Множества и последовательности точек

1. Сформулируйте определение изолированной точки множества $D \subset R^m$. Приведите пример.
2. Сформулируйте определение внутренней точки множества D точек пространства. Приведите пример.
3. Сформулируйте определение предельной точки множества D точек пространства R^m. Приведите пример.
4. Сформулируйте определение связного множества точек пространства R^m. Приведите пример несвязного множества.
5. Сформулируйте определение открытого множества точек пространства R^m. Приведите пример.
6. Сформулируйте определение замкнутого множества точек пространства R^m. Приведите пример.
7. Сформулируйте определение ограниченной последовательности точек пространства R^m. Является ли последовательность $\left\{M_n\left(\frac{1}{n};n\right)\right\}$ ограниченной? Обоснуйте ответ.
8. Сформулируйте определение сходящейся последовательности точек пространства R^m. Является ли последовательность $\left\{M_n\left(\frac{1}{n};\sin n\right)\right\}$ сходящейся? Обоснуйте ответ.
9. Сформулируйте определение неограниченной последовательности точек пространства R^m. Приведите пример.
10. Сформулируйте определение предела последовательности точек пространства R^m Можно ли утверждать, что если $\{x_n\} \to x_0$ и $\{y_n\} \to y_0$, то $\{M_n(x_n;y_n)\} \to M_0(x_0;y_0)$? Обоснуйте ответ.
11. Сформулируйте определение предельной точки последовательности точек пространства R^m. Приведите пример.
12. Докажите, что любая внутренняя точка множества является его предельной точкой.
13. Докажите, что любая точка множества точек на плоскости, которая не является внутренней, является его граничной точкой.
14. Докажите, что граничная точка множества является либо предельной точкой, либо изолированной точкой этого множества.
15. Докажите, что любая точка сферы в пространстве R^m является граничной.
16. Пусть точка M_0 не лежит на сфере пространстве R^m. Докажите, что эта точка не является граничной точкой сферы.
17. Найдите предел последовательности точек $\left\{M_n\left(\cos\frac{\pi}{n},\sin\frac{\pi}{n}\right)\right\}$ на плоскости.
18. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, все точки которого предельные. Обоснуйте ответ.

Предел функции, её ограниченность и непрерывность

1. Сформулируйте определение ограниченной сверху функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m. Приведите пример для функции двух переменных на множестве а) $x^2 + y^2 < 4$; б) $x^2 + y^2 > 4$.
2. Сформулируйте определение точной нижней грани функции *m* *(курсив)* переменных на множестве D точек пространства R^m. Приведите пример для функции двух переменных.
3. Сформулируйте определение точной верхней грани функции *m* переменных на множестве D точек пространства R^m. Приведите пример для функции двух переменных.
4. Сформулируйте определение неограниченной снизу функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m. Приведите пример.
5. Сформулируйте определение ограниченной снизу функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m. Приведите пример.
6. Сформулируйте определение неограниченной сверху функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m. Приведите пример.

