания для самостоятельного решения

- 1) Постройте разностные односторонние производные, аппроксимирующие $u'(x)$ на неравномерной сетке $\bar{\omega} = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$.
- 2) Постройте разностную аппроксимацию второй производной $u''(x)$ на неравномерной сетке $\bar{\omega} = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$.
- 3) Решите краевую задачу

$$\begin{cases} u'' = -f(x), & 0 < x < 1; \\ -\sigma_0 u'(0) + \gamma_0 u(0) = g_0, & \sigma_1 u'(1) + \gamma_1 u(1) = g_1 \end{cases}$$

аналитически и численно с помощью разностной схемы на равномерной сетке, если:

- а) $f = x + 1, \sigma_0 = 1, \gamma_0 = 2, g_0 = 0, \sigma_1 = 1, \gamma_1 = 0, g_1 = 1$;
- б) $f = x^2 + 1, \sigma_0 = 0, \gamma_0 = 1, g_0 = 2, \sigma_1 = 1, \gamma_1 = 1, g_1 = 0$;
- в) $f = e^x, \sigma_0 = 1, \gamma_0 = 0, g_0 = 0, \sigma_1 = 1, \gamma_1 = -0.5, g_1 = 0$;
- г) $f = \cos(\pi x), \sigma_0 = 0, \gamma_0 = 1, g_0 = 2, \sigma_1 = 1, \gamma_1 = 0.5, g_1 = 0$;
- д) $f = \sin(\pi(1 - x)), \sigma_0 = 0, \gamma_0 = 1, g_0 = 0, \sigma_1 = 1, \gamma_1 = -1, g_1 = 1$;

Сравните численное решение с аналитическим. Исследуйте зависимость погрешности решения от шага сетки.

6 Дополнение: реализация метода прогонки для СЛАУ с постоянными коэффициентами

```
function Y = progonka(A,B,C,F,kappa,mu,N)
%-----
% реализация прогонки для простейших систем с постоянными
коэффициентами:
%  $A*y_{n-1} - C*y_n + B*y_{n+1} = -F_n$ ,  $n=2,3,\dots,N-1$ ;
%  $y_1 = \text{kappa}(1)*y_2 + \text{mu}(1)$ ;
%  $y_N = \text{kappa}(2)*y_{N-1} + \text{mu}(2)$ .
%-----

% Создание столбца из N нулей, в который будет записано решение:
Y=zeros(N,1);

% Создание массивов прогоночных коэффициентов:
alpha=zeros(N-1,1);
beta=zeros(N-1,1);

alpha(1)=kappa(1);
beta(1)=mu(1);

% прямой ход прогонки:
for n=2:N-1
    alpha(n)=B/(C-A*alpha(n-1));
    beta(n)=(A*beta(n-1)+F(n))/(C-A*alpha(n-1));
end

% обратный ход прогонки:
Y(N)=(mu(2)+kappa(2)*beta(N-1))/(1-kappa(2)*alpha(N-1));

for n=N-1:-1:1
    Y(n)=alpha(n)*Y(n+1)+beta(n);
end
```