МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

В.Ф. Бутузов, М.В. Бутузова

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ

Учебное пособие

Москва
2017

Предисловие

Учебное пособие предназначено как для студентов, так и для преподавателей, ведущих семинарские занятия по математическому анализу. Его содержание относится к разделам «Ряды и интегралы Фурье» и «Обобщённые функции», не вошедшим в известное учебное пособие «Математический анализ в вопросах и задачах» (авторы: В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин). Структура данного пособия такая же, как и структура глав в упомянутом учебном пособии. Каждый параграф разбит на четыре пункта: «Основные понятия и теоремы», гда даются определения и приводятся (без доказательства) основные теоремы; «Контрольные вопросы и задания», способствующие усвоению основных понятий; «Примеры решения задач» (начало и конец решения каждой задачи отмечены знаками $\triangle$ и $\blacktriangle$) и «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» (в конце пособия приведены ответы и указания к задачам этих пунктов).

Авторы признательны Е.А. Михайловой за компьютерный набор текста пособия.

Рекомендовано Советом отделения прикладной математики в качестве пособия для студентов физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, обучающихся по направлениям «физика» и «астрономия».

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

§1. Тригонометрические ряды Фурье

Основные понятия и теоремы

1. Тригонометрическая система.

Определение. Функция $f(x)$, определённая на всей числовой прямой, называется *периодической*, если существует число $T > 0$, такое, что $\forall x: \quad f(x+T) = f(x)$. Число T называется *периодом* функции.

Заметим, что если число T - период функции, то числа $2T, 3T, \ldots$ - также периоды этой функции. Обычно под периодом функции понимают её наименьший период (если он существует, см. п. 1 в контрольных вопросах и заданиях).

Последовательность функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

называется *тригонометрической системой.* Любая линейная комбинация функций тригонометрической системы, в том числе и бесконечная (т.е. ряд, если он сходится), является периодической функцией с периодом 2π.

В дальнейшем будем рассматривать тригонометрическую систему, как правило, на сегменте $[-\pi, \pi]$, иногда на сегменте $[0, 2\pi]$. На любом сегменте длины 2π (в том числе на сегментах $[-\pi, \pi]$ и $[0, 2\pi]$) тригонометрическая система является *ортогональной системой.* Это означает, что *для любых двух функций тригонометрической системы интеграл от их произведения по сегменту длины* 2π *равен нулю.* Этот инеграл можно трактовать как скалярное произведение в пространстве функций, интегрируемых на данном сегменте длины 2π.

2. Коэффициенты Фурье. Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[-\pi, \pi]$. Ниже в теореме 1 будут указаны достаточные условия, при которых функцию $f(x)$ можно представить на этом сегменте в виде линейной комбинации функций тригонометрической системы или, как говорят, разложить функцию $f(x)$ в *тригонометрический ряд Фурье* (сходящийся к $f(x)$ во всех точках сегмента $[-\pi, \pi]$ за исключением, быть может, конечного числа точек):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1}$$

где a_n и b_n - числа. Они называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ и вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Если функция $f(x)$ и тригонометрическая система рассматриваются на сегменте $[0, 2\pi]$, то коэффициенты Фурье функции $f(x)$ вычисляются по формулам, которые получаются из (2) и (3) заменой промежутка интегрирования $[-\pi, \pi]$ на $[0, 2\pi]$.

3. Кусочно - непрерывные и кусочно - гладкие функции. В теории тригонометрических рядов Фурье важную роль играют два класса функций: кусочно - непрерывные и кусочно - гладкие функции.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *кусочно - непрерывной* на сегменте $[a, b]$, если она определена и непрерывна во всех точках этого сегмента, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрывы первого рода.

Напомним, что точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если существуют левый и правый пределы этой функции в точке x_0 (они обозначаются $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, но при этом $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$

Определение 2. Кусочно - непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ называется *кусочно - гладкой* на этом сегменте, если её производная $f'(x)$ существует и непрерывна во всех точках сегмента $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, а в этих точках (где $f'(x)$ не существует или разрывна) существуют левый и правый пределы $f'(x)$ (т.е. существуют $f'(x - 0)$ и $f'(x + 0)$).

4. Теоремы о сходимости, почленном интегрировании и почленном дифференцировании тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 1 (о поточечной сходимости ряда Фурье). *Пусть $f(x)$ - кусочно - гладкая функция на сегменте $[-\pi, \pi]$. Тогда её ряд Фурье*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

коэффициенты которого определяются формулами (2) и (3), сходится в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$, и для его суммы $S(x)$ справедливы равенства:

$$\forall x \in \ (-\pi, \pi): \ \ S(x) = \frac{1}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right),$$

в частности, $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$;

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right). \tag{4}$$

Замечание 1. Так как все члены ряда Фурье - периодические функции с периодом 2π, то при условии теоремы 1 ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в любой точке числовой прямой, и его сумма на всей прямой является 2π - периодическим продолжением на всю прямую функции $S(x)$ - суммы ряда на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Замечание 2. Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[-l, l]$, где $l > 0$ - некоторое число. Ортогональной тригонометрической системой на сегменте $[-l, l]$ (и также на любом сегменте длины $2l$) является последовательность функций

$$1, \ \ \cos\frac{\pi n x}{l}, \ \ \sin\frac{\pi n x}{l}, \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

а ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{5}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \ \ n = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Если функция $f(x)$ является кусочно - гладкой на сегменте $[-l, l]$, то для неё справедлива теорема 1 с заменой в формулировке теоремы числа π на число l.

Замечание 3. Если кусочно - гладкая функция $f(x)$ задана на сегменте $[0, 2\pi]$, то для неё справедлива теорема, аналогичная теореме 1, причём равенства (4) заменяются равенствами

$$S(0) = S(2\pi) = \frac{1}{2}\left[f(+0) + f(2\pi - 0)\right].$$

Замечание 4. Если функция $f(x)$ является только кусочно - непрерывной (но не кусочно - гладкой) на сегменте $[-\pi, \pi]$, то этого не достаточно для поточечной сходимости её тригонометрического ряда Фурье. Вместе с тем, этого достаточно для сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$ в среднем на сегменте $[-\pi, \pi]$, т.е. для кусочно - непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - S_n(x)\right]^2 dx = 0,$$

где $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ - частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$.

Отсюда, в частности, следует. что ряд Фурье кусочно - непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ можно интегрировать почленно, т.е. для любых x_0 и x из сегмента $[-\pi, \pi]$ справедливо равенство

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right) dt,$$

причём ряд, стоящий в правой части равенства, сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$ к функции, стоящей в левой части равенства. Аналогичные утверждения о сходимости в среднем и почленном интегрировании ряда Фурье имеют место для функции $f(x)$, кусочно - непрерывной на сегменте $[-l, l]$.

Теорема 2 (о равномерной сходимости ряда Фурье). *Пусть $f(x)$ - непрерывная кусочно - гладкая функция на сегменте $[-\pi, \pi]$, и пусть $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно и абсолютно на сегменте $[-\pi, \pi]$*

Теорема 3 (о почленном дифференцировании ряда Фурье). *Пусть выполнены условия:*
1) функция $f(x)$ и её производные до m-го порядка включительно непрерывны на сегменте $[-\pi, \pi]$;
2) производная $(m+1)$-го порядка функции $f(x)$ кусочно - непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$;
3) $f(-\pi) = f(\pi), \quad f'(-\pi) = f'(\pi), \quad \ldots, \quad f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi)$.

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

можно m раз дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi, \pi]$, т.е. $\forall \ k = 1, 2, \ldots, m$ и $\forall x \in [-\pi, \pi]$ справедливо равенство

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n^k \cos\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right) + b_n \cdot n^k \sin\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 3, то для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ имеет место оценка*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Замечание. Теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3, имеют место для функций, заданных на сегменте $[-l, l]$.

5. Равномерная аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

Алгебраический многочлен - это функция вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{8}$$

где n - натуральное число, a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ - какие-то числа.

Тригонометрическим многочленом на сегменте $[-l, l]$ назовём любую линейную комбинацию конечного числа функций тригонометрической системы:

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos\frac{\pi k x}{l} + B_k \sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{9}$$

В частности, если $l = \pi$, то

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx.$$

Теорема 4 (об аппроксимации непрерывной функции тригонометрическим многочленом). *Елси функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-l, l]$, и $f(-l) = f(l)$, то эту функцию можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на сегменте $[-l, l]$ тригонометрическим многочленом, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$ вида (9), такой, что $\forall\ x \in [-l, l]$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 5 (об аппроксимации непрерывной функции алгебраическим многочленом). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то её можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на этом сегменте алгебраическим многочленом, т.е. $\forall\ \varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен $P_n(x)$ вида (8), такой, что $\forall\ x \in [a, b]$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

6. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье. Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$, заданной на сегменте $[-\pi, \pi]$ (см. (1)), можно записать в комплексной форме:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{10}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \tag{11}$$

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad i - \text{ мнимая единица.}$$

Представление $f(x)$ в виде (11) является разложением $f(x)$ по системе комплекснозначных функций $\{e^{inx}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Эта система функций является ортогональной на сегменте $[-\pi, \pi]$, если скалярное произведение комплекснозначных функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ определено так:

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{g}(x) dx,$$

где $\bar{g}(x)$ - комплексно сопряжённая функция по отношению к $g(x)$, т.е. $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$, $\bar{g}(x) = g_1(x) - ig_2(x)$, $g_1(x)$ и $g_2(x)$ вещественнозначные функции.

Контрольные вопросы и задания

1. Докажите, что любое положительное рациональное число является периодом функции Дирихле.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \; x - \text{рациональное число,} \\ 0, & \text{если } \; x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

Существует ли наименьший период у этой функции?

2. Существует ли иррациональное число, являющееся периодом функции Дирихле?

3. В чём состоит свойство ортогональности тригонометрической системы на сегменте $[-\pi, \pi]$? Обоснуйте это свойство.

4. Напишите выражение для тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, заданной на сегменте $[-\pi, \pi]$, и формулы для вычисления коэффициентов Фурье этой функции.

5. Сформулируйте определения кусочно - непрерывной и кусочно - гладкой функции на сегменте $[a, b]$. Приведите примеры таких функций, а также пример функции, которая: а) не является кусочно - непрерывной; б) является кусочно - непрерывной, но не является кусочно - гладкой на некотором сегменте.

6. Сформулируйте теорему о поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье для функции, заданной на сегменте $[-\pi, \pi]$. Что можно сказать о сходимости этого ряда на всей числовой прямой? Чему равна сумма ряда Фурье функции $f(x) = x$, заданной на сегменте $[-\pi, \pi]$?

7. Пусть $S(x)$ - сумма тригонометрического ряда Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Найдите $S(-\pi)$, $S(0)$ и $S(\pi)$.

8. Напишите выражение для тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, заданной на сегменте $[-l, l]$, и формулы для вычисления коэффициентов Фурье этой функции.

9. Какое условие на функцию $f(x)$ (более слабое, чем в теореме 1) является достаточным для сходимости её тригонометрического ряда Фурье в среднем на сегменте $[-\pi, \pi]$?

10. Сформулируйте теорему о равномерной сходимости ряда Фурье для функции, заданной на сегменте $[-\pi, \pi]$. Для каких из указанных ниже функций, заданных на сегменте $[-\pi, \pi]$, ряд Фурье сходится равномерно и для каких неравномерно на этом сегменте: а) $f(x) = x$; б) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = |x|$; г) $f(x) = x\cos x$; д) $f(x) = x\sin x$?

11. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании ряда Фурье для функции, заданной на сегменте: а) $[-\pi, \pi]$; б) $[-l, l]$. Сколько раз можно почленно дифференцировать на сегменте $[-\pi, \pi]$ ряд Фурье функции $f(x)$, заданной на этом сегменте, если: а) $f(x) = x^2 \sin x$; б) $f(x) = \cos(\sin x)$; в) $f(x) = e^{\sin x}$.

12. Пусть $f(x)$ - непрерывная кусочно - гладкая функция на сегменте $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, a_n и b_n - коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе. Для каких p справедливы равенства $a_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$, $b_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ при $n \to \infty$?

13. Напишите выражение для тригонометрического многочлена на сегменте $[-l, l]$.

14. Сформулируйте теорему об аппроксимации непрерывной функции: а) тригонометрическим многочленом; б) алгебраическим многочленом.

15. Напишите выражение для тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, заданной на сегменте $[-\pi, \pi]$, в комплексной форме и формулы для вычисления коэффициентов этого ряда. Выведите эти формулы.

Примеры решения задач

1. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$, если: а) $f(x) = x$; б) $f(x) = |x|$.

$\triangle$ а) По формулам (2) и (3) вычисляем коэффициенты a_n и b_n тригонометрического ряда Фурье функции $f_1(x) = x$, учитывая, что данная функция - нечётная:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} x dx = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

(интеграл от нечётной функции в симметричных пределах равен нулю);

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x d\cos nx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left[x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx dx\right] = -\frac{2}{\pi n}\left[\pi\cos n\pi - \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right] =$$

$$= -\frac{2}{n}(-1)^n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f_1(x) = x$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет вид

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx. \tag{12}$$

Согласно теореме 1 сумма $S_1(x)$ этого ряда равна $f_1(x) = x \ \forall x \in (-\pi, \pi)$, а в граничных точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ справедливы равенства

$$S_1(-\pi) = S_1(\pi) = \frac{1}{2}\left[f_1(-\pi + 0) + f_1(\pi + 0)\right] = \frac{1}{2}(-\pi + \pi) = 0.$$

Итак,

$$S_1(x) = \begin{cases} f_1(x) = x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = -\pi \text{ и } x = \pi \end{cases}, \tag{13}$$

т.е. ряд (12) сходится к функции $f_1(x) = x$ только в интервале $(-\pi, \pi)$, а в граничных точках интервала ряд также сходится, но его сумма не равна соответствующим значениям функции $f_1(x)$ в этих точках.

б) Для вычисления коэффициентов a_n и b_n тригонометрического ряда Фурье функции $f_2(x) = |x|$ снова используем формулы (2) и (3) и учитываем чётность данной функции :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x d\sin nx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx dx\right] = \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{если } n = 2k-1, \\ 0, & \text{если } n = 2k, \quad k = 1, 2, \ldots; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(интеграл от нечётной функции в симметричных пределах равен нулю). Таким образом, ряд Фурье функции $f_2(x) = |x|$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет вид

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \tag{14}$$

Согласно теореме 1 сумма $S_2(x)$ этого ряда равна $f_2(x) = |x| \ \forall x \in (-\pi, \pi)$, а в граничных точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ справедливы равенства

$$S_2(-\pi) = S_2(\pi) = \frac{1}{2}\left[f_2(-\pi + 0) + f_2(\pi - 0)\right] = \frac{1}{2}(\pi + \pi) = \pi,$$

и, значит,

$$S_2(-\pi) = \pi = f_2(-\pi) \ \text{ и } \ S_2(\pi) = \pi = f_2(\pi).$$

Следовательно, ряд (14) сходится к функции $f_2(x) = |x|$ во всех точках сегмента $[-\pi, \pi]$, т.е.

$$S_2(x) = f_2(x) = |x|, \quad -\pi \le x \le \pi. \ \blacktriangle \tag{15}$$

Замечание 1. Функция $f_1(x) = x$ - нечетная функция, и её разложение в тригонометрический ряд Фурье содержит только синусы (см. (12)), а функция $f_2(x) = |x|$ - чётная функция, и её разложение в ряд Фурье содержит только косинусы (см. (14)). Очевидно, то же самое будет для любой нечётной и для любой чётной функции, т.е. для нечётной функции $f(x)$, заданной на сегменте $[-l, l]$, ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а для чётной функции $f(x)$, заданной на сегменте $[-l, l]$, ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Замечание 2. Из (13) и (15) следует, что при $0 \leq x < \pi$ справедливы равенства

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \tag{16}$$

и

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \tag{17}$$

т.е. при $0 \leq x < \pi$ функцию $f(x) = x$ можно разложить как в ряд по синусам (ряд (16)), так и в ряд по косинусам (ряд (17)).

Вообще, если функция $f(x)$ задана на отрезке $0 \leq x \leq l$, то, продолжив её на отрезок $[-l \leq x \leq 0]$ нечётным образом, можно получить затем разложение $f(x)$ на отрезке $[0, l]$ по синусам, т.е. в виде ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$, а продолжив чётным образом, можно получить разложение $f(x)$ на отрезке $[0, l]$ по косинусам, т.е. в виде ряда $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$.