7. Приведите пример неограниченной снизу и неограниченной сверху функции, определённой на множестве $\left\{(x,y): x^2+y^2>1\right\}$.
8. Приведите пример неограниченной сверху и ограниченной снизу функции, определённой на множестве $\left\{(x,y): x^2+y^2>1\right\}$.
9. Приведите пример ограниченной сверху и неограниченной снизу функции, определённой на множестве $\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1\right\}$.
10. Приведите пример неограниченной сверху и ограниченной снизу функции, определённой на множестве $\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1\right\}$.
11. Приведите пример функции двух переменных, которая непрерывна и ограничена на заданном ограниченном множестве, но не достигает на этом множестве своей точной верхней грани. Обоснуйте ответ.
12. Приведите пример функции двух переменных, которая непрерывна на заданном ограниченном, но незамкнутом множестве, и является неограниченной на этом множестве. Обоснуйте ответ.
13. Приведите пример разрывной функции двух переменных, которая непрерывна по каждой переменной в отдельности. Обоснуйте ответ.
14. Сформулируйте определение предела функции $u(M)$ в точке M_0 “по Коши”. Приведите пример.
15. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0.
16. Сформулируйте “по Гейне” отрицание того, что число b является пределом функции $u(M)$ точке M_0.
17. Сформулируйте определение “по Гейне” того, что функция $u(M)$ не имеет предела при $M\to\infty$.
18. Сформулируйте определение “по Гейне” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0.
19. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $u(M)$ не имеет предела при $M\to\infty$.
20. Исследуйте функцию $u\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$ на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в точке $(0,0)$.
21. Исследуйте функцию $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{xy}, & xy\ne 0,\\ 1, & xy=0\end{cases}$ на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в точке $(0,1)$.
22. Исследуйте функцию $u\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(xy\right)}{x}, & xy\ne 0,\\ 1, & xy=0\end{cases}$ на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в точках $(0;1)$, (1;0) и (0;0).
23. Исследуйте функцию $u\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в точке (0;0).
24. Исследуйте функцию $u\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в точке (0;0).

25. Исследуйте функцию $u\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в точке $\left(0;0\right)$.

Дифференцируемость функций.

1. Сформулируйте определение частной производной функции $f(x_1,...,x_m)$ по переменной x_k в точке $M(x_1,x_2,...,x_m)$. Найдите $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^y\right),\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^y\right)$.
2. Сформулируйте определение дифференцируемой функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$. Приведите пример функции, дифференцируемой в точке $M(1;0)$.
3. Сформулируйте определение первого дифференциала функции нескольких переменных. Найдите дифференциал функции e^{x+y} в точке $M(0;0)$.
4. Сформулируйте определение производной по направлению $\vec{l}=\left\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right\}$ для функции $f(x,y,z)$ в точке $M(x_0,y_0,z_0)$. Вычислите производную $u\left(x,y\right)=2x+3y,$ (по направлению вектора $\vec{L}=\left\{3;-2\right\}$ в точке $M_0(3;2)$.
5. Сформулируйте определение производной по направлению $\vec{l}=\left\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right\}$ для функции $f(x,y,z)$ в точке $M(x_0,y_0,z_0)$. Вычислите производную $u\left(x,y,z\right)=\ln(xyz), x>0,\quad y>0,\quad z>0,$ (по направлению вектора $\vec{L}=\left\{1;1;1\right\}$ в точке $M_0=(1;1;1)$.
6. Сформулируйте определение градиента функции $f(x,y,z)$ в данной точке $M(x_0,y_0,z_0)$. Найдите $\operatorname{grad} r, \operatorname{grad}\dfrac{1}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
7. В чем состоит свойство инвариантности формы первого дифференциала? Приведите пример.
8. Имеет ли функция $u\left(x,y\right)$ частные производные первого порядка в точке (0,0)? Если имеет, найдите их и исследуйте эти частные производные на непрерывность в точке(0,0).

$u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^2y}$; $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{xy}$; $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$;

$u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{xy\left(x^2+y^2\right)}$; $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^4-y^4}$; $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{yx^4+xy^4}$.

9. Является ли функция $u\left(x,y\right)$ дифференцируемой в точке(0,0)?

$u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{xy}$; $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^2y}$; $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$; $u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{x^4-y^4}$;

$u\left(x,y\right)=\sqrt[3]{xy\left(x^2+y^2\right)}$;

$u\left(x,y\right)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$, если $x^2+y^2>0$, $u\left(0,0\right)=0$;

$u\left(x,y\right)=xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$, если $x^2+y^2>0$, $u\left(0,0\right)=0$.

10. Сформулируйте определение n-ной частной производной функции нескольких переменных в данной точке. Приведите пример функции $u(x,y)$, для которой $\dfrac{\partial^2u\left(x,y\right)}{\partial x^2}\neq 0$, а $\dfrac{\partial^3u\left(x,y\right)}{\partial x^3}=0$ для всех значений (x,y) из области определения.

