

§3. Общая задача Коши. Функция Римана

Задача Коши для уравнения колебаний с постоянными коэффициентами

$$u_{tt} - u_{zz} + au_t + bu_z + gu = 0$$

$$u = Ue^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}$$

$$u_t = U_t e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} - \frac{a}{2} U e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}; \quad u_z = U_z e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} + \frac{b}{2} U e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}$$

$$u_{tt} = U_{tt} e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} - a U_t e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} + \frac{a^2}{4} U e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}$$

$$u_{zz} = U_{zz} e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} + b U_z e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} + \frac{b^2}{4} U e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}$$

$$\begin{aligned} & U_{tt} e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} - U_{zz} e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} - \cancel{a U_t e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}} + \cancel{a U_t e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}} + \frac{a^2}{4} U e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} - \frac{a^2}{2} U e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} - \\ & \cancel{-b U_z e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}} + \cancel{b U_z e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}} - \frac{b^2}{4} U e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} + \frac{b^2}{2} U e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} + g U e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} = \\ & = \left\{ U_{tt} - U_{zz} - \frac{a^2}{4} U + \frac{b^2}{4} U + g U \right\} e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} = 0 \end{aligned}$$

$$U_{tt} - U_{zz} + \left(g - \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) U = 0$$

$$U_{tt} - U_{zz} + C U = 0; \quad C = g - \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$u|_{t=0} = U|_{t=0} e^{\frac{b}{2}z} = \varphi(z) \Rightarrow U|_{t=0} = \varphi(z) e^{-\frac{b}{2}z} = \varphi_1(z)$$

$$u_t = U_t e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} - \frac{a}{2} U e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z}$$

$$u_t|_{t=0} = U_t|_{t=0} e^{\frac{b}{2}z} - \frac{a}{2} U|_{t=0} e^{\frac{b}{2}z} = U_t|_{t=0} e^{\frac{b}{2}z} - \frac{a}{2} \varphi(z) e^{-\frac{b}{2}z} e^{\frac{b}{2}z} = \psi(z) \Rightarrow$$

$$U_t|_{t=0} e^{\frac{b}{2}z} = \psi(z) + \frac{a}{2} \varphi(z) \Rightarrow U_t|_{t=0} = (\psi(z) + \frac{a}{2} \varphi(z)) e^{-\frac{b}{2}z} = \psi_1(z)$$

Перейдем к переменным x и y :

$$x = t + z; y = t - z \Rightarrow t = \frac{x+y}{2}, z = \frac{x-y}{2}$$

$$U(t, z) = U\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) = W(x, y) \Rightarrow$$

$$U_t = W_x + W_y; U_{tt} = W_{xx} + 2W_{xy} + W_{yy}; U_z = W_x - W_y; U_{zz} = W_{xx} - 2W_{xy} + W_{yy}$$

$$U_{tt} - U_{zz} + CU = 0 \Rightarrow 4W_{xy} + CW = 0 \Rightarrow W_{xy} + \frac{C}{4}W = 0$$

$$U|_{t=0} = W|_{x+y=0} = \varphi_1\left(\frac{x-y}{2}\right), U_t|_{t=0} = (W_x + W_y)|_{x+y=0} = \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$t = 0 \Rightarrow y = -x;$$

$$x = t + z|_{t=0} = z \Rightarrow dx = dz;$$

$$y = t - z|_{t=0} = -z \Rightarrow dy = -dz;$$

$$A(-y_0, y_0) \quad M_0(x_0, y_0)$$

$$y = -x$$

Функция Римана:

$$V(M, M_0) = V(x, y, x_0, y_0) = J_0(2\sqrt{C(x-x_0)(y-y_0)}) \quad (34)$$

$$W(M_0) = \frac{(\varphi_1 V)_A + (\varphi_1 V)_B}{2} - \frac{1}{2} \int_{AB} P dx + Q dy, \quad (22)$$

$$B(x_0, -x_0)$$

$$\text{где } P[WW] = WW_x - W_x V; Q[WW] = W_y V - WW_y,$$

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow W(x_0, y_0) = \frac{\varphi_1(-y_0) + \varphi_1(x_0)}{2} - \frac{1}{2} \int_{AB} (WV_x - W_x V) dx + (W_y V - WW_y) dy \quad (40)$$

$$dy = -dx \Rightarrow W(x_0, y_0) = \frac{\varphi_1(-y_0) + \varphi_1(x_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{AB} (W_x + W_y) V dx - \frac{1}{2} \int_{AB} W(V_x + V_y) dx$$

Замечание. На AB аргумент $\frac{x-y}{2} = \frac{x-(-x)}{2} = x = z$ (так как $t = 0$)

$$\frac{\varphi_1(-y_0) + \varphi_1(x_0)}{2} = \frac{\varphi_1(z_0 - t_0) + \varphi_1(z_0 + t_0)}{2}$$

На $AB: x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = z; dx = dz$

$$\frac{x-y}{2} = z; -y_0 = z_0 - t_0; x_0 = z_0 + t_0;$$

$$(x-x_0)(y-y_0) = (t+z-t_0-z_0)(t-z-t_0+z_0) = \\ = ((t-t_0) + (z-z_0))((t-t_0) - (z-z_0)) = (t-t_0)^2 - (z-z_0)^2 \Rightarrow$$

$$\int_{AB} \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) V\left(\frac{x-y}{2}\right) dx = \int_{-y_0}^{x_0} \psi_1(x) \Big|_{y=-x; t=0} \int_{z_0-t_0}^{z_0+t_0} \psi_1(z) J_0(\sqrt{C} \sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}) dz$$

$$\int_{AB} W(V_x + V_y) dx = \int_{-y_0}^{x_0} \varphi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) (V_x + V_y) dx \quad (y=-x)$$

$$V_x + V_y \Big|_{y=-x} = \frac{\partial}{\partial t} J_0(\sqrt{C} \sqrt{(t-t_0)^2 - (z-z_0)^2}) \Big|_{t=0} =$$

$$\frac{J'_0(\sqrt{C} \sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}) \sqrt{C} 2(t-t_0) \Big|_{t=0}}{2\sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}} = \frac{J_1(\sqrt{C} \sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}) \sqrt{C} t_0}{\sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}}$$

$$\int_{AB} \varphi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) (V_x + V_y) dx = \int_{z_0-t_0}^{z_0+t_0} \varphi_1(z) \frac{J_1(\sqrt{C} \sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}) \sqrt{C} t_0}{\sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}} dz$$

$$U(z_0, t_0) = \frac{\varphi_1(z_0+t_0) + \varphi_1(z_0-t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{z_0-t_0}^{z_0+t_0} \left\{ \psi_1(z) J_0\left(\sqrt{c} \sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \varphi_1(z) \frac{J_1\left(\sqrt{c} \sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}\right)}{\sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}} \sqrt{c} t_0 \right\} dz.$$

При $C=0$ из последней формулы получается формула Даламбера (при $a=1$):

$$U(z_0, t_0) = \frac{\varphi_1(z_0 + t_0) + \varphi_1(z_0 - t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{z_0 - t_0}^{z_0 + t_0} \psi_1(z) dz.$$