Замечание 3. Отметим, что ряд (14) сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Это можно доказать разными способами. Можно воспользоваться теоремой 2 о равномерной сходимости ряда Фурье, поскольку функция $f_2(x) = |x|$ удовлетворяет всем условиям этой теоремы: она является непрерывной и кусочно - гладкой на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f_2(-\pi) = f_2(\pi)$. Другой способ - применить признак Вейерштрасса: функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$ имеет на любом промежутке сходящийся мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ и, следовательно, сходится равномерно на любом промежутке.

В отличие от ряда (14) ряд (12) сходится неравномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Это можно доказать, например, так: члены ряда (12) являются непрерывными функциями на сегменте $[-\pi, \pi]$. Поэтому, если бы ряд (12) сходился равномерно на этом сегменте, то его сумма $S_1(x)$ была бы также непрерывной функцией на этом сегменте. Но $S_1(x)$ разрывна в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (см. (13)), и, следовательно, ряд (12) сходится неравномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Замечание 4. С помощью разложений функций в ряды Фурье удаётся найти суммы некоторых числовых рядов. Так, полагая в равенстве (16) $x = \frac{\pi}{2}$ и учитывая, что

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n - \text{чётное число}, \\ 1, & \text{если } n = 1, 5, 9, \dots, \\ -1, & \text{если } n = 3, 7, \dots, \end{cases}$$

приходим к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

а из равенства (17) при $x = 0$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x$ на сегменте $[0; 2\pi]$.

△ Так как данная функция рассматривается на сегменте $[0, 2\pi]$, то её коэффициенты Фурье a_n и b_n вычисляются по формулам, которые получаются из (2) и (3) заменой промежутка интегрирования $[-\pi, \pi]$ на $[0, 2\pi]$, т.е.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

По этим формулам получаем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} x d\sin nx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[x\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin nx dx\right] = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = -\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} x d\cos nx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left[x\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos nx dx\right] = -\frac{1}{\pi n}\left[2\pi - \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right] = -\frac{2}{n}.$$

Следовательно, тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x$ на сегменте $[0, 2\pi]$ имеет вид

$$\pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}. \tag{18}$$

Согласно теореме, аналогичной теореме 1 (см. замечание 3 после теоремы 1), во всех точках интервала $(0, 2\pi)$ сумма ряда (18) равна x, т.е.

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi, \tag{19}$$

а в точках $x = 0$ и $x = 2\pi$ сумма $S(x)$ ряда (18) равна $\frac{1}{2}\left[f(+0) + f(2\pi - 0)\right] = \frac{1}{2}[0 + 2\pi] = \pi$. Заметим, что равенства $S(0) = S(2\pi) = \pi$ следуют также непосредственно из выражения (18), поскольку $\sin nx = 0$ при $x = 0$ и $x = 2\pi$ для любого натурального n. ▲

Замечание. Равенство (19) является ещё одним (наряду с (16) и (17)) разложением функции $f(x) = x$ в тригонометрический ряд, причём на интервале $(0; \pi)$ выполняются все три равенства.

3. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x\cos x$ на сегменте $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

△ Данная функция рассматривается на сегменте вида $[-l, l]$, где $l = \frac{\pi}{2}$, поэтому её тригонометрический ряд Фурье имеет вид (5) при $l = \frac{\pi}{2}$, т.е.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos 2nx + b_n\sin 2nx,$$

а коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам (6) и (7) при $l = \frac{\pi}{2}$, т.е.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Так как функция $f(x) = x\cos x$ - нечётная, то $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а формулу для b_n запишем в виде

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2nx dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin 2nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x\right] dx.$$

Интеграл в правой части равенства разобьём на сумму двух слагаемых. Вычислим первое слагаемое:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2n+1)x dx = -\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x d\cos(2n+1)x =$$

$$= -\frac{1}{(2n+1)}\left[x\cos(2n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n+1)x dx\right] =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Аналогично для второго слагаемого получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2n-1)x dx = \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)^2} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}.$$

Следовательно,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\right] = \frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{\pi}\left[\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right] =$$

$$= \frac{16\cdot(-1)^{n-1}n}{\pi(4n^2-1)^2}.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x) = x\cos x$ на сегменте $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ имеет вид

$$\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx. \tag{20}$$

Заметим, что функция $f(x) = x\cos x$ удовлетворяет всем условиям теоремы о равномерной сходимости ряда Фурье (аналог теоремы 2 для случая, когда функция задана на сегменте $[-l, l]$). В самом деле, она является непрерывно дифференцируемой на сегменте $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ и удовлетворяет условию $f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})$ (оба эти значения равны нулю). Поэтому ряд (20) сходится равномерно к $f(x) = x\cos x$ на сегменте $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Отметим также, что тот факт, что в граничных точках сегмента $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ сумма ряда (20) равна соответственно $f(-\frac{\pi}{2})$ и $f(\frac{\pi}{2})$, легко обосновать и непосредственно без ссылки на указанную теорему), поскольку в этих точках каждое слагаемое ряда (20) и, значит, его сумма равны нулю, а $f(-\frac{\pi}{2})$ и $f(\frac{\pi}{2})$ также равны нулю. ▲

4. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x^2$ на сегменте $[-\pi, \pi]$.

$\triangle$ Решим эту задачу двумя способами.

1-й способ. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x) = x^2$ по формулам (2) и (3). Так как эта функция чётная, то $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, а для a_n формулу (2) запишем в виде

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

По этой формуле получаем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx dx = \frac{2}{\pi n}\left[x^2\sin nx\big|_0^\pi - \int_0^\pi 2x\sin nx dx\right] =$$
$$= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi x d\cos nx = \frac{4}{\pi n^2}\left[x\cos nx\big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos nx dx\right] =$$
$$= \frac{4}{\pi n^2}\left[\pi\cos n\pi - \frac{1}{n}\sin nx\big|_0^\pi\right] = \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x) = x^2$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет вид

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx. \tag{21}$$

Так как функция $f(x) = x^2$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 (проверьте это), то ряд (21) сходится равномерно к $f(x) = x^2$ на сегменте $[-\pi, \pi]$. Итак,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{22}$$

Второй способ. Воспользуемся разложением в ряд Фурье функции, равной x, на интервале $(-\pi, \pi)$ (см. пример 1):

$$x = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Согласно замечанию 4, сделанному после теоремы 1, этот ряд можно интегрировать почленно на сегменте $[-\pi, \pi]$, поэтому

$$\int_0^x x dx = 2\sum_{n=1}^\infty \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx dx, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

т.е.

$$\frac{x^2}{2} = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\big|_0^x = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\left(\cos nx - 1\right),$$

откуда получаем равенство

$$x^2 = A + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{23}$$

где $A = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ - сходящийся числовой ряд. Чтобы найти сумму этого числового ряда (т.е. найти число A), заметим, что равенство (23) представляет собой разложение функции $f(x) = x^2$ в тригонометрический ряд Фурье на сегменте $[-\pi, \pi]$, поэтому $A = \frac{a_0}{2}$, где a_0 - коэффициент Фурье данной функции, т.е. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$, и, значит, $A = \frac{\pi^2}{3}$, и равенство (23) принимает вид (22). ▲

Замечание. Попутным результатом наших вычислений является нахождение суммы числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, она равна $\frac{1}{4}A$, т.е. равна $\frac{\pi^2}{12}$. Используя равенство (22), найдём сумму ещё одного числового ряда. Полагая в этом равенстве $x = \pi$ и учитывая, что $(-1)^n \cos \pi n = (-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$, получаем равенство $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, откуда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x) = \ln(1 - 2q\cos x + q^2), \quad \text{где } |q| < 1, \quad \text{на сегменте } [-\pi, \pi].$$

△ Воспользуемся тем, что

$$2\cos x = e^{ix} + e^{-ix} = t + \frac{1}{t},$$

где $t = e^{ix}$, i - мнимая единица, и представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \ln\left(1 - q(t + \frac{1}{t}) + q^2 t \cdot \frac{1}{t}\right) = \ln\left((1 - qt)(1 - \frac{q}{t}\right) =$$

$$= \ln(1 - qt) + \ln(1 - \frac{q}{t}).$$

Так как $|qt| = |q| \cdot |t| = |q| < 1$, и также $|\frac{q}{t}| = |q| < 1$, то для любого $t = e^{ix}$, $x \in [-\pi, \pi]$ справедливы равенства (применяем формулу Тейлора):

$$\ln(1 - qt) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n t^n}{n}, \qquad \ln(1 - \frac{q}{t}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n t^{-n}}{n},$$

и, следовательно,

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}(t^n + t^{-n}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx.$$

Итак,

$$\ln(1 - 2q\cos x + q^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx, \quad |q| < 1. \tag{24}$$

Это и есть разложение функции $f(x) = \ln(1 - 2q\cos x + q^2)$ в тригонометрический ряд Фурье на сегменте $[-\pi, \pi]$. В силу теоремы 2 (проверьте, что $f(x)$ удовлетворяет всем условиям этой теоремы) ряд (24) сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. ▲

6. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx, \quad x \in (-\infty; +\infty), \tag{25}$$

и

$$f(x)=x, \;\; x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

а) Нарисовать график функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$.

б) Сходится ли ряд (25) равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$?

$\triangle$ Решим задачу двумя способами.

1-й способ а) Ряд (25) можно рассматривать как ряд Фурье вида (5) по тригонометрической системе на сегменте $[-l,l]$, причём число l определяется равенством $\frac{\pi n x}{l}=2nx$, т.е. $l=\frac{\pi}{2}$. На сегменте $[-l,l]=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ разложение $f(x)$ в ряд Фурье (25) содержит только синусы, поэтому функция $f(x)$ является нечётной функцией, а поскольку $f(x)=x$ при $x\in(0;\frac{\pi}{2})$, то

$$f(x)=x \;\text{ при }\; x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right). \tag{26}$$

В точках $x=-\frac{\pi}{2}$ и $x=\frac{\pi}{2}$ каждое слагаемое ряда (25) равно нулю, поэтому

$$f(-\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})=0. \tag{27}$$

Функция $f(x)$ на всей прямой является периодическим продолжением с периодом $2l=\pi$ функции $f(x)$, заданной на сегменте $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ формулами (26) и (27). Следовательно, на сегменте $[-\pi,\pi]$ график $f(x)$ имеет вид, представленный на рисунке 1.

б) Функция $f(x)$ разрывна в точках $x=-\frac{\pi}{2}$ и $x=\frac{\pi}{2}$, поэтому ряд (25), члены

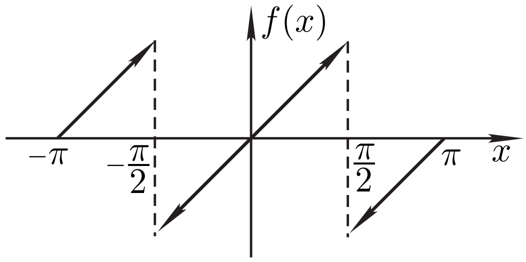


Рис. 1.

которого - непрерывные функции, сходится неравномерно на сегменте $[-\pi;\pi]$

2-й способ. а) Введём другое обозначение для коэффициентов ряда (25):

$$b_n=B_{2n}, \;\; n=1,2,\ldots.$$

Тогда равенство (25) запишется в виде

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{2n}\sin 2nx, \;\; x\in(-\infty,+\infty), \tag{28}$$

и ряд (28) можно рассматривать как ряд Фурье по тригонометрической системе на сегменте $[-\pi,\pi]$, у которого $a_n=0$, $n=0,1,2,\ldots$ (и, следовательно, $f(x)$ - нечётная функция), а также

$$B_{2n+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2n+1)xdx=0, \;\; n=0,1,2,\ldots. \tag{29}$$

Так как $f(x)$ и $\sin(2n+1)x$ - нечётные функции, то равенства (29) можно записать в виде

$$B_{2n+1}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2n+1)xdx=0, \;\; n=0,1,2,\ldots \tag{30}$$

Функция $g(x) := \sin(2n+1)x$ является чётной относительно середины сегмента $[0;\pi]$ - точки $x = \frac{\pi}{2}$ (т.е. $\forall x : g(\frac{\pi}{2}+x) = g(\frac{\pi}{2}-x)$, убедитесь в этом). Поэтому, чтобы равенство (30) выполнялось для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, подынтегральная функция в (30), и, значит, функция $f(x)$ должна быть нечётной относительно точки $x = \frac{\pi}{2}$, а поскольку $f(x) = x$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, то должно выполняться равенство

$$f(x) = x - \pi \ \text{ при } \ x \in (\frac{\pi}{2}, \pi).$$

Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0; \frac{\pi}{2}), \\ x - \pi, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \end{cases} \tag{31}$$

$f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi) = 0$ (это следует из (25)), а на сегменте $[-\pi, 0]$ функция $f(x)$ является нечётным продолжением на этот сегмент функции (31). Найденная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ совпадает с той, график которой изображён на рисунке 1.

б) Неравномерная сходимость ряда (25) на сегменте $[-\pi, \pi]$ устанавливается таким же образом, как в решении 1-м способом. ▲

7. Записать ряды Фурье функций $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = |x|$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ в комплексной форме.

△ По формуле (11) находим коэффициенты c_n для функции $f_1(x) = x$:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\cos nx - i\sin nx)dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx - i\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx\right), \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = 0$, так как подынтегральная функция - нечётная, а интеграл $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx$ был вычислен в п. а) примера 1, он равен $\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$. Поэтому

$$c_n = -i\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{(-1)^n i}{n}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Следовательно, в комплексной форме ряд Фурье функции $f_1(x) = x$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет вид

$$\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{n} e^{inx}.$$

Отметим, что, согласно доказанному в п. а) примера 1, сумма этого ряда равна $f_1(x) = x$ для любого x из интервала $(-\pi, \pi)$ и равна нулю при $x = -\pi$ и при $x = \pi$.

Для функции $f_2(x) = |x|$ по формуле (11) получаем:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{\pi}{2},$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\bigg(\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx dx -$$

$$-i\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nxdx\Big),\quad n=\pm1,\pm2,\ldots.$$

Так как (см. вычисления в п. б) примера 1)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx=\begin{cases}-\frac{4}{\pi n^2}, & \text{если}\ \ n=2k-1,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots\\ 0, & \text{если}\ \ n=2k,\quad k=\pm1,\pm2,\ldots,\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nxdx=0,\quad n=\pm1,\pm2,\ldots,$$

то

$$c_n=\begin{cases}-\frac{2}{\pi n^2}, & \text{если}\ \ n=2k-1,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots,\\ 0, & \text{если}\ \ n=2k,\quad k=\pm1,\pm2,\ldots.\end{cases}$$

Следовательно, в комплексной форме ряд Фурье для функции $f_2(x)=|x|$ на сегменте $[-\pi,\pi]$ имеет вид

$$\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(2k-1)x}}{(2k-1)^2}.$$

Как было отмечено в п. б) примера 1, сумма этого ряда равна $f_2(x)=|x|$ для любого x из сегмента $[-\pi,\pi]$. ▲

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Какие из следующих функций являются кусочно - гладкими на данном сегменте:

а) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\in[-1,1[,\quad x\neq0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ б) $f(x)=\operatorname{Sgn}x=\begin{cases}-1, & -1\le x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x\le1;\end{cases}$

в) $f(x=|\sin x|,\quad x\in[0,4\pi]$; г) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le0,\\ \sqrt{x|\cos x|}, & 0<x\le\pi;\end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le0,\\ \sqrt{x\cdot\sin x}, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

2. Докажите, что тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$, являющейся тригонометрическим многочленом на сегменте $[-\pi,\pi]$, совпадает с этим многочленом.

3. Найдите разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на заданном сегменте:
а) $f(x)=\operatorname{Sgn}x,\quad x\in[-\pi;\pi]$; б) $f(x)=\frac{\pi-x}{2},\quad x\in[0;2\pi]$;
в) $f(x)=x^2,\quad x\in[0;2\pi]$; г) $f(x)=|\sin x|,\quad x\in[-\pi;\pi]$;
д) $f(x)=\sin^6x+\cos^6x,\quad x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$; е) $f(x)=x\cos x,\quad x\in[-\pi;\pi]$,
и укажите, для каких значений x сумма ряда равна $f(x)$.

4. Используя разложения функций x и x^2 в тригонометрические ряды Фурье на сегменте $[-\pi;\pi]$ (см примеры 1 и 4), найдите с помощью почленного интегрирования разложения в ряды Фурье функций x^3 и x^4 на этом сегменте.