11. Сформулируйте определение n раз дифференцируемой функции нескольких переменных в данной точке. Приведите пример функции $u(x, y)$, для которой $d^2u = 0$, а $u \neq const$.
12. Дайте определение n-ого дифференциала. В чем состоит свойство неинвариантности формы дифференциала второго порядка? Обоснуйте ответ с помощью примера.
13. Найдите смешанную частную производную второго порядка u_{xy} сложной функции $u = f(\xi, \eta, \theta), \qquad \xi = xy, \quad \eta = x - y, \quad \theta = x + y$, где f — дважды дифференцируемая функция, x и y — независимые переменные.
14. Найдите смешанную частную производную u_{xy} второго порядка сложной функции $u = f(\xi, \theta), \qquad \xi = x^2 + y^2, \quad \theta = x^2 - y^2$, где f — дважды дифференцируемая функция, x и y — независимые переменные.
15. Запишите формулу Тейлора второго порядка с центром разложения в точке $M_0(0,0)$ и с остаточным членом в форме Пеано для функции $u(x,y) = \sqrt{1 - x - y}$.
16. Запишите формулу Тейлора второго порядка с центром разложения в точке $M_0(e,e)$ и с остаточным членом в форме Пеано для функции $u = x^y$.
17. Запишите формулу Тейлора третьего порядка с центром разложения в точке $M_0(0,0)$ и с остаточным членом в форме Пеано для функции $u = e^x \sin y$.
18. Запишите формулу Тейлора третьего порядка с центром разложения в точке $M_0(0,0)$ и с остаточным членом в форме Пеано для функции $u = \ln(1 + x + y)$.
19. Запишите формулу Тейлора третьего порядка с центром разложения в точке $M_0(x_0, y_0)$ и с остаточным членом в форме Пеано для функции $u(x,y) = x^3 - y^2 + 3xy$.
20. Сформулируйте определение локального экстремума функции нескольких переменных. Приведите пример функции, у которой в точке $M_0(1,0)$ есть а) локальный максимум; б) локальный минимум.
21. Докажите теорему о необходимом условии локального экстремума функции нескольких переменных.
22. Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$. Докажите, что функция $u(x,y) + v(x,y)$ также имеет локальный минимум в указанной точке.
23. Приведите пример функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, которые имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функция $u(x,y) \cdot v(x,y)$ имеет локальный максимум в указанной точке.
24. Приведите пример функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, которые имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функция $u(x,y) \cdot v(x,y)$ не имеет локального экстремума в указанной точке.

Неявные функции

1. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y) = 0$ в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$. Верны ли условия теоремы для функции $y(x)$, заданной уравнением $x^2 + \cos y = 1$ в окрестности точки $O(0;0)$? Обоснуйте ответ.
2. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y) = 0$ в прямоугольнике. Верны ли условия теоремы для функции $y(x)$, заданной уравнением $x^2 + 3\sin y = 1$ в прямоугольнике а) $-1 \le x \le 1, -\pi \le y \le \pi$; б) $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$. Обоснуйте ответ.
3. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y) = 0$. Верны ли условия теоремы в точке $M\ (1;0)$ для функции $y(x)$, заданной уравнением $x(\cos y - x) = 0$? Обоснуйте ответ.

4. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$. Найдите точки, в которых нарушаются условия теоремы для функции $z(x,y)$, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Обоснуйте ответ.
5. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$. Верны ли условия теоремы в точке $M\left(1;1;0\right)$ для функции $z = f(x,y)$, заданной уравнением $x\left(y-1\right) - z^2 = 0$? Обоснуйте ответ.
6. Сформулируйте теорему о существовании и дифференцируемости функций $y = f(x)$, $z = g(x)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$
7. Пусть функции $y = u(x)$, $z = v(x)$ заданы системой уравнений $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$. Вычислите первый дифференциал функции $u(x)$.
8. Найдите частные производные первого порядка и первый дифференциал дифференцируемой функции $z = z(x,y)$, заданной неявно уравнением $z\cos x + y\cos z + x\cos y = 3$.
9. Найдите частные производные первого порядка и первый дифференциал дифференцируемой функции $z = z(x,y)$, заданной неявно уравнением $x^2 + zx + z^2 + y = 0$.
10. Пусть функции $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ заданы неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x,y) = u, \\ G(x,y) = v. \end{cases}$