5. Используя равенства

$$\cos x=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}),\quad \sin x=\frac{1}{2i}(t-\frac{1}{t}),$$

где $t = e^{ix}$, i - мнимая единица, найдите разложение в тригонометрический ряд Фурье на сегменте $[-\pi;\pi]$ функции:

$$\text{а)}\ \ f(x) = \frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} \qquad (|q|<1);$$

$$\text{б)}\ \ f(x) = \frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2} \qquad (|q|<1);$$

$$\text{в)}\ \ f(x) = \frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2} \qquad (|q|<1).$$

6. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n+1)x, \quad x \in (-\infty;+\infty), \tag{32}$$

и

$$f(x) = x, \quad x \in (0;\frac{\pi}{2}). \tag{33}$$

Нарисуйте график функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi;\pi]$. Сходится ли ряд (32) равномерно на сегменте $[-\pi;\pi]$?

7. Решите задачу 6, заменив условие (32) одним из условий а) и б):

$$\text{а)}\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2nx, \quad x \in (-\infty;+\infty),$$

$$\text{б)}\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2n+1)x, \quad x \in (-\infty;+\infty),$$

и сохранив условие (33).

§2. Ряды Фурье в бесконечномерном евклидовом пространстве

Основные понятия и теоремы

1. Бесконечномерное евклидово пространство. Понятие линейного пространства нам известно из курса линейной алгебры. Линейное пространство называется *бесконечномерным*, если в нём имеется любое (как угодно большое) число линейно независимых элементов.

Определение. Линейное пространство (над полем вещественных чисел) называется *евклидовым*, если в нём введено *скалярное произведение* элементов, т.е. каждым двум элементам f и g поставлено в соответствие вещественное число (будем обозначать его (f,g) и называть скалярным произведением элементов f и g) так, что для любых элементов f, g, h и любых вещественных чисел α и β выполнены условия:

1)$(f,g) = (g,f)$;

2)$(f,f) \geq 0$, причём равенство нулю имеет место только для нулевого элемента линейного пространства;

3)$(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$.

Пример. Рассмотрим множество всех кусочно - непрерывных на сегменте $[a,b]$ функций, таких, что значение любой функции $f(x)$ в точке x_0 разрыва равно $\frac{1}{2}\left[f(x_0-0)+f(x_0+0)\right]$. Это множество является линейным пространством с обычными операциями сложения двух функций и умножения функции на вещественное число. Нулевым элементом данного пространства является функция, равная нулю во всех точках сегментах $[a,b]$. Это линейное пространство - бесконечномерное (для любого натурального n функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ - линейно независимы, и, следовательно, в этом пространстве имеется как угодно большое число линейно независимых элементов).

Введём скалярное произведение элементов $f(x)$ и $g(x)$ по формуле

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Нетрудно проверить (сделайте это), что условия 1) - 3) из определения скалярного произведения выполнены. Описанное бесконечномерное евклидово пространство обозначим $Q[a,b]$

Напомним понятие нормированного пространства

Определение. Линейное пространство называется *нормированным*, если каждому элементу f этого пространства поставлено в соответствие неотрицательное число (оно называется *нормой* элемента и обозначается $||f||$) так, что для любых элементов f, g и любого вещественного числа α выполнены условия:

1)$||f|| \geq 0$, причём равенство нулю имеет место только для нулевого элемента пространства;

2)$||\alpha f|| = |\alpha| \cdot ||f||$;

3)$||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$ (это неравенство называется *неравенством треугольника* или *неравенством Минковского*).

Во всяком евклидовом пространстве можно ввести норму элементов с помощью скалярного произведения: для любого элемента f

$$||f|| = (f,f)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Нетрудно проверить (сделайте это), что условия 1) - 3) из определения нормы будут выполнены.

Пример. В пространстве $Q[a,b]$ введённая таким образом норма элемента $f(x)$ имеет вид

$$||f|| = \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Определение. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ элементов нормированного пространства сходится к элементу f *по норме данного пространства*, если

$$||f_n - f|| \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty$$

(другими словами, если числовая последовательность $||f_n - f||$ является бесконечно малой).

Норма разности элементов f_n и f называется также *отклонением* элемента f_n от элемента f по норме данного пространства.

Пример. Сходимость последовательности функций $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ по норме пространства $Q[a,b]$ означает, что

$$||f_n - f||^2 = \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty,$$

т.е. сходимость по норме пространства $Q[a,b]$ есть сходимость в среднем на сегменте $[a,b]$.

2. Ортогональные системы. Элементы f и g евклидова пространства называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю: $(f, g) = 0$.

Определение. Последовательность $\{\psi_n\} = \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ элементов евклидова пространства называется *ортогональной системой*, если её элементы попарно ортогональны, т.е.

$$(\psi_i, \psi_j) = 0 \ \text{ при } \ i \neq j.$$

Ортогональная система $\{\psi_n\}$ называется *ортонормированной*, если норма каждого её элемента равна 1.

Таким образом, элементы ортонормированной системы удовлетворяют условию:

$$(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{если } \ i = j, \\ 0, & \text{если } \ i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots.$$

Если $\{\psi_n\}$ - ортогональная система, состоящая из ненулевых элементов, то, умножив каждый её элемент ψ_n на число $\frac{1}{||\psi_n||}$, получим ортонормированную систему $\left\{\frac{\psi_n}{||\psi_n||}\right\}$.

Пример. В пространстве $Q[-\pi, \pi]$ (и также в пространстве $Q[0; 2\pi]$) тригонометрическая система

$$\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$$

является ортогональной системой, а соответствующей ортонормированной системой является последовательность

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots\right\}.$$

3. Ряд Фурье по ортогональной системе. Пусть $\{\psi_n\}$ - ортогональная система в бесконечномерном евклидовом пространстве, f - какой-нибудь элемент этого пространства. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\psi_n = f_1\psi_1 + f_2\psi_2 + \ldots + f_n\psi_n + \ldots,$$

где f_n - числа, определённые равенством

$$f_n = \frac{(f, \psi_n)}{||\psi_n||^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

называется *рядом Фурье элемента* f *по ортогональной системе* $\{\psi_n\}$, а числа f_n называются *коэффициентами Фурье* элемента f.

Если система $\{\psi_n\}$ - ортонормированная, то формула (2) принимает более простой вид:

$$f_n = (f, \psi_n), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Определение. Говорят, что *ряд Фурье* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\psi_n$ *сходится к элементу* f *по норме данного пространства*, если

$$||S_n - f|| \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty,$$

где

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k$$

- частичная сумма ряда Фурье элемента f.

Зафиксируем число n и наряду с частичной суммой S_n ряда Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\psi_n\}$ будем рассматривать всевозможные линейные комбинации вида

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k, \tag{3}$$

где c_k - произвольные числа. Оказывается, что среди всех таких линейных комбинаций частичная сумма S_n, входящая во множество этих линейных комбинаций, выделяется следующим *экстремальным свойством.*

Теорема 6. *При фиксированном n из всех линейных комбинаций вида (3) наименьшее отклонение от элемента f по норме данного евклидова пространства имеет частичная сумма S_n ряда Фурье этого элемента.*

Для квадрата отклонения суммы $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k$ от элемента f справедливо равенство

$$||\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2||\psi_k||^2. \tag{4}$$

Это равенство называется *тождеством Бесселя.* Из него следует, что для любого элемента f числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_n^2||\psi_n||^2$ (где $f_n = \frac{(f,\psi_n)}{||\psi_n||^2}$ - коэффициенты Фурье элемента f) сходится, и его сумма удовлетворяет неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2||\psi_n||^2 \le ||f||^2. \tag{5}$$

Это неравенство называется *неравенством Бесселя.* В случае ортонормированной системы $\{\psi_n\}$ тождество Бесселя и неравенство Бесселя принимают вид

$$||\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \qquad \text{(тождество Бесселя)}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le ||f||^2 \qquad \text{(неравенство Бесселя).}$$

Пример. В пространстве $Q[-\pi,\pi]$ рассмотрим ряд Фурье кусочно - непрерывной функции $f(x)$ по тригонометрической системе

$$\{1, \cos nx, \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots\}:$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Знак $\sim$ означает, что функции $f(x)$ поставлен в соответствие её ряд Фурье по данной системе. Этот ряд может и не сходиться, поскольку функция $f(x)$ только кусочно - непрерывная, а не кусочно - гладкая. Так как

$$||1||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \quad ||\cos nx||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \quad ||\sin nx||^2 = \pi,$$

то неравенство Бесселя в данном примере имеет вид

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \pi(a_n^2 + b_n^2) \le ||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,$$

откуда, разделив на π, получаем неравенство

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx. \tag{6}$$

4. Замкнутые системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

Определение. Ортогональная система $\{\psi_n\}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве называется *замкнутой*, если любой элемент этого пространства можно приблизить с произвольной точностью по норме данного пространства с помощью конечной линейной комбинации элементов системы $\{\psi_n\}$, т.е. для любого элемента f и для любого $\varepsilon>0$ существует линейная комбинация $\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k$, такая, что

$$||\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k-f||<\varepsilon.$$

Отметим, что это неравенство в силу теоремы 6 обеспечивает выполнение неравенства

$$||\sum_{k=1}^{n}f_k\psi_k-f||<\varepsilon, \tag{7}$$

где f_k - коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}$.

Теорема 7 (необходимое и достаточное условие замкнутости ортогональной системы). *Для того, чтобы ортогональная система $\{\psi_n\}$ была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента f выполнялось равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n^2||\psi_n||^2=||f||^2, \tag{8}$$

где $f_n=\frac{(f,\psi_n)}{||\psi_n||^2}$ - коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}$.

Равенство (8) называется *равенством Парсеваля.* Можно сказать, что в случае, когда ортогональная система является замкнутой, неравенство Бесселя (5) для любого элемента евклидова пространства переходит в равенство Парсеваля (8).

Теорема 8. *Если ортогональная система $\{\psi_n\}$ - замкнутая, то для любого элемента f его ряд Фурье по системе $\{\psi_n\}$ сходится к этому элементу по норме данного пространства, т.е.*

$$||\sum_{k=1}^{n}f_\kappa\psi_\kappa-f||\to 0 \ \ \textit{при} \ \ n\to\infty.$$

Теорема 9. *Тригонометрическая система $\{1,\cos nx,\sin nx,\quad n=1,2,\ldots\}$ является замкнутой в пространстве $Q[-\pi,\pi]$.*

Следствия из теоремы 9. 1. *Для любой кусочно - непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ её тригонометрический ряд Фурье сходится к $f(x)$ по норме пространства $Q[-\pi,\pi]$, т.е. сходится к $f(x)$ в среднем на сегменте $[-\pi,\pi]$.*

2. *Для любой кусочно - непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ справедливо равенство Парсеваля (иначе говоря, знак $\le$ в неравенстве Бесселя (6) нужно заменить на знак $=$):*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx;$$

здесь a_n, b_n *- коэффициенты Фурье функции* $f(x)$ *по тригонометрической системе* $\{1, \cos nx, \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots\}$.

5. Полные системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

Определение. Ортогональная система $\{\psi_n\}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве называется *полной*, если единственным элементом, ортогональным ко всем элементам ψ_n данной системы является нулевой элемент пространства.

Теорема 10. *Любая замкнутая система является полной.*

Теорема 11. *Если система* $\{\psi_n\}$ *полная, то два различных элемента не могут иметь одинаковые ряды Фурье по этой системе.*

Замечание. Понятия замкнутой и полной систем можно ввести и для конечномерных евклидовых пространств (с помощью таких же определений, как и для бесконечномерных пространств).

Согласно теореме 10 в любом бесконечномерном евклидовом пространстве замкнутая система является полной. Это утверждение верно и для конечномерных евклидовых пространств (доказательство такое же). Более того, для конечномерных евклидовых пространств верно и обратное утверждение: любая полная система является замкнутой. Но для бесконечномерных пространств это не так: можно привести пример полной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве, которая не является замкнутой (см. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Ч. II. Москва. Физматлит. 2009 (стр. 389)).

Среди бесконечномерных евклидовых пространств особое место занимают *гильбертовы пространства.* Гильбертово пространство — это линейное бесконечномерное евклидово *полное сепарабельное* пространство. Эпитеты «линейное», «бесконечномерное», «евклидово» нам известны — мы знаем, что они означают.

Полное нормированное пространство — это такое пространство, в котором любая фундаментальная последовательность элементов сходится по норме пространства к некоторому элементу этого пространства.

Сепарабельность нормированного пространства означает, что в этом пространстве существует *счётное всюду плотное* (в смысле нормы пространства) множество элементов. Множество называется всюду плотным в данном нормированном пространстве, если любой элемент пространства можно представить как предел (по норме пространства) последовательности элементов этого множества. Например, множество рациональных чисел является счётным всюду плотным множеством на числовой прямой.

В отношении гильбертовых пространств справедливы следующие утверждения.

1. В гильбертовом пространстве понятия замкнутости и полноты ортогональной системы эквивалентны.

2. В гильбертовом пространстве существуют замкнутые системы.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения:

а) бесконечномерного линейного пространства;

б) евклидова пространства;

в) нормированного пространства.

Приведите примеры таких пространств.

2. Как вводятся скалярное произведение и норма элементов в пространстве $Q[a, b]$?

3. Сформулируйте определение сходимости последовательности элементов нормированного пространства.

4. Что представляет собой сходимость последовательности функций по норме пространства $Q[a, b]$?

5. Сформулируйте определения ортогональной и ортонормированной систем в евклидовом пространстве. Приведите примеры таких систем.

6. Что такое ряд Фурье элемента евклидова пространства по ортогональной системе? Напишите общую формулу для коэффициентов Фурье данного элемента, а также формулу в случае пространства $Q[a, b]$.

7. Сформулируйте определение сходимости ряда Фурье данного элемента евклидова пространства. Что представляет собой сходимость ряда Фурье элемента пространства $Q[a, b]$?

8. В чём состоит экстремальное свойство частичной суммы ряда Фурье элемента евклидова пространства?

9. Что такое тождество Бесселя? Напишите его для случая тригонометрической системы.

10. Напишите неравенство Бесселя и проведите его обоснование.

11. Сформулируйте определение замкнутой системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

12. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии замкнутости ортогональной системы. Напишите это условие (равенство Парсеваля) для случая ортонормированной системы.

13. Сформулируйте теорему о сходимости ряда Фурье по замкнутой системе.

14. Сформулируйте теорему о замкнутости тригонометрической системы.

15. Сформулируйте утверждение о сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно - непрерывной функции на сегменте $[-\pi, \pi]$ и напишите соответствующее равенство Парсеваля.

16. Сформулируйте определение полной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве. Приведите пример полной системы.

17. Как связаны между собой замкнутость и полнота ортонормированной системы?

Примеры решения задач

1. Доказать, что последовательность функций

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots\}$$

является ортогональной системой в пространстве $Q[0; \pi]$, и получить формулы для коэффициентов Фурье элемента $f(x)$ пространства $Q[0; \pi]$ по этой системе.

$\triangle$ Сначала докажем, что элементы данной системы попарно ортогональны, т.е. для любых двух функций из данной последовательности интеграл от их произведения по сегменту $[0; \pi]$ равен нулю.

Если одна из функций равна 1, а другая равна $\cos nx$ ($n = 1, 2, \ldots$), то

$$\int_0^\pi 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^\pi = 0.$$

Если одна из функций равна $\cos nx$, а другая $\cos mx$ $(n, m = 1, 2, \ldots, \quad n \neq m)$, то

$$\int_0^\pi \cos nx \cdot \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x + \frac{1}{n-m}\sin(n-m)x\right)\Big|_0^\pi = 0.$$

Итак, элементы данной системы попарно ортогональны, и, значит, эта система - ортогональная в пространстве $Q[0;\pi]$.

Ряд Фурье кусочно - непрерывной на сегменте $[0;\pi]$ функции $f(x)$ (т.е. элемента пространства $Q[0;\pi]$ по данной ортогональной системе запишем в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Коэффициенты этого ряда (т.е. коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по данной ортогональной системе) вычисляются по формуле (2), т.е. в данном случае

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, \psi_0)}{||\psi_0||^2}, \quad a_n = \frac{(f, \psi_n)}{||\psi_n||^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\psi_0 = 1$, $\psi_n = \cos nx$, $n = 1, 2, \ldots$, $(f, \psi_n) = \int_0^\pi f(x)\psi_n(x)dx$,

$$||\psi_0||^2 = \int_0^\pi 1^2 dx = \pi, \quad ||\psi_n||^2 = \int_0^\pi \cos^2 nx dx = \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots. \ \blacktriangle \qquad (9)$$

2. Обосновать тождество Бесселя (см. (4)).

$\triangle$ Используя формулу нормы элемента евклидова пространства (см. (1)) и попарную ортогональность элементов ортогональной системы $\{\psi_n\}$, получаем:

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right|\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f, \ \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k, \ \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k\right) - 2\left(f, \ \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k\right) + (f, f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_k^2(\psi_k, \psi_k) - 2\sum_{k=1}^{n} f_k(f, \psi_k) + (f, f).$$

Так как $(\psi_k, \psi_k) = ||\psi_k||^2$, $(f, \psi_k) = f_k||\psi_k||^2$ (см. (2)) и $(f, f) = ||f||^2$, то

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right|\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} f_k^2||\psi_k||^2 - 2\sum_{k=1}^{n} f_k^2||\psi_k||^2 + ||f||^2 =$$

$$= ||f||^2 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2||\psi_k||^2.$$

Получили тождество Бесселя. $\blacktriangle$

3. Доказать утверждение теоремы 7, относящееся к слову «необходимо».

△ Требуется доказать, что если ортогональная система $\{\psi_n\}$ - замкнутая, то для любого элемента f евклидова пространства выполняется равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 ||\psi_n||^2 = ||f||^2, \tag{8}$$

где f_n - коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}$.

Воспользуемся тождеством Бесселя для элемента f:

$$\left|\left| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right|\right|^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 ||\psi_k||^2. \tag{4}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как система $\{\psi_n\}$ замкнутая, то найдётся такое n (обозначим его N), для которого левая часть равенства (4) будет меньше ε. Отсюда следует, что при $n \geq N$ правая часть равенства (4) также будет меньше ε. Кроме того, правая часть равенства неотрицательна для любого n (поскольку неотрицательна левая часть равенства). Таким образом, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N$, такое, что $\forall\ n \geq N$ выполняются неравенства

$$0 \leq ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 ||\psi_k||^2 < \varepsilon.$$

Это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 ||\psi_k||^2$ сходится, и его сумма равна $||f||^2$, т.е. справедливо равенство Парсеваля (8), что и требовалось доказать. ▲

4. Доказать, что разложение любого элемента евклидова пространства в ряд по данной замкнутой системе, сходящийся к этому элементу по норме пространства, единственно.

△ Допустим, что какой-то элемент f наряду с разложением в ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} f_n \psi_n$ по замкнутой системе $\{\psi_n\}$, сходящийся к этому элементу по норме пространства в силу теоремы 8, имеет ещё одно разложение в ряд по этой системе $\sum_{k=1}^{\infty} f'_n \psi_n$, также сходящийся к элементу f по норме пространства. Тогда по определению сходимости ряда

$$\left|\left| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right|\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

и

$$\left|\left| \sum_{k=1}^{n} f'_k \psi_k - f \right|\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

а так как

$$\left|\left| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - \sum_{k=1}^{n} f'_k \psi_k \right|\right| \leq \left|\left| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right|\right| + \left|\left| \sum_{k=1}^{n} f'_k \psi_k - f \right|\right|$$

(в силу неравенства треугольника для нормы), то

$$\left|\left| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - \sum_{k=1'}^{n} f'_k \psi_k \right|\right| = \left|\left| \sum_{k=1}^{n} (f_k - f'_k) \psi_k \right|\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

и, значит,

$$\left|\left| \sum_{k=1}^{n} (f_k - f'_k) \psi_k \right|\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} (f_k - f'_k)^2 ||\psi_k||^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда, очевидно, следует, что $(f_k - f'_k)^2 = 0 \; \forall \; k$, т.е. $f'_k = f_k \; \forall \; k$, чпо и доказывает сформулированное утверждение. ▲

5. Доказать, что последовательность функций

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots\} \tag{10}$$

является замкнутой системой в пространстве $Q[0;\pi]$.

△ Ортогональность данной системы доказана в примере 1. Согласно определению замкнутой системы нужно ещё доказать, что любую кусочно - непрерывную на сегменте $[0;\pi]$ функцию $f(x)$ можно приблизить с произвольной точностью по норме пространства $Q[0;\pi]$ с помощью конечной линейной комбинации функций системы (10), т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся тригонометрический многочлен вида

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \cos kx, \tag{11}$$

такой, что

$$\Big|\Big| T(x) - f(x) \Big|\Big| = \left(\int_0^\pi \left[T(x) - f(x)\right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \tag{12}$$

Продолжим функцию $f(x)$ на сегменте $[-\pi;0]$ чётным образом, т.е. введём чётную функцию $F(x)$, $x \in [-\pi;\pi]$, так, что

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \;\; \text{при} \;\; 0 \le x \le \pi, \\ f(-x) \;\; \text{при} \;\; -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

Функция $F(x)$ является кусочно - непрерывной на сегменте $[-\pi;\pi]$, и её тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{13}$$

где коэффициенты a_n вычисляются по формулам (9).

Согласно следствию 1 из теоремы 9 этот ряд сходится в среднем к функции $F(x)$ на сегменте $[-\pi;\pi]$, т.е.

$$\Big|\Big| S_n(x) - F(x) \Big|\Big| = \left(\int_{-\pi}^\pi \left[S_n(x) - F(x)\right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \;\; \text{при} \;\; n \to \infty,$$

где $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$ - частичная сумма ряда (13). Отсюда следует, что

$$\left(\int_0^\pi \left[S_n(x) - F(x)\right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\pi \left[S_n(x) - f(x)\right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \;\; \text{при} \;\; n \to \infty,$$

и, значит, $\forall \;\; \varepsilon > 0 \;\; \exists n$, такое, что

$$\left(\int_0^\pi \left[S_n(x) - f(x)\right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Но $S_n(x)$ является тригонометрическим многочленом вида (11). Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен вида (11), для которого выполняется неравенство (12). Тем самым доказано, что система (10) является замкнутой в пространстве $Q[0;\pi]$. ▲

6. Пусть $f(x)$ - кусочно - непрерывная функция на сегменте $[0;\pi]$, c_k - произвольные числа ($k=1,2,\ldots,n$),

$$F(c_1,c_2,\ldots,c_n)=\int_0^{\pi}\left[f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\cos kx\right]^2 dx.$$

Найти: а) $Z_n := \min\limits_{\substack{c_k\in\mathbb{R}\\(k=1,2,\ldots,n)}} F(c_1,c_2,\ldots,c_n)$, $n=1,2,\ldots$, б) $\lim_{n\to\infty} Z_n$.

$\triangle$ а) Последовательность функций

$$1,\cos x,\cos 2x,\ldots,\cos nx,\ldots \tag{10}$$

является ортогональной системой в пространстве $Q[0;\pi]$ (это доказано в примере 1). Коэффициенты Фурье a_k функции $f(x)$ по этой системе вычисляются по формулам (9). Согласно теореме 6 функция $F(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ имеет наименьшее значение Z_n, если

$$c_k=a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos kx dx,\quad k=1,2,\ldots,n,$$

и это наименьшее значение можно записать в виде (см. (4))

$$Z_n=||f||^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2||\cos kx||^2=\int_0^{\pi}f^2(x)dx-\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

б) Так как последовательность (10) является замкнутой системой в пространстве $Q[0,\pi]$ (это доказано в примере 5), то для функции $f(x)$ справедливо равенство Парсеваля, имееющее вид

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right)=\int_0^{\pi}f^2(x)dx.$$

Отсюда, используя выражение (9) для a_0, получаем

$$\int_0^{\pi}f^2(x)dx-\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2=\frac{\pi a_0^2}{4}=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}f(x)dx\right)^2,$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}Z_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}f(x)dx\right)^2.\ \blacktriangle$$

7. Доказать, что любая замкнутая система является полной (теорема 10).

$\triangle$ Пусть $\{\psi_n\}$ - замкнутая система в данном евклидовом пространстве, и пусть элемент f пространства ортогонален всем элементам системы $\{\psi_n\}$. Согласно определению полной системы требуется доказать, что f - нулевой элемент пространства.

Воспользуемся равенством Парсеваля для элемента f:

$$||f||^2=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^2||\psi_n||^2,$$

где $f_n=\frac{(f,\psi_n)}{||\psi_n||^2}$ - коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}$. Так как элемент f ортогонален ψ_n для любого n, то $(f,\psi_n)=0$, поэтому $f_n=0$ для любого n, и, значит, $||f||=0$.

Отсюда следует, согласно свойству нормы, что f - нулевой элемент пространства, что и доказывает полноту системы $\{\psi_n\}$. $\blacktriangle$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

8. Докажите, что в евклидовом пространстве можно ввести норму элементов по формуле
$$||f|| = (f,f)^{\frac{1}{2}}.$$

9. Докажите, что последовательность функций
$$\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots\}$$
является ортогональной системой в пространстве $Q[0;\pi]$, и получите формулы для коэффициентов Фурье элемента $f(x)$ пространства $Q[0;\pi]$ по этой системе.

10. Докажите теорему 6 (об экстремальном свойстве частичной суммы ряда Фурье данного элемента евклидова пространства по ортогональной системе).

11. Используя тождество Бесселя (4), обоснуйте неравенство Бесселя (5).

12. Докажите утверждение теоремы 7, относящееся к слову «достаточно».

13. Докажите теорему 8.

14. Докажите, что последовательность функций
$$\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots\}$$
является замкнутой в пространстве $Q[0;\pi]$.

15. Пусть $f(x)$ - кусочно - непрерывная функция на сегменте $[0;\pi]$, c_k - произвольные числа $(k = 1, 2, \dots, n)$,
$$F(c_1, c_2, \dots, c_n) = \int_0^\pi \left(f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \sin kx \right)^2 dx.$$

Найдите: а) $Z_n := \min\limits_{\substack{c_k \in \mathbb{R} \\ (k=1,2,\dots,n)}} F(c_1, c_2, \dots, c_n)$, $n = 1, 2, \dots$, б) $\lim_{n\to\infty} Z_n$.

16. Пусть $f(x)$ - кусочно - непрерывная на сегменте $[-\pi;\pi]$ чётная функция, c_k - произвольные числа $(k = 1, 2, \dots, n)$,
$$F(c_1, c_2, \dots, c_n) = \int_{-\pi}^\pi \left(f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \sin kx \right)^2 dx.$$

Найдите $\min\limits_{\substack{c_k \in \mathbb{R} \\ (k=1,\dots,n)}} F(c_1, c_2, \dots, c_n)$.

17. Докажите теорему 11.

§3. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

Основные понятия и теоремы

1. Интеграл Фурье

Определение. Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой* на числовой прямой, если несобственный интеграл
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$
сходится.

Определение. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на числовой прямой. Интеграл
$$\int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] \, d\lambda, \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{1}$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad \lambda \geq 0, \tag{2}$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt, \quad \lambda \geq 0, \tag{3}$$

называется *интегралом Фурье* функции $f(x)$.

Отметим, что оба несобственных интеграла $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ сходятся, так как функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на числовой прямой.

Разложение функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \tag{4}$$

в физике называют *разложением по гармоникам*, а функции $\cos \frac{\pi n x}{l}$ и $\sin \frac{\pi n x}{l}$ называют *гармониками*. Амплитуды гармоник в разложении (4) равны a_n и b_n, а частоты гармоник $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$ образуют бесконечно большую последовательность. По аналогии с этим можно сказать, что представление функции $f(x)$ в виде интеграла Фурье (1) является разложением этой функции по гармоникам $\cos \lambda x$ и $\sin \lambda x$ с частотой λ, изменяющейся непрерывно от 0 до $+\infty$, и амплитудами $a(\lambda)d\lambda$ и $b(\lambda)d\lambda$.

Подставив в (1) выражения (2) и (3) для $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ и воспользовавшись тем, что $\cos \lambda t \cos \lambda x + \sin \lambda t \sin \lambda x = \cos \lambda(t - x)$, получим, что функции $f(x)$ сопоставляется интеграл Фурье

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t - x) dt. \tag{5}$$

Следующая теорема указывает условия, при которых знак $\sim$ можно заменить на знак равенства.

Теорема 12 (о представлении функции в виде интеграла Фурье). *Если функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является кусочно - гладкой на любом сегменте и абсолютно интегрируема на числовой прямой, то в каждой точке $x \in (-\infty, +\infty)$ интеграл (5) сходится и равен $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$, в частности, в точках непрерывности $f(x)$ справедливо равенство*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t - x) dt. \tag{6}$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы 12 и является чётной, то

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad b(\lambda) = 0, \quad \lambda \geq 0,$$

и в точках непрерывности $f(x)$ равенство (6) принимает вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \cos \lambda x d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \tag{7}$$

а если $f(x)$ - нечётная функция, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \sin \lambda x d\lambda \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt. \tag{8}$$

Если функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на полупрямой $[0, +\infty)$ и является кусочно - гладкой на любом сегменте этой полупрямой, то в точках непрерывности её можно представить как в виде (7), так и в виде (8), продолжив $f(x)$ на полупрямую $(-\infty, 0)$ в первом случае чётным, а во втором - нечётным образом.

2. Преобразование Фурье. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы 12. Для упрощения записи будем считать, что в точках разрыва $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$. Тогда для любого $x \in (-\infty, +\infty)$ имеет место равенство (6) - представление функции $f(x)$ в виде интеграла Фурье. Это представление можно записать иначе, используя *комплексную форму* интеграла Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt, \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{9}$$

здесь i - мнимая единица, $e^{i\lambda(x-t)} = \cos\lambda(x-t) + i\sin\lambda(x-t)$. При этом следует иметь в виду, что внутренний интеграл (по переменной t) понимается как обычный несобственный интеграл (он сходится абсолютно), а внешний несобственный интеграл (по переменной λ) понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt \right] d\lambda = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt \right] d\lambda.$$

Введём обозначение

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty). \tag{10}$$

Тогда равенство (9) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{11}$$

где несобственный интеграл понимается в смысле главного значения.

Определение. Функция $\hat{f}(\lambda)$, определённая формулой (10), называется *образом Фурье* функции $f(x)$, а переход от функции $f(x)$ к функции $\hat{f}(\lambda)$ по формуле (10) называется *преобразованием Фурье* функции $f(x)$. Функция $f(x)$ по отношению к своему образу $\hat{f}(\lambda)$ называется *оригиналом*, а переход от образа $\hat{f}(\lambda)$ к оригиналу $f(x)$ по формуле (11) называется *обратным преобразованием Фурье* или *восстановлением оригинала по его образу.*

Обратимся снова к вещественной форме интеграла Фурье (см. (6)). Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы 12 и является чётной, то равенство (6) принимает вид (7).

Введём обозначение

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos\lambda t dt. \tag{12}$$

Тогда равенство (7) можно записать в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\lambda) \cos\lambda x d\lambda. \tag{13}$$

Формула (12) называется *косинус - преобразованием Фурье* функции $f(x)$, а формула (13) - *обратным косинус - преобразованием Фурье.*

Если же функция $f(x)$ является нечётной, то равенство (6) принимает вид (8). Введя функцию

$$\hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin\lambda t dt, \tag{14}$$

запишем (8) в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(\lambda) \sin\lambda x d\lambda. \tag{15}$$

Формула (14) называется *синус- - преобразованием Фурье* функции $f(x)$, а формула (15) - *обратным синус - преобразованием Фурье.*

Если функция $f(x)$ задана на полупрямой $[0, +\infty)$, то её можно продолжить на полупрямую $(-\infty, 0)$ как чётным, так и нечётным образом, и в соответствии с этим рассматривать либо косинус - преобразование Фурье, либо синус - преобразование Фурье функции $f(x)$.

Контрольные вопросы и задания

1. В каком случае функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на числовой прямой?

2. Напишите выражение для интеграла Фурье функции $f(x)$ и дайте его физическую интерпетацию.

3. Сформулируйте теорему о представлении функции в виде интеграла Фурье.

4. Исходя из представления функции в виде интеграла Фурье, получите выражения для интегралов Фурье чётной и нечётной функций.

5. Напишите выражение для интеграла Фурье в комплексной форме и объясните, как понимаются несобственные интегралы в этом выражении.

6. Исходя из комплексной формы интеграла Фурье, получите формулы преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье.