    Найдите $\dfrac{\partial x}{\partial v}$.
11. Пусть функции $y = f(x)$, $z = g(x)$ заданы неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$

    Найдите $\dfrac{dz}{dx}$.
12. Найдите первые дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений

$$\begin{cases} xu + yv = 1, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$$

Вопросы ко второй части.

1. Докажите, что объединение любого числа открытых множеств является открытым множеством.
2. Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством. Верно ли это для бесконечного количества открытых множеств?
3. Докажите, что сходящаяся последовательность точек пространства R^m является ограниченной.
4. Докажите, что если числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются сходящимися, то последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ на плоскости является ограниченной.
5. Докажите, что если последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ на плоскости является сходящейся, то числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются сходящимися.
6. Докажите, что ограниченная последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ на плоскости имеет по крайней мере одну предельную точку.
7. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности точек пространства R^m. Докажите необходимость.
8. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности точек пространства R^m. Докажите достаточность.
9. Сформулируйте и докажите первую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.
10. Сформулируйте и докажите вторую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.
11. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы двух непрерывных функций нескольких переменных.
12. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности произведения двух непрерывных функций нескольких переменных.
13. Сформулируйте и докажите теорему о прохождении непрерывной функции двух переменных через любое промежуточное значение.
14. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции $f\left(u(x,y)\right)$.
15. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции $f\left(x(t), y(t)\right)$.
16. Сформулируйте и докажите теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
17. Сформулируйте и докажите теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
18. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцируемости сложной функции $f\left(u(x,y)\right)$.
19. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцируемости сложной функции $f\left(x(t), y(t)\right)$.
20. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2. Докажите, что функция $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ дифференцируема в точке $M(x_1, x_2)$.
21. Докажите, что производная дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функции $f(x,y,z)$ по направлению $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ равна скалярному произведению вектора $\vec{l}$ и градиента функции f в точке M_0.
22. Пусть функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(0,0)$. Докажите, что $f(h,h) - f(h,0) - f(0,h) + f(0,0) = \left(f_{xy}(0,0) + \alpha\right)h^2$, где $\alpha \to 0$ при $h \to 0$.
23. Пусть функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(0,0)$. Докажите, что $f(h,h) - f(h,0) - f(0,h) + f(0,0) = \left(f_{yx}(0,0) + \alpha\right)h^2$, где $\alpha \to 0$ при $h \to 0$.
24. Сформулируйте и докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x,y)$ с центром разложения в точке $M_0(x_0, y_0)$.
25. Сформулируйте и докажите теорему о достаточных условиях локального экстремума функции нескольких переменных.
26. Сформулируйте и докажите теорему о существовании и непрерывности функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y) = 0$.

27. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцируемости функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y) = 0$.
28. Сформулируйте и докажите теорему о существовании и непрерывности функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$.
29. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцируемости функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$.
30. Сформулируйте и докажите теорему о существовании и дифференцируемости функций $y = f(x)$, $z = g(x)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$
31. Пусть функция $u(x,y) = f(x)\cdot g(y)$ имеет локальный экстремум в точке $M(x_1,x_2)$, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, $f(x_1) \neq 0$, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2, $g(x_2) \neq 0$. Докажите, что $f'(x_1) = 0$, $g'(x_2) = 0$.
32. Пусть функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_1, $f(x_1) > 0$, функция $g(x)$ имеет локальный минимум в точке x_2, $g(x_2) > 0$. Докажите, что функция $u(x,y) = f(x)\cdot g(y)$ имеет локальный минимум в точке $M(x_1,x_2)$.