7. Исходя из представления чётной функции в виде интеграла Фурье, получите формулы косинус - преобразования Фурье и обратного косинус - преобразования Фурье.

9. Исходя из представления нечётной функции в виде интеграла Фурье, получите формулы синус - преобразования Фурье и обратного синус - преобразования Фурье.

Примеры решения задач

1. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{если } \ x < 0 \ \text{ и } \ x > 1. \end{cases}$$

$\triangle$ Интеграл Фурье функции $f(x)$ (обозначим его $F(x)$) выражается формулой (см. (1))

$$F(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\, d\lambda.$$

Функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ находим по формулам (2) и (3):

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos\lambda x dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{\sin\lambda}{\lambda}, & \lambda > 0, \\ \frac{1}{\pi}, & \lambda = 0, \end{cases}$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin\lambda x dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x + \frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\right) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda x + \sin\lambda(1-x)}{\lambda} d\lambda. \tag{16}$$

Согласно теореме 12

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \neq 0 \text{ и } x \neq 1, \\ \frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right] = \frac{1}{2}, \text{ если } x = 0 \text{ и } x = 1. \end{cases}$$

В справедливости этих равенств можно убедиться и непосредственно, вычислив интеграл (16). Например, для $x = 0$ имеем:

$$F(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Вычислите интеграл (16) для других значений x. ▲

2. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = e^{-ax}, \qquad a > 0, \qquad 0 \le x < +\infty,$$

продолжив её на полупрямую $(-\infty, 0)$: а) чётным образом; б) нечётным образом.

△ а) Если продолжение функции $f(x)$ чётное, то её интеграл Фурье выражается формулой (7). Вычислим внутренний интеграл в этой формуле в нашем случае:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt = \int_0^{+\infty} e^{-at}\cos\lambda t dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} Re(e^{i\lambda t}) dt =$$

$$= Re\int_0^{+\infty} e^{(-a+i\lambda)t} dt = Re\frac{1}{-a+i\lambda} e^{(-a+i\lambda)t}\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= Re\frac{1}{a-i\lambda} = Re\frac{a+i\lambda}{a^2+\lambda^2} = \frac{a}{a^2+\lambda^2}.$$

По формуле (7) получаем:

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{a}{a^2+\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda,$$

причём это равенство верно для любого $x \in [0, +\infty)$, поскольку чётное продолжение функции e^{-ax} даёт функцию, непрерывную на всей числовой прямой, в том числе в точке $x = 0$.

б) Если продолжение функции $f(x)$ нечётное, то её интеграл Фурье выражается формулой (8). В нашем случае для внутреннего интеграла в этой формуле получаем:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt = \int_0^{+\infty} e^{-at}\sin\lambda t dt = Im\int_0^{+\infty} e^{(-a+i\lambda)t} dt = \frac{\lambda}{a^2+\lambda^2},$$

и, следовательно,

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}\sin\lambda x d\lambda,$$

причём это равенство верно для любого $x \in (0, +\infty)$, а в точке $x = 0$ интеграл Фурье равен нулю. Это видно непосредственно и, разумеется, соответствует утверждению теоремы 12, поскольку при нечётном продолжении функции e^{-ax} получается функция $F(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0, \\ -e^{ax}, & x < 0, \end{cases}$ у которой $\frac{1}{2}\left[F(-0) + F(+0)\right] = \frac{1}{2}[-1+1] = 0$. ▲

Замечание. Проведённые вычисления показывают, что при косинус - преобразовании Фурье $f(x) = e^{-ax}$, $x \in [0, +\infty)$ её образом является функция

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\lambda^2},$$

а при синус - преобразовании Фурье - функция

$$\hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}.$$

3. Найти образ Фурье $\hat{f}(\lambda)$ функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \le 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

$\triangle$ По формуле (10) получаем: если $\lambda \ne 0$, то

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\lambda t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\lambda t}}{-i\lambda}\bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\lambda} - e^{i\lambda}}{-i\lambda} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda}{\lambda},$$

а если $\lambda = 0$, то

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Таким образом,

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \begin{cases} \frac{\sin\lambda}{\lambda}, & \lambda \ne 0, \\ 1, & \lambda = 0. \end{cases} \qquad \blacktriangle$$

Замечание 1. Поскольку функция $f(x)$ в примере 3 - чётная, то найденный образ $\hat{f}(\lambda)$ функции $f(x)$ совпадает с образом $\hat{f}_c(\lambda)$, который получится при косинус - преобразовании Фурье функции $f(x)$.

Замечание 2. Обратное косинус - преобразование Фурье в примере 3 даёт функцию

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\lambda)\cos\lambda x d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x d\lambda. \tag{17}$$

Согласно теореме 12

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } |x| = 1. \end{cases}$$

В справедливости этих равенств можно убедиться и непосредственно, вычислив интеграл (17). Сделайте это.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

18. Найдите интеграл Фурье функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{Sgn} x, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ б) $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$ $(a>0)$; в) $f(x)=\frac{x}{a^2+x^2}$ $(a>0)$;

г) $f(x)=\begin{cases}e^{-ax}, & x\ge 0, \quad a>0,\\ 0, & x<0\end{cases}$; д) $f(x)=e^{-x^2}$; е) $f(x)=xe^{-x^2}$.

19. Найдите образ Фурье $\hat f(\lambda)$ функции $f(x)$, если:

а)$f(x)=\begin{cases}x, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ в)$f(x)=xe^{-x^2}$.

20. Найдите образ $\hat f_c(\lambda)$ функции $f(x)$ при косинус - преобразовании Фурье, если:

а) $f(x)=e^{-x^2}$; б) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; в) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$

21. Найдите образ $\hat f_s(\lambda)$ функции $f(x)$ при синус - преобразовании Фурье, если:

а) $f(x)=xe^{-x^2}$; б) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$; в) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$

22. Докажите, что если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и имеет непрерывную абсолютно интегрируемую на числовой прямой производную $f'(x)$, то

$$\hat f'(\lambda)=i\lambda\hat f(\lambda), \quad \lambda\in(-\infty,+\infty),$$

где $\hat f'(\lambda)$ и $\hat f(\lambda)$ - образы Фурье производной $f'(x)$ и функции $f(x)$.

23. Докажите, что если функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на числовой прямой, то образ Фурье $\hat f(\lambda)$ функции $f(x)$ является дифференцируемой функцией, и для её производной справедливо равенство

$$i(\hat f(\lambda))'=(\widehat{xf})(\lambda), \quad \lambda\in(-\infty,+\infty),$$

где $(\widehat{xf})(\lambda)$ - образ Фурье функции $xf(x)$.

ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ

§1. Понятие обобщённой функции. Пространство обобщённых функций

Основные понятия

1. Пространство основных функций. Рассмотрим множество всевозможных функций $\varphi(x)$, определённых на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и обладающих следующими двумя свойствами:

1) каждая функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема (т.е. имеет производные всех порядков) на всей числовой прямой (это обозначается так: $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$);

2) каждая функция $\varphi(x)$ является *финитной*, т.е. для каждой функции $\varphi(x)$ существует интервал, вне которого она равна нулю.

Обозначим через X_φ множество всех точек x, в которых $\varphi(x) \neq 0$, а через $\overline{X}_\varphi$ - замыкание множества X_φ, т.е. объединение множества X_φ и всех его предельных точек. Множество $\overline{X}_\varphi$ называется *носителем* функции $\varphi(x)$ и обозначается так: $\operatorname{Supp}\varphi(x)$ (от французского *support*).

Множество всех функций, обладающих свойствами 1) и 2), назовём *множеством основных функций* и обозначим буквой D.

Примером функции из множества D является функция

$$\omega_a(x) = \begin{cases} e^{-a^2/(a^2-x^2)}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases}$$

где a - положительное число. Эту функцию иногда называют *«шапочкой»*. Очевидно, что $\operatorname{Supp}\omega_a(x) = [-a, a]$.

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций сходится к функции $\varphi(x)$ из множества D, если:

1) существует интервал $(-a, a)$, такой, что

$$\forall\ n: \ \operatorname{Supp}\varphi_n(x) \subset (-a, a);$$

2) для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ сходится к $\varphi^{(k)}(x)$ равномерно на прямой $\mathbb{R}$. Обозначать эту сходимость будем так:

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \ \text{ при } \ n \to \infty \ \text{ в пространстве } \ D.$$

Определение. Множество D основных функций с введённым понятием сходимости называется *пространством основных функций.*

Будем обозначать это пространство той же буквой D.

Пространство D основных функций является линейным пространством с обычными операциями сложения двух функций и умножения функции на вещественное число.

2. Понятие функционала.

Определение. Будем говорить, что на пространстве D основных функций задан *функционал*, если указано правило, по которому каждой функции $\varphi(x)$ из пространства D ставится в соответствие определённое число $u(\varphi)$.

Определение. Функционал $u(\varphi)$ называется *линейным*, если для любых функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ из пространства D и любых чисел α и β выполняется равенство

$$u(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha u(\varphi_1) + \beta u(\varphi_2). \qquad (1)$$

Наряду с обозначением функционала в виде $u(\varphi)$ будем использовать и другие обозначения. В частности, если функционал обозначен буквой f, то его значение на элементе $\varphi(x)$ пространства D будем записывать так: (f, φ).

Определение. Функционал f, определённый на пространстве D основных функций, называется *непрерывным*, если для любой последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций, сходящейся в D к функции $\varphi(x)$, числовая последовательность (f, φ_n) сходится к (f, φ).

3. Пространство обобщённых функций.

Определение. *Обобщённой функцией* называется любой линейный непрерывный функционал, определённый на пространстве основных функций.

Определение. *Суммой двух обобщённых функций* f и g называется функционал (обозначим его $f+g$), действующий по правилу:

$$\forall\ \varphi(x) \in D: \ \ (f+g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi). \tag{2}$$

Определение. *Произведением обобщённой функции* f на число α называется функционал (обозначим его αf), действующий по правилу:

$$\forall\ \varphi(x) \in D: \ \ (\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi).$$

Нетрудно доказать, что:

1) введённые указанным способом функционалы $f+g$ и αf являются линейными непрерывными функционалами, т.е. являются обобщёнными функциями (см. пример 2);

2) операции сложения обобщённых функций и умножения обобщённой функции на число удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства, в частности, нулевым элементом этого пространства является функционал, ставящий в соответствие каждой функции из пространства D число нуль.

Итак, *множество обобщённых функций является линейным пространством.*

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ обобщённых функций сходится к обобщённой функции f, если для любой функции $\varphi(x)$ из пространства D числовая последовательность (f_n, φ) сходится к (f, φ).

Определение. Линейное пространство обобщённых функций с введённым понятием сходимости называется *пространством обобщённых функций* и обозначается D'. Сходимость последовательности $\{f_n\}$ обобщённых функций к обобщённой функции f называется *слабой сходимостью.* Говорят также, что последовательность функционалов $\{f_n\}$ *слабо сходится* к функционалу f.

Обозначение: $f_n \to f$ при $n \to \infty$ в пространстве D'.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие функции являются элементами множества D основных функций? Приведите пример функции из множества D.

2. Что называется носителем функции? Приведите пример функции из множества D, носителем которой является сегменте $[-1, 1]$.

3. Докажите, что если $\varphi(x) \in D$, то $\varphi^{(k)}(x) \in D\ \forall\ \ k = 1, 2, \ldots$.

4. Докажите, что для функции «шапочка» $\omega_a(x)$ справедливы равенства $\omega_a^{(n)}(\pm 1) = 0\ \forall\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$.

5. Пусть $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Докажите, что $\forall\ \ \varphi(x) \in D$ функция $a(x)\varphi(x)$ является элементом множества D основных функций.

6. Сформулируйте определение сходимости последовательности основных функций.

7. Пусть $\omega_a(x)$ - «шапочка»,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\omega_a(x), \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Докажите, что

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) = 0 \ \text{ при } \ n \to \infty \ \text{ в } \ D.$$

8. Что такое пространство основных функций? Является ли оно: линейным пространством? метрическим пространством? нормированным пространством?

9. Сформулируйте определения:

а) функционала на пространстве D основных функций;
б) линейного функционала на пространстве D;
в) непрерывного функционала на пространстве D.

10. Приведите пример: линейного функционала; нелинейного функционала; непрерывного функционала на пространстве D.

11 Сформулируйте определения:

а) обобщённой функции;
б) суммы двух обобщённых функций;
в) произведения обобщённой функции на число.

12. Сформулируйте определение сходимости последовательности обобщённых функций.

13. Что такое пространство D' обобщённых функций?

Примеры решения задач

1. Пусть $f(x)$ - локально интегрируемая функция, т.е. $f(x)$ определена на всей числовой прямой, и для любого сегмента $[a, b]$ существуют интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b |f(x)|dx$ (они могут быть собственными или несобственными). Определим с помощью функции $f(x)$ функционал $\widehat{f}$ на пространстве D основных функций следующим образом: каждой функции $\varphi(x) \in D$ поставим в соответствие число

$$\left(\widehat{f}, \varphi\right) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{3}$$

(отметим, что хотя интеграл имеет бесконечные пределы интегрирования, для любой функции $\varphi(x) \in D$ он является интегралом по ограниченному промежутку в силу финитности функции $\varphi(x)$, и этот интеграл существует, так как функция $f(x)\varphi(x)$ является локально интегрируемой).

Доказать, что $\widehat{f}$ - непрерывный функционал.

$\triangle$ По определению непрерывного функционала требуется доказать, что для любой последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций, сходящейся в D к функции $\varphi(x)$, числовая последовательность $(\widehat{f}, \varphi_n)$ сходится к числу $(\widehat{f}, \varphi)$, или что то же самое,

$$c_n := \left(\widehat{f}, \varphi_n\right) - \left(\widehat{f}, \varphi\right) \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty. \tag{4}$$

Пусть
$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \text{ при } n \to \infty \text{ в пространстве } D.$$
Тогда, согласно определению сходимости в пространстве D, существует интервал $(-a, a)$, вне которого все функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi(x)$ равны нулю, и
$$\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) \text{ на сегменте } [-a, a]. \tag{5}$$
Кроме того, в силу абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[-a; a]$ справедливо неравенство
$$\int_{-a}^{a} |f(x)|dx \le M,$$
где $M > 0$ - некоторое число. Поэтому
$$|c_n| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_n(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \right| =$$
$$= \left| \int_{-a}^{a} (\varphi_n(x) - \varphi(x)) f(x)dx \right| \le \mathrm{Supp}_{[-a;a]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \cdot \int_{-a}^{a} |f(x)|dx \le$$
$$\le M \cdot \mathrm{Supp}_{[-a;a]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|.$$
Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (5) найдётся номер N, такой, что $\forall\ n > N$ выполняется неравенство
$$\mathrm{Supp}_{[-a,a]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$
Следовательно, $\forall\ n > N$: $|c_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Итак, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ номер N, такой, что
$$|c_n| < \varepsilon\ \ \forall\ n > N,$$
а это и означает, что выполнено (4), что и требовалось доказать. ▲

2. Доказать, что сумма двух обобщённых функций является обобщённой функцией.

△ Пусть f и g - обобщённые функции, т.е. линейные непрерывные функционалы, определённые на пространстве D основных функций. Сумма $f + g$ определена формулой (2). Требуется доказать, что функционал $f + g$ является: а) линейным и б) непрерывным. Это и будет означать, что $f + g$ - обобщённая функция.

а) Докажем линейность функционала $f + g$. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - любые две функции из пространства D основных функций, α и β - любые вещественные числа. По формуле (2) получаем
$$(f + g, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = (f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) + (g, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_1 + \beta\varphi_2),$$
а поскольку f и g - линейные функционалы, то (см. (1))
$$(f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f, \varphi_1) + \beta(f, \varphi_2),$$
$$(g, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(g, \varphi_1) + \beta(g, \varphi_2).$$
Поэтому
$$(f + g, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f, \varphi_1) + \beta(f, \varphi_2) + \alpha(g, \varphi_1) + \beta(g, \varphi_2) =$$
$$= \alpha\left[(f, \varphi_1) + (g, \varphi_1)\right] + \beta\left[f(\varphi_2) + g(\varphi_2)\right].$$

Согласно формуле (2) суммы в квадратных скобках равны $(f+g, \varphi_1)$ и $(f+g, \varphi_2)$. Таким образом, имеет место равенство

$$(f+g, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f+g, \varphi_1) + \beta(f+g, \varphi_2),$$

а это и означает, что функционал $f+g$ - линейный.

б) Докажем теперь непрерывность функционала $f+g$. Пусть

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \text{ при } n \to \infty \text{ в пространстве } D.$$

Так как f и g - непрерывные функционалы, то числовые последовательности (f, φ_n) и (g, φ_n) сходятся соответственно к (f, φ) и $g, \varphi)$, а поскольку

$$(f+g, \varphi_n) = (f, \varphi_n) + (g, \varphi_n),$$

то

$$(f+g, \varphi_n) = (f, \varphi_n) + (g, \varphi_n) \to (f, \varphi) + (g, \varphi) = (f+g, \varphi).$$

Таким образом,

$$(f+g, \varphi_n) \to (f+g, \varphi) \text{ при } n \to \infty.$$

Это и означает непрерывность функционала $f+g$. Итак, сумма $f+g$ обобщённых функций f и g является обобщённой функцией. ▲

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Докажите, что функция $\varphi(x)$ является финитной тогда и только тогда, когда $\operatorname{Supp}\varphi(x)$ - ограниченное множество.

2. Докажите, что если

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \text{ при } n \to \infty \text{ в пространстве } D,$$

и

$$a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

то

$$a(x)\varphi_n(x) \to a(x)\varphi(x) \text{ при } n \to \infty \text{ в пространстве } D.$$

3. Докажите, что функционал $\widehat{f}$ из примера 1 (см. (3)) является линейным.

4. На множестве функций, определённых на сегменте $[a, b]$ и имеющих на этом сегменте непрерывную производную (это множество функций обозначается $C^1[a, b]$), определим функционал следующим образом: каждой функции $\varphi(x) \in C^1[a, b]$ поставим в соответствие число $l(\varphi)$, равное длине кривой, являющейся графиком функции $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$, т.е.

$$l(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}dx.$$

а) Докажите, что функционал $l(\varphi)$ не является линейным.

б) Введём понятие сходимости в пространстве $C^1[a, b]$ следующим образом:

$$\{\varphi_n(x)\} \text{ сходится к } \varphi(x) \text{ в } C^1[a, b], \text{ если } \varphi_n(x) \to \varphi(x) \text{ и } \varphi'_n(x) \rightrightarrows \varphi'(x) \text{ на } [a, b].$$

Докажите, что функционал $l(\varphi)$ является непрерывным, т.е. для последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, сходящейся к $\varphi(x)$ в пространстве $C^1[a, b]$, числовая последовательность $l(\varphi_n)$ сходится к $l(\varphi)$.

5. Докажите, что произведение обобщённой функции на число является обобщённой функцией.

6. Докажите, что операции сложения обобщённых функций и умножения обобщённой функции на число удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства.

§2. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Локльные свойства обобщённых функций

Основные понятия и теоремы

1. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Любая локально интегрируемая функция $f(x)$ порождает линейный непрерывный функционал $\widehat{f}$ на пространстве D основных функций, т.е. порождает обобщённую функцию, определённую формулой (3):

$$\forall\ \varphi(x) \in D: \ \ (\widehat{f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Такая обобщённая функция называется *регулярной.* Обобщённая функция, не являющаяся регулярной, называется *сингулярной.*

Классическим примером сингулярной обобщённой функции является δ-функция. Она определяется следующим образом:

$$\forall\ \varphi(x) \in D: \ \ (\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Из этого определения ещё не следует, что δ-функция является линейным непрерывным функционалом, т.е. обобщённой функцией, и не следует также, что δ-функция - сингулярная обобщённая функция. Эти факты требуют обоснования.

Теорема 1. *δ-функция является обобщённой функцией.*

Теорема 2. *δ-функция является сингулярной обобщённой функцией.*

Теорема 3. *δ-функцию можно представить как предел в пространстве D' последовательности регулярных обобщённых функций.*

Эти теоремы доказаны ниже в примерах 1 - 3.

2. Локальные свойства обобщённых функций. Обобщённые функции, в отличие от обычных функций, не имеют значений в отдельных точках. Вместе с тем можно ввести понятие равенства нулю обобщённой функции на каком-то интервале.

Определение. Говорят, что обобщённая функция f равна нулю на интервале I, если для любой функции $\varphi(x) \in D$, носитель которой содержится в интервале I, выполняется равенство $(f, \varphi) = 0$.

Это записывают так: $f = 0$ на интервале I или $f(x) = 0$ при $x \in I$. Нужно только понимать, что последняя запись носит условный характер - $f(x)$ не имеет значений в отдельных точках x интервала I, и равенство $f(x) = 0$ при $x \in I$ понимается в смысле данного определения.

Определение. Обобщённые функции f и g называются равными на интервале I, если $f(x) - g(x) = 0$ при $x \in I$.

Объединение всех интервалов, на которых обобщённая функция f равна нулю, называется *нулевым множеством* обобщённой функци f (обозначим его O_f). Дополнение O_f до всей числовой прямой (т.е. множество всех точек числовой прямой, не содержащихся в O_f) называется носителем обобщённой функции f и обозначается Supp f. Если Supp f - ограниченное множество, то обобщённая функция f называется *финитной.*

Контрольные вопросы и задания

1. Какая обобщённая функция называется регулярной и какая сингулярной?
2. Как определяется δ-функция?

3. В каком случае говорят, что обобщённая функция f равна нулю на интервале I?

4. Докажите, что δ-функция равна нулю на любом интервале, не содержащем точку $x = 0$.

5. Что такое нулевое множество и носитель обобщённой функции?

6. Найдите нулевое множество и носитель δ-функции.

Примеры решения задач

1. Доказать, что δ-функция является обобщённой функцией (теорема 1).

$\triangle$ Требуется доказать, что δ-функция является: а) линейным функционалом и б) непрервывным функционалом.

а) Докажем, что δ-функция - линейный функционал.

Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - произвольные функции из пространства D, α и β - произвольные числа. По определению δ-функции имеют место равенства

$$(\delta,\ \ \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\varphi_1(0) + \beta\varphi_2(0),$$

$$(\delta, \varphi_1) = \varphi_1(0), \ \ (\delta, \varphi_2) = \varphi_2(0).$$

Заменяя в правой части первого равенства $\varphi_1(0)$ на (δ, φ_1) и $\varphi_2(0)$ на (δ, φ_2), приходим к равенству

$$(\delta, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(\delta, \varphi_1) + \beta(\delta, \varphi_2),$$

которое и означает (см. (1)), что δ-функция - линейный функционал.

б) Докажем теперь, что δ-функция - непрерывный функционал.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ - произвольная последовательность основных функций, сходящаяся в D к функции $\varphi(x)$. Требуется доказать (согласно определению непрерывного функционала), что числовая последовательность (δ, φ_n) сходится к (δ, φ).

По определению δ-функции

$$(\delta, \varphi_n) = \varphi_n(0) \ \text{ и } \ (\delta, \varphi) = \varphi(0),$$

поэтому нужно доказать, что

$$\varphi_n(0) \to \varphi(0) \ \text{ при } \ n \to \infty. \tag{1}$$

Так как

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \ \text{ при } \ n \to \infty \ \text{ в пространстве } \ D,$$

то $\varphi_n(x)$ сходится к $\varphi(x)$ равномерно на всей числовой прямой (согласно определению сходимости в пространстве D), и, в частности, $\varphi_n(x)$ сходится к $\varphi(x)$ в точке $x = 0$, т.е. выполнено (1). Тем самым доказано, что δ-функция - линейный непрерывный функционал, т.е. обобщённая функция. Теорема 1 доказана. $\blacktriangle$

2. Доказать, что δ-функция является сингулярной обобщённой функцией (теорема 2).

$\triangle$ Предположим, что δ-функция является регулярной обобщённой функцией. Тогда существует локально интегрируемая функция $f(x)$, такая, что

$$\forall \ \ \varphi(x) \in D: \ \ (\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Возьмём в качестве $\varphi(x)$ «шапочку»

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\varepsilon^2/(\varepsilon^2 - x^2)}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, \ \ |x| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

где ε - произвольное положительное число. Для неё выполнены соотношения

$$0 \le \omega_\varepsilon(x) \le e^{-1}, \;\; x \in \mathbb{R}; \;\; \omega_\varepsilon(0) = e^{-1}.$$

По определению δ-функции

$$(\delta, \omega_\varepsilon) = \omega_\varepsilon(0) = e^{-1},$$

а по нашему предположению

$$(\delta, \omega_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega_\varepsilon(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x)dx.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ должно выполняться равенство

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x)dx = e^{-1}. \tag{2}$$

Так как функция $f(x)$ локально интегрируема, то

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\omega_\varepsilon(x)dx \to 0 \;\text{ при }\; \varepsilon \to +0.$$

Но это противоречит равенству (2), и, следовательно, наше предположение неверно, а, значит, δ-функция является сингулярной обобщённой функцией. Теорема 2 доказана. ▲

3. Доказать, что δ-функцию можно представить как предел в пространстве D' последовательности регулярных обобщённых функций (теорема 3).

△ Для любого $\varepsilon > 0$ введём функцию

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Функция $\delta_\varepsilon(x)$ при каждом $\varepsilon > 0$ является локально интегрируемой и порождает регулярную обобщённую функцию, которую обозначим принятым образом, т.е. $\widehat{\delta_\varepsilon}$. Докажем, что семейство регулярных обобщённых функций $\widehat{\delta_\varepsilon}$, зависящих от непрерывно изменяющегося положительного параметра ε, сходится к δ-функции при $\varepsilon \to +0$ в пространстве D', т.е.

$$\forall \;\; \varphi(x) \in D: \;\; (\widehat{\delta_\varepsilon}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \to (\delta, \varphi) = \varphi(0) \;\text{ при }\; \varepsilon \to +0. \tag{3}$$

Из (3), очевидно, следует утверждение теоремы 3.

Для доказательства (3) нужно доказать, что $\forall \;\; \gamma > 0 \;\; \exists \;\; \varepsilon_0 > 0$, такое, что

$$|(\widehat{\delta_\varepsilon}, \varphi) - (\delta, \varphi)| < \gamma, \;\; \text{если } \; 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{4}$$

Так как $\varphi(x)$ - непрерывная функция во всех точках и, в частности, в точке $x = 0$, то $\forall \;\; \gamma > 0 \;\; \exists \;\; \varepsilon_0 > 0$, такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \gamma, \;\; \text{если } \; |x| < \varepsilon_0.$$

Используя это неравенство, а также очевидные равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}dx = 1,$$

получаем: если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то

$$\left|(\widehat{\delta_\varepsilon}, \varphi) - (\delta, \varphi)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| =$$

$$= \left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)dx\right| = \left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)|\varphi(x) - \varphi(0)|dx < \gamma \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)dx = \gamma.$$

Итак, если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то $|(\delta_\varepsilon, \varphi) - (\delta, \varphi)| < \gamma$, т.е. выполнено (4). Тем самым теорема 3 доказана. ▲

4. Доказать, что

$$\widehat{f_\varepsilon} \to \ \delta\text{-функции при } \ \varepsilon \to +0 \ \text{ в } \ D',$$

если $\widehat{f_\varepsilon}$-семейство регулярных обобщённых функций, порождённых локально интегрируемыми функциями

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-x^2/4\varepsilon}, \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ \varepsilon > 0.$$

△ По определению сходимости в пространстве D' нужно доказать, что

$$\forall \ \varphi(x) \in D: \ \ (\widehat{f_\varepsilon}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \to (\delta, \varphi) = \varphi(0) \ \text{ при } \ \varepsilon \to +0. \tag{5}$$

Возьмём произвольную функцию $\varphi(x) \in D$. Пусть её носитель лежит на сегменте $[-a, a]$. Тогда

$$(\widehat{f_\varepsilon}, \varphi) = \int_{-a}^{a} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\int_{-a}^{a} e^{-x^2/4\varepsilon}\left[(\varphi(x) - \varphi(0)) + \varphi(0)\right]dx = I_1 + I_2 \cdot \varphi(0), \tag{6}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\int_{-a}^{a} e^{-x^2/4\varepsilon}\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)dx, \qquad I_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\int_{-a}^{a} e^{-x^2/4\varepsilon}dx.$$

Так как функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную на сегменте $[-a, a]$, то

$$|\varphi'(x)| \leq M, \ \ x \in [-a, a],$$

где $M > 0$ - некоторое число. Применяя формулу Лагранжа конечных приращений, получаем:

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| = |\varphi'(\xi) \cdot x| \leq M \cdot |x|, \ \ x \in [-a, a], \ \ \xi \in (0; x).$$

Поэтому

$$|I_1| \leq \frac{M}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\int_{-a}^{a} e^{-x^2/4\varepsilon}|x|dx = \frac{M}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\int_{0}^{a} e^{-x^2/4\varepsilon} \cdot xdx =$$

$$= \frac{2M \cdot \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi}}\left(1 - e^{-a^2/4\varepsilon}\right) \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to +0.$$

Отсюда следует, что

$$I_1 \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to +0. \tag{7}$$

В интеграле I_2 сделаем замену переменной $x/2\sqrt{\varepsilon} = t$. Получим

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-a/\sqrt{\varepsilon}}^{a/\sqrt{\varepsilon}} e^{-t^2} dt.$$

Если $\varepsilon \to +0$, то $a/\sqrt{\varepsilon} \to +\infty$, поэтому

$$I_2 \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1 \qquad \text{при } \ \varepsilon \to +0. \tag{8}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (6) и учитывая (7) и (8), получаем:

$$(\widehat{f}_\varepsilon, \varphi) \to \varphi(0) \ \text{ при } \ \varepsilon \to +0,$$

т.е. выполнено (5), что и требовалось доказать. ▲

Замечание 1. Рассмотренный пример даёт ещё одно доказательство теоремы 3.

Замечание 2. Утверждение, аналогичное теореме 3, имеет место для любой сингулярной обобщённой функции: любую сингулярную обобщённую функцию можно представить как предел в пространстве D' последовательности регулярных обобщённых функций.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

7. Пусть $\widehat{g}_\varepsilon$ и $\widehat{h}_\varepsilon$ - семейства регулярных обобщённых функций, порождённых соответственно функциями

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \qquad \text{и} \qquad h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{\pi \varepsilon}, & x = 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}, \ \ \varepsilon > 0.$$

Докажите, что:

$$\widehat{g}_\varepsilon \to \ \delta\text{- функции при } \ \varepsilon \to +0 \ \text{ в } \ D',$$
$$\widehat{h}_\varepsilon \to \ \delta\text{- функции при } \ \varepsilon \to +0 \ \text{ в } \ D'.$$

8. Обозначим через $\widehat{\Theta}$ регулярную обобщённую функцию, порождённую функцией Хевисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найдите нулевое множество и носитель обобщённой функции $\widehat{\Theta}$.

§3.Действия над обобщёнными функциями

Основные понятия и теоремы

1. Умножение обобщённой функции на бесконечно дифференцируемую функцию. Пусть $f(x)$ - локально интегрируемая функция, $\widehat{f}$ - порождаемая функцией $f(x)$ регулярная обобщённая функция, $a(x)$ - бесконечно дифференцируемая функция на всей прямой $\mathbb{R}$ (т.е. $a(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$). Тогда $a(x)f(x)$ - локально интегрируемая функция, и $\forall\ \varphi(x) \in D$ функция $a(x)\varphi(x) \in D$. Поэтому для регулярной обобщённой функции $\widehat{af}$, порождаемой функцией $a(x)f(x)$, получаем:

$$\forall\ \varphi(x) \in D: \quad (\widehat{af}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [a(x)f(x)]\,\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,[a(x)\varphi(x)]\,dx = (\widehat{f}, a\varphi),$$

т.е. справедливо равенство

$$\left(\widehat{af}, \varphi\right) = \left(\widehat{f}, a\varphi\right), \quad \varphi(x) \in D. \tag{1}$$

Для сингулярных обобщённых функций примем это равенство в качестве определения произведения обобщённой функции и бесконечно дифференцируемой функции. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение 1. Произведением обобщённой функции f и функции $a(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ называется обобщённая функция (обозначим её af), действующая по правилу:

$$\forall\ \varphi(x) \in D: \quad (af, \varphi) = (f, a\varphi). \tag{2}$$

Замечание 1. Равенство (2) определяет функционал af на пространстве D основных функций. Чтобы назвать этот функционал обобщённой функцией (и тем самым обосновать корректность определения 1), нужно ещё доказать, что функционал af - линейный и непрерывный (см. пример 1).

Замечание 2. Подчеркнём, что для регулярных обобщённых функций справедливость равенства (2) доказана (см. (1)), а для сингулярных обобщённых функций равенство (2) принимается по определению.

Замечание 3. Отметим, что произведение двух обобщённых функций не определяется.

2. Линейная замена переменной в обобщённых функциях. Пусть $f(x)$ - локально интегрируемая функция, a и b - произвольные числа, $a \neq 0$. Рассмотрим функцию $f(ax+b)$ (она также является локально интегрируемой) и порождаемую ею регулярную обобщённую функцию, которую удобно обозначить с указанием аргумента, т.е. так: $\widehat{f}(ax+b)$. Для любой функции $\varphi(x) \in D$ имеем равенство

$$\left(\widehat{f}(ax+b), \varphi(x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)dx. \tag{3}$$

Сделаем в интеграле замену переменной $t = ax+b$. Тогда $dx = dt/a$, $x = (t-b)/a$, и мы приходим к равенствам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x)dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \frac{1}{|a|}\left(\widehat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right). \tag{4}$$

Поясним, как получается первое из этих равенств: если $a > 0$, то после замены переменной получается интеграл

$$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt,$$

а если $a < 0$, то - интеграл

$$\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt;$$

оба эти случая укладываются в единую запись

$$\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt.$$

Из (3) и (4) следует, что для любой регулярной обобщённой функции $\widehat{f}(x)$ и любых чисел $a \neq 0$ и b справедливо равенство

$$\left(\widehat{f}(ax+b), \varphi(x)\right) = \frac{1}{|a|}\left(\widehat{f}(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right), \quad \varphi(x) \in D. \tag{5}$$

Для сингулярных обобщённых функций примем это равенство в качестве определения линейной замены переменной. Таким образом, мы вводим следующее опреление.

Определение 2. Обобщённая функция $f(ax+b)$, где $a \neq 0$, - это функционал, действующий по правилу:

$$\forall\ \varphi(x) \in D: \ \ (f(ax+b), \varphi(x)) = \frac{1}{|a|}\left(f(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right). \tag{6}$$

В частности, если $a = 1$, $b = -c \neq 0$, получаем *формулу сдвига аргумента обобщённой функции*:

$$(f(x-c), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+c)), \tag{7}$$

а если $b = 0$, $a \neq 1$ - формулу растяжения аргумента обобщённой функции:

$$(f(ax), \varphi(x)) = \frac{1}{|a|}\left(f(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right).$$

Для δ-функции по формуле (7) получаем:

$$(\delta(x-c), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x+c)) = \varphi(x+c)\Big|_{x=0} = \varphi(c). \tag{8}$$

Замечание. По отношению к определению 2 можно сделать два замечания, аналогичные замечаниям 1 и 2, сделанным после определения 1 (сформулируйте их).

3. Дифференцирование обобщённых функций. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и имеет в каждой точке непрерывную производную k-го порядка (это обозначается так: $f(x) \in \mathbb{C}^k(\mathbb{R})$). Операцию дифференцирования будем обозначать либо штрихом (как это делается обычно), либо буквой D (так принято в теории обобщённых функций):

$$f'(x) = Df(x), \ \ f''(x) = (f'(x))' = D(Df(x)) = D^2 f(x), \ldots,$$
$$f^{(k)}(x) = D^k f(x).$$

Производная $Df(x)$ порождает регулярную обобщённую функцию $\widehat{Df}$, значение которой на элементе $\varphi(x)$ из пространства D выражается равенством

$$(\widehat{Df}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx.$$

Применяя к интегралу формулу интегрирования по частям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

и учитывая, что первое слагаемое в правой части равенства равно нулю, поскольку $\varphi(x)$ - финитная функция, а второе слагаемое можно записать в виде $-(\widehat{f}, D\varphi)$, приходим к равенству

$$(\widehat{Df}, \varphi) = -(\widehat{f}, D\varphi), \quad \varphi(x) \in D. \tag{9}$$

Аналогично получается равенство (путём k-кратного применения формулы интегрирования по частям)

$$\left(\widehat{D^k f}, \varphi\right) = (-1)^k \left(\widehat{f}, D^k\varphi\right), \quad \varphi(x) \in D, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Равенства (9) и (10) получены для регулярной обобщённой функции $\widehat{f}$, порождённой k раз непрерывно дифференцируемой функцией $f(x)$. Для произвольной обобщённой функции примем эти равенства в качестве определения её производных.

Определение 3. Производной k-го порядка обобщённой функции f называется обобщённая функция (она обозначается $D^k f$), действующая по правилу:

$$\forall \ \varphi(x) \in D: \quad (D^k f, \varphi) = (-1)^k (f, D^k\varphi), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Замечание. По отношению к определению 3 можно сделть два замечания, аналогичных замечаниям 1 и 2, сделанным после определения 1 (сформулируйте их).

Отметим, что для любой обобщённой функции f правая часть равенства (11) определена для любого $k = 1, 2, \ldots$ (поскольку $D^k\varphi \in D$). Это означает, что *любая обобщённая функция бесконечно дифференцируема*, т.е. имеет производные всех порядков.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является кусочно-гладкой на любом сегменте и имеет единственную точку разрыва x_0. Скачок функции $f(x)$ в точке x_0 обозначим так:*

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = [f]_{x_0},$$

а регулярные обобщённые функции, порождённые функцией $f(x)$ и её производной $f'(x)$, обозначим, как и было принято, через $\widehat{f}$ и $\widehat{f}'$. Тогда для производной $D\widehat{f}$ обобщённой функции $\widehat{f}$ справедливо равенство

$$D\widehat{f} = \widehat{f}' + [f]_{x_0} \cdot \delta(x - x_0), \tag{12}$$

где $\delta(x - x_0)$ - δ-функция со сдвигом аргумента на x_0.

4. Разложение δ-функции в ряд Фурье. Пусть $\{\psi_n(x), \ \ n = 1, 2, \ldots\}$ - ортонормированная замкнутая система функций в пространстве $Q[a, b]$ кусочно - непрерывных функций на сегменте $[a, b]$. Обозначим через $D[a, b]$ множество всех таких основных функций из пространства D, носитель каждой из которых содержится в сегменте $[a, b]$. Регулярную обобщённую функцию, порождаемую функцией $\psi_n(x)$ и действующую на множестве $D[a, b]$, обозначим $\widehat{\psi_n}(x)$. Тогда

$$\forall \ \varphi(x) \in D[a,b]: \ \ (\widehat{\psi_n}, \varphi) = \int_a^b \psi_n(x)\varphi(x)dx = \varphi_n,$$

где φ_n - коэффициент Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{\psi_n\}$.

Пусть $x_0 \in (a, b)$. Напишем формальное разложение обобщённой функции $\delta(x-x_0)$ по системе обобщённых функций $\{\widehat{\psi}_n(x)\}$:

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cdot \widehat{\psi_n}(x). \tag{13}$$

Используя это равенство, получаем

$$(\delta(x - x_0), \psi_k(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\widehat{\psi_n}(x), \psi_k(x)).$$

Левая часть равенства равна $\psi_k(x_0)$ (см. (8)), а в правой части

$$(\widehat{\psi_n}(x), \psi_k(x)) = \int_a^b \psi_n(x)\psi_k(x)dx = \delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

и, следовательно, правая часть равенства равна δ_k. Итак, $\delta_k = \psi_k(x_0)$, и равенство (13) принимает вид

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_0)\widehat{\psi_n}(x). \tag{14}$$

Это и есть *разложение функции* $\delta(x - x_0)$ *в ряд Фурье по системе обобщённых функций* $\{\widehat{\psi_n}(x)\}$.

Равенство (14) нужно понимать так: *обобщённая функция* $\delta(x - x_0)$ *есть предел (в смысле слабой сходимости) последовательности частичных сумм ряда (14).*

Более точно, имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Если для любой функции* $\varphi(x)$ *из множества* $D[a, b]$ *её ряд Фурье*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \psi_n(x)$$

сходится в точке $x_0 \in (a, b)$ *к* $\varphi(x_0)$, *т.е.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \psi_n(x_0) = \varphi(x_0),$$

то частичная сумма ряда (14)

$$\widehat{\delta}_n(x, x_0) := \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x_0)\widehat{\psi_k}(x)$$

слабо сходится к $\delta(x - x_0)$ *при* $n \to \infty$, *т.е.* $\forall \ \varphi(x) \in D[a, b]$ *числовая последовательность* $(\widehat{\delta_n}(x, x_0), \varphi(x))$ *сходится к* $(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0)$.

5. Преобразование Фурье обобщённых функций. В теории обобщённых функций наряду с пространством D вводится ещё одно пространство основных функций. Оно обозначается буквой S и содержит все комплекснозначные функции из пространства $C^{\infty}(\mathbb{R})$, убывающие вместе с производными всех порядков при $|x| \to \infty$ быстрее, чем любая степень $\frac{1}{|x|}$. Примером такой функции является

$$\varphi(x) = e^{-x^2}, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что любая функция $\varphi(x)$ из пространства D принадлежит пространству S, поскольку $\varphi(x)$ - финитная функция. Сходимость последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций из пространства S определяется следующим образом.

Определение 4. Говорят, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ функций из пространства S сходится к функции $\varphi(x)$ из этого пространства, если $\forall\ k = 0, 1, 2, \ldots$ и $\forall\ m = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность $\{x^m \varphi_n^{(k)}(x)\}$ сходится при $n \to \infty$ равномерно на всей числовой прямой к функции $x^m \varphi^{(k)}(x)$.

Любой линейный непрерывный функционал, определённый на пространстве S основных функций, называется *обобщённой функцией медленного роста*, а пространство обобщённых функций медленного роста обозначается S'. Сходимость последовательности обобщённых функций в пространстве S' определяется таким же образом, как и в пространство D'.

Для образа Фурье функции $f(x)$ будем использовать обозначение $F_f(\lambda)$, т.е.

$$F_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \ \ -\infty < \lambda < +\infty.$$

Образ Фурье $F_f(\lambda)$ абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ порождает линейный непрерывный функционал $\widehat{F_f}$ на пространстве S основных функций:

$$\forall\ \ \varphi(x) \in S: \ \ (\widehat{F_f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) \varphi(\lambda) d\lambda.$$

Изменив порядок интегрирования в правой части равенства, получим равенство

$$(\widehat{F_f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda \right) dt. \tag{15}$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda = F_\varphi(t)$$

- образ Фурье функции $\varphi(\lambda)$ (можно доказать, что если $\varphi \in S$, то и $F_\varphi \in S$), и так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) F_\varphi(t) dt = (\widehat{f}, F_\varphi),$$

то равенство (15) можно записать в виде

$$\forall\ \ \varphi(x) \in S: \ \ (\widehat{F_\varphi}, \varphi) = (\widehat{f}, F_\varphi).$$

Это равенство получено для регулярной обобщённой функции $\widehat{f}$. Для произвольной обобщённой функции f из пространства S' примем аналогичное равенство

$$(F_f, \varphi) = (f, F_\varphi), \ \ \varphi(x) \in S \tag{16}$$

в качестве определения *преобразования Фурье обобщённых функций медленного роста.* Обобщённая функция F_f, действующая по правилу (16), называется *образом Фурье* обобщённой функции f, определённой на прстранстве S.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение произведения обобщённой функции и бесконечно дифференцируемой функции. Выведите формулу этого произведения для регулярных обобщённых функций.

2. Докажите, что произведение обобщённой функции и бесконечно дифференцируемой функциии является линейным функционалом.

3. Докажите, что умножение δ-функции $\delta(x)$ на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$ равносильно умножению $\delta(x)$ на число $a(0)$, т.е.

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x).$$

4. Напишите формулу линейной замены переменной в обобщённых функциях. Выведите эту формулу для регулярных обобщённых функций.

5. Докажите, что если $f(x)$ - обобщённая функция, то функционал $f(ax+b)$ (см. Определение 2) является линейным и непрерывным, т.е. является обобщённой функцией.

6. Напишите формулы сдвига аргумента и растяжения аргумента обобщённой функции.

7. Докажите, что:

а) $(\delta(x-c), \varphi(x)) = \varphi(c)$, где $\delta(x)$ - δ-функция;

б) растяжение с коэффициентом $a \neq 0$ аргумента функции $\delta(x)$ равносильно умножению $\delta(x)$ на число $1/|a|$, т.е.

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x);$$

в) $\delta(-x) = \delta(x)$ (это свойство называется *чётностью δ-функции*).

8. Сформулируйте определение производной k-го порядка обобщённой функции ($k = 1, 2, \ldots$). Выведите формулу производной k-го порядка для регулярной обобщённой функции $\widehat{f}$, порождённой функцией $f(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$.

9. Докажите, что любая обобщённая функция бесконечно дифференцируема, т.е. имеет производные всех порядков.

10. Напишите формулу для производной регулярной обобщённой функции $\widehat{f}$, порождённой кусочно-гладкой функцией $f(x)$, имеющей единственную точку разрыва x_0.

11. Какое множество основных функций из пространства D обозначается $D[a,b]$? Является ли оно подпространством линейного пространства D?

12. Напишите формулу разложения δ-функции $\delta(x-x_0)$ в ряд Фурье по системе регулярных обобщённых функций $\{\widehat{\psi}_n(x),\ \ n = 1, 2, \ldots\}$, где $\{\psi_n(x)\}$ - ортонормированная замкнутая система функций в пространстве $Q[a,b]$ кусочно-непрерывных функций на сегменте $[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, и объясните, как получается это разложение.

13. Сформулируйте теорему о сходимости ряда Фурье для δ-функции $\delta(x-x_0)$.

14. Что такое пространство S основных функций? Как оно связано с пространством D?

15. Сформулируйте определение сходимости последовательности функций в пространстве S.

16. Что такое обобщённая функция медленного роста и что такое пространство S'? Как определяется сходимость последовательности элементов в пространстве S'?

17. Напишите формулу преобразования Фурье обобщённой функции медленного роста. Объясните, как получается эта формула для регулярной обобщённой функции $\widehat{f}$, порождённой абсолютно интегрируемой на $(-\infty, +\infty)$ функцией $f(x)$.

Примеры решения задач

1. Доказать, что произведение обобщённой функции и бесконечно дифференцируемой функции является непрерывным функционалом на пространстве D основных функций.

△ Произведение af обобщённой функции f и бесконечно дифференцируемой функции $a(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ определено равенством (2):

$$\forall \ \varphi(x) \in D: \ \ (af, \varphi) = (f, a\varphi). \tag{2}$$

Согласно определению непрерывного функционала на пространстве D нужно доказать, что для любой последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций, сходящейся в D к функции $\varphi(x)$, числовая последовательность (af, φ_n) сходится к числу (af, φ).

Пусть

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \ \text{ при } \ n \to \infty \ \text{ в пространстве } \ D.$$

Тогда

$$a(x)\varphi_n(x) \to a(x)\varphi(x) \ \text{ при } \ n \to \infty \ \text{ в пространстве } \ D$$

(см. задание 2 в конце §1), а так как f - обобщённая функция и, значит, f - непрерывный функционал, то

$$(f, a\varphi_n) \to (f, a\varphi) \ \text{ при } \ n \to \infty. \tag{17}$$

В силу (2) $(af, \varphi_n) = (f, a\varphi_n)$. Отсюда и из (17) следует, что

$$(af, \varphi_n) \to (f, a\varphi) \ \text{ при } \ n \to \infty,$$

а так как $(f, a\varphi) = (af, \varphi)$ (см. (2)), то

$$(af, \varphi_n) \to (af, \varphi) \ \text{ при } \ n \to \infty,$$

что и требовалось доказать. ▲

Замечание. Нетрудно доказать, что произведение af является линейным функционалом. Таким образом, af - линейный непрерывный функционал на пространстве D основных функций, т.е. af - обобщённая функция.

2. Доказать, что умножение δ-функции $\delta(x - x_0)$ на функцию $a(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ равносильно умножению $\delta(x - x_0)$ на число $a(x_0)$, т.е.

$$a(x)\delta(x - x_0) = a(x_0)\delta(x - x_0).$$

△ Используя формулы (2) и (8), получаем:

$$\forall \ \varphi(x) \in D: \ \ (a(x)\delta(x - x_0), \varphi(x)) = (\delta(x - x_0), a(x)\varphi(x)) = a(x_0)\varphi(x_0),$$

$$(a(x_0)\delta(x-x_0),\varphi(x)) = (\delta(x-x_0), a(x_0)\varphi(x)) = a(x_0)\varphi(x-x_0).$$

Таким образом, функционалы $a(x)\delta(x_0)$ и $a(x_0)\delta(x-x_0)$ на любой функции $\varphi(x)$ из пространства D имеют равные значения. Это и означает, что эти функционалы равны:

$$a(x)\delta(x-x_0) = a(x_0)\delta(x-x_0),$$

что и требовалось доказать. ▲

3. Доказать, что

$$D\widehat{\cos x} = -\widehat{\sin x}, \tag{18}$$

где $\widehat{\cos x}$ и $\widehat{\sin x}$ - регулярные обобщённые функции, порождённые функциями $\cos x$ и $\sin x$.

△ Требуется доказать, что

$$\forall \ \varphi(x) \in D: \ \ (D\widehat{\cos x}, \varphi(x)) = (-\widehat{\sin x}, \varphi(x)).$$

Это и будет означать справедливость равенства (18). По определению регулярной обобщённой функции

$$\forall \ \varphi(x) \in D: \ \ (-\widehat{\sin x}, \varphi(x)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot \varphi(x) dx, \tag{19}$$

а по определению производной обобщённой функции

$$\forall \ \varphi(x) \in D: \ \ (D\widehat{\cos x}, \varphi(x)) = -(\widehat{\cos x}, D\varphi(x)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \cdot \varphi'(x) dx. \tag{20}$$

Применяя к интегралу в правой части (20) формулу интегрирования по частям и учитывая финитность функции $\varphi(x)$ и равенство (19), получаем:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \cdot \varphi'(x) dx = -\cos x \cdot \varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot \varphi(x) dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot \varphi(x) dx = (-\widehat{\sin x}, \varphi(x)).$$

Итак,

$$\forall \ \varphi(x) \in D: \ \ (D\widehat{\cos x}, \varphi(x)) = (-\widehat{\sin x}, \varphi(x)),$$

что и требовалось доказать. ▲

4. Найти производную δ-функции $\delta(x)$.

△ По определению производной обобщённой функции

$$\forall \ \varphi(x) \in D: \ \ (D\delta(x), \varphi(x)) = -(\delta(x), D\varphi(x)) = -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0).$$

Таким образом, производная δ-функции - это обобщённая функция, которая ставит в соответствие каждой функции $\varphi(x)$ из пространства D число $-\varphi'(0)$. ▲

5. Доказать теорему 4.

△ Для доказательства справедливости равенства (12) нужно доказать, что:

$$\forall \ \varphi(x) \in D: \ \ (D\widehat{f}, \varphi) = (\widehat{f'}, \varphi) + [f]_{x_0}(\delta(x-x_0), \varphi(x)), \tag{21}$$

т.е.

$$(D\widehat{f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx + [f]_{x_0} \cdot \varphi(x_0).$$

По определению производной $D\widehat{f}$ имеем $\forall\ \varphi(x) \in D$:

$$(D\widehat{f}, \varphi) = -(\widehat{f}, D\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Интеграл в правой части равенства разобьём на сумму двух интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_0}^{+\infty}$$

и к каждому из них применим формулу интегрирования по частям. Получим

$$(D\widehat{f}, \varphi) = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)d\varphi(x) - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)d\varphi(x) = -f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0-0} +$$

$$+\int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx - f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0+0}^{+\infty} + \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx + [f(x_0+0) - f(x_0-0)] \cdot \varphi(x_0) =$$

$$= (\widehat{f'}, \varphi) + [f]_{x_0} \cdot (\delta(x-x_0), \varphi(x)).$$

Таким образом, мы получили равенствго (21). Теорема 4 доказана. ▲

6. Доказать, что

$$D\widehat{\Theta} = \delta(x),$$

где $\widehat{\Theta}$ - обобщённая функция Хевисайда (см. задание 8 в конце §2), $\delta(x)$ - δ-функция.

△ Решим эту задачу двумя способами.

1-й способ. Обобщённая функция Хевисайда $\widehat{\Theta}$ порождается функцией Хевисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \tag{22}$$

поэтому

$$\forall\ \varphi(x) \in D: \quad (\widehat{\Theta}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x)\varphi(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Согласно определению производной обобщённой функции

$$\forall\ \varphi \in D: \quad (D\widehat{\Theta}, \varphi) = -(\widehat{\Theta}, D\varphi) = -(\widehat{\Theta}, \varphi') = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx =$$

$$= -\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty} = \varphi(0).$$

С другой стороны, $\varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$, и, следовательно,

$$\forall\ \varphi(x) \in D: \quad (D\widehat{\Theta}, \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x)),$$

т.е. $D\widehat{\Theta} = \delta(x)$.

2-й способ. Функция Хевисайда $\Theta(x)$ (см. (22)) удовлетворяет условиям теоремы 4, причём $x_0 = 0$, $[\Theta]_{x=0} = 1$. Так как $\Theta'(x) = 0$ при $x \neq 0$, то

$$\forall\ \varphi(x) \in D: \quad (\widehat{\Theta'}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta'(x)\varphi(x)dx = 0,$$

т.е. $\widehat{\Theta}' = 0$. По формуле (12) получаем:

$$D\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}' + [\Theta]_{x=0} \cdot \delta(x), \quad \text{т.е.} \;\; D\widehat{\Theta} = \delta(x). \quad \blacktriangle$$

7. Доказать, что если локально интегрируемая функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| \leq M(1 + |x|^n), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

где $M > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ - некоторые числа, то функционал $\widehat{f}$ на пространстве S, порождаемый функцией $f(x)$, т.е.

$$\forall \;\; \varphi(x) \in S: \;\; (\widehat{f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \tag{24}$$

является обобщённой функцией медленного роста (т.е. $\widehat{f} \in S'$).

$\triangle$ Прежде всего отметим, что $\forall \;\; \varphi(x) \in S$ интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ сходится, так как в силу (23) и того, что $\varphi(x) \in S$, функция $f(x)\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$ быстрее любой степени $1/|x|$. Следовательно, формула (24) задаёт функционал на пространстве S.

Нам нужно доказать, что этот функционал является линейным и непрерывным.

Линейность функционала $\widehat{f}$ следует из линейного свойства интеграла - для любых $\varphi_1(x) \in S$, $\varphi_2(x) \in S$ и чисел α и β имеем:

$$(\widehat{f}, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x))dx =$$

$$= \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)dx + \beta\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_2(x)dx = \alpha(\widehat{f}, \varphi_1) + \beta(\widehat{f}, \varphi_2).$$

Для доказательства непрерывности функционала $\widehat{f}$ нужно доказать, что для любой последовательности основных функций $\{\varphi_n(x)\}$, сходящейся в пространстве S к функции $\varphi(x)$, числовая последовательность $(\widehat{f}, \varphi_n)$ сходится к $(\widehat{f}, \varphi)$ или, что то же самое,

$$(\widehat{f}, \varphi_n) - (\widehat{f}, \varphi) = (\widehat{f}, \varphi_n - \varphi) \to 0 \;\; \text{при} \;\; n \to \infty.$$

Если $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ в пространстве S, то, согласно определению сходимости в S,

$$k := \mathrm{Sup}_{\mathbb{R}} \left[(1 + |x|^n)(1 + x^2)|\varphi_n(x) - \varphi(x)|\right] \to 0 \;\; \text{при} \;\; n \to \infty.$$

а так как

$$\left|(\widehat{f}, \varphi_n - \varphi)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\varphi_n(x) - \varphi(x))dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} M(1 + |x|)^n(1 + x^2)\,|\varphi_n(x) - \varphi(x)|\,\frac{dx}{1 + x^2} \leq k\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi k,$$

то

$$(\widehat{f}, \varphi_n - \varphi) \to 0 \;\; \text{при} \;\; n \to \infty,$$

что и требовалось доказать. $\blacktriangle$

8. Доказать теорему 5.

$\triangle$ Для любой функции $\varphi(x)$ из множества $D[a, b]$ имеем цепочку равенств

$$(\widehat{\delta_n}(x, x_0), \varphi(x)) = \left(\sum_{k=1}^{n} \psi_k(x_0)\widehat{\psi_k}(x), \varphi(x)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x_0)(\widehat{\psi_k}(x), \varphi(x)) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \psi_k(x_0).$$

Правая часть этих равенств представляет собой частичную сумму ряда Фуре функции $\varphi(x)$ по системе $\{\psi_n(x)\}$ в точке x_0. По условию теоремы этот ряд сходится к $\varphi(x_0)$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \psi_k(x_0) \to \varphi(x_0) = (\delta(x - x_0), \varphi(x)) \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом,

$$\forall \ \varphi(x) \in D[a, b] : \ \ (\widehat{\delta_n}(x, x_0), \varphi(x)) \to (\delta(x - x_0), \varphi(x)) \text{ при } n \to \infty,$$

а это и означает, что $\widehat{\delta_n}(x, x_0)$ слабо сходится к $\delta(x - x_0)$ при $n \to \infty$. Теорема 5 доказана. ▲

9. Найти образ Фурье δ-функции $\delta(x - x_0)$.

△ Полагая в формуле (16) $f = \delta(x - x_0)$, получаем $\forall \ \varphi(x) \in S$:

$$\left(F_{\delta(x-x_0)}, \varphi\right) = (\delta(x - x_0), F_\varphi(x)) = F_\varphi(x_0) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-ix_0 t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0 t}\right) \varphi(t) dt =$$

$$= \left(\widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0 t}}, \varphi(t)\right).$$

Отсюда следует, что образом Фурье функции $\delta(x - x_0)$ является регулярная обобщённая функция, порождённая функцией $(1/\sqrt{2\pi})e^{-ix_0 t}$:

$$F_{\delta(x-x_0)}(t) = \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0 t}}. \quad ▲$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

9. Докажите, что если $f(x)$ - обобщённая функция, то функционал $f(ax + b)$, где $a \neq 0$, является непрерывным.

10. Докажите, что производная обобщённой функции является обобщённой функцией.

11. Докажите, что для любой обобщённой функции f и любых натуральных чисел m и n справедливо равенство

$$D^m(D^n f) = D^{m+n} f.$$

12. Докажите, что:
а) $D\widehat{\sin x} = \widehat{\cos x}$; б) $D\widehat{e^x} = \widehat{e^x}$; в) $D\widehat{\mathrm{Sgn}\, x} = 2\delta(x)$; г) если $f(x) = |x - x_0|$, то $D^2 \widehat{f} = 2\delta(x - x_0)$; д) $\forall \ \varphi(x) \in D : \ \ (D^k \delta(x - x_0), \varphi(x)) = (-1)^k \varphi^{(k)}(x_0)$.

13. Найдите разложение δ-функции $\delta(x - x_0)$, $x_0 \in (-\pi, \pi)$ в ряд Фурье по системе обобщённых функций

$$\left\{ \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{\cos nx}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{\sin nx}, n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

14. Докажите, что функция $\varphi(x) = e^{-x^2}$ является элементом пространства S основных функций.

Ответы и указания

Ряды и интегралы Фурье

1. б); в); д).

3. а) $\dfrac{\pi}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, $x\in(-\pi;\pi)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$, $x\in(0;2\pi)$;

в) $\dfrac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$, $x\in(0;2\pi)$; г) $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}$, $x\in[-\pi;\pi]$;

д) $\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos 4x$, $x\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$; е) $-\dfrac{1}{2}\sin x+2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n^2-1}\sin nx$, $x\in(-\pi;\pi)$.

4. $x^3=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{6}{n^3}\right)\sin nx$, $x\in(-\pi;\pi)$;
$x^4=\frac{\pi^4}{5}+8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi^2}{n^2}-\frac{6}{n^4}\right)\cos nx$, $x\in[-\pi;\pi]$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx$; указание: представить $f(x)$ в виде

$$f(x)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-qt}-\frac{1}{1-\frac{q}{t}}\right),\quad \text{где}\ \ t=e^{ix};$$

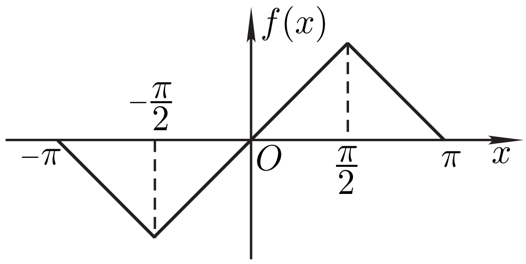
б) $\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos nx$; указание: представить $f(x)$ в виде

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-qt}+\frac{1}{1-\frac{q}{t}}\right),\quad \text{где}\ \ t=e^{ix};$$

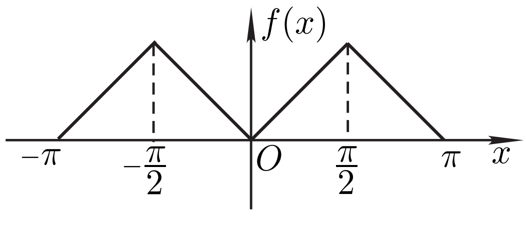
в) $-1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos nx$; указание: представить $f(x)$ в виде

$$f(x)=-1+\frac{1}{1-qt}+\frac{1}{1-\frac{q}{t}},\quad \text{где}\ \ t=e^{ix}.$$

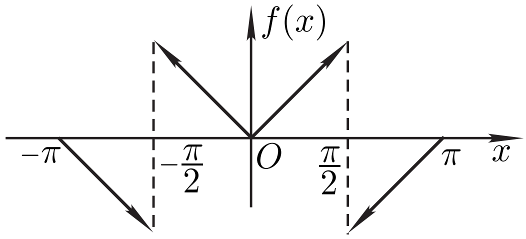
6. Ряд (32) сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$.



7. а) Ряд (32) сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$;



б) Ряд (32) сходится неравномерно на $[-\pi;\pi]$.



10. Указание: воспользуйтесь равенством

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f,\ \ \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\right)$$

аналогично тому, как это делалось в примере 2.

12. Указание: воспользуйтесь тождеством Бесселя аналогично тому, как это было сделано в примере 3.

13. Указание: воспользуйтесь тождеством Бесселя и равенством Парсеваля.

14. Указание: доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в примере 5.

15.а) $\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(x)dx - \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k^2$, где $\displaystyle b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx$; б) 0.

16. $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$. **17.** Указание: предположив, что элементы f и g евклидова пространства имеют одинаковые ряды Фурье и, значит, одинаковые коэффициенты Фурье по полной системе $\{\psi_n\}$, докажите, что разность $f-g$ является нулевым элементом пространства.

18. а) $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x d\lambda$; б) $\displaystyle\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-a\lambda}\cos\lambda x d\lambda$; в) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a\lambda}\sin\lambda x d\lambda$;

г) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{a\cos\lambda x + \lambda\sin\lambda x}{\lambda^2+a^2}d\lambda$; д) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\cos\lambda x d\lambda$;

е) $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\sin\lambda x d\lambda$.

19. а) $\hat{f}(\lambda) = \begin{cases} i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda\cos\lambda-\sin\lambda}{\lambda^2}, & \lambda\neq 0,\\ 0, \ \ \lambda = 0;\end{cases}$ б) $\hat{f}(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\lambda)}$;

в) $\hat{f}(\lambda) = \dfrac{-i\lambda}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$.

20. а) $\hat{f}_c(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$; б) $\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda}$; в) $\hat{f}_c(\lambda) = \begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}, & |\lambda|\neq 1,\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \ \ |\lambda| = 1.\end{cases}$

21. а) $\hat{f}_s(\lambda) = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$; б) $\hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda}$; в) $\hat{f}_s(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}, & |\lambda| \neq 1, \\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \lambda = -1, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \lambda = 1. \end{cases}$

Обобщённые функции

2. Указание: нужно доказать, что $a(x)\varphi_n(x) \in D$, $a(x)\varphi(x) \in D$, и для последовательности $\{a(x)\varphi_n(x)\}$ выполнены условия 1) и 2) из определения сходимости в пространстве D.

7. Указание: доказательство можно провести по той же схеме, как и доказательство в примере 4.

8. $O_{\widehat{\Theta}} = (-\infty, 0)$, $\operatorname{Supp} \widehat{\Theta} = [0, +\infty)$.

10. Указание: нужно доказать, что производная обобщённой функции является линейным непрерывным функционалом на пространстве D основных функций.

13. $\delta(x - x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos nx_0 \cdot \widehat{\cos nx} + \sin nx_0 \cdot \widehat{\sin nx} \right)$.

Подписано к печати … 2017 г.
Тираж 50 экз. Заказ № ….
Отпечатано в отделе оперативной печати
Физического факультета