Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

А. В. Бадьин, Н. Т. Левашова, А. А. Шишкин

Знакомство с теорией групп. Основные понятия. Группы преобразований.

Методическое пособие для студентов физического факультета МГУ

Москва
2015

Аннотация

Настоящее методическое пособие создано коллективом преподавателей кафедры математики физического факультета МГУ и представляет собой расширенное изложение темы «группы», включенной в программу курса линейной алгебры, который читается на физическом факультете во втором семестре. Пособие включает основные понятия теории групп: определения, свойства, основные теоремы и примеры. Особое внимание уделено группам преобразований, в частности, преобразованиям Галилея и Лоренца. Излагаемый в пособии материал рекомендуется как дополнительный для студентов физического факультета МГУ, изучающих курс линейной алгебры, и особенно для тех, кто в будущем планирует глубокое изучение квантовой механики и теоретической физики.

Авторский коллектив выражает глубокую благодарность Сергею Борисовичу Кадомцеву, Алексею Витальевичу Овчинникову и Илье Ефимовичу Могилевскому за ценные идеи и рекомендации.

Рекомендовано Советом отделения прикладной математики в качестве дополнительного материала при изучении курса линейной алгебры для студентов физического факультета МГУ.

Оглавление

1 Основные определения 1
2 Свойства групп 4
3 Примеры групп 6
4 Подгруппы 8
5 Гомоморфизм групп 9
6 Группы преобразований 14
6.1 Движения 17
6.2 Представления групп 21
7 Преобразования координат и времени 26
7.1 Преобразования Галилея 27
7.2 Преобразования Лоренца 32
7.3 Частный случай преобразований Лоренца 38

Литература **42**

1 Основные определения

В ходе изложения мы будем часто использовать понятие множества. Под множеством понимается некоторый произвольный набор элементов. Например, множество чисел, множество векторов или множество отображений. В математике также используется понятие пустого множества, то есть множества, не содержащего ни одного элемента.

Рассмотрим некоторое множество $\mathbf{G}$.

Определение 1.1 *Будем говорить, что на множестве $\boldsymbol{G}$ задана бинарная операция $\star$, если каждой упорядоченной паре элементов $a, b \in \boldsymbol{G}$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $c \in \boldsymbol{G}$.*

Фразу «каждой паре элементов a, b ставится в соответствии элемент c» принято записывать как $c = a \star b$.

Определение 1.2 *Элемент $u \in \boldsymbol{G}$, для которого выполняется равенство $a \star u = a$ для всех $a \in \boldsymbol{G}$, и для каждого $a \in \boldsymbol{G}$ существует такой элемент $y \in \boldsymbol{G}$, что $a \star y = u$, называется правым нейтральным элементом множества $\boldsymbol{G}$.*

Существование правого нейтрального элемента не означает его единственности. Выберем один из таких элементов $u \in \mathbf{G}$ и какой-нибудь элемент $a \in \mathbf{G}$.

Определение 1.3 *Элемент $y \in \boldsymbol{G}$, для которого справедливо равенство $a \star y = u$, называется правым обратным элементом к a.*

Определение 1.4 *Множество $\boldsymbol{G}$ называется группой относительно операции $\star$, если выполняются следующие условия, называемые групповыми аксиомами:*

Аксиома 1.5 *Ассоциативность: для любых трех элементов $a, b, c \in \boldsymbol{G}$ справедливо равенство $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.*

Аксиома 1.6 *Существует хотя бы один правый нейтральный элемент $u \in \boldsymbol{G}$.*

Замечание 1.7 Аксиома 1.5 позволяет опускать скобки в записи произведения трех и более множителей, то есть вместо $(a \star b) \star c$ можно писать $a \star b \star c$.

Если группа задается с использованием бинарной операции, которая называется сложением и обозначается $+$, то говорят об **аддитивной форме записи** групповой операции. В этом случае вместо термина «нейтральный элемент» применяется термин «нулевой элемент» или «нуль», который обозначается o.

Если группа задается с использованием бинарной операции, которая называется умножением, то говорят о **мультипликативной форме записи** групповой операции. В этом случае обозначение $a \star b$ заменяют на ab, а вместо термина «нейтральный элемент» применяют термин «единичный элемент» или «единица», который обозначается e.

Определение 1.8 *Группа называется абелевой, если для любых двух элементов $a, b \in \boldsymbol{G}$ справедливо равенство $a \star b = b \star a$.*

Группа, состоящая из конечного числа элементов, называется **конечной**. Число элементов в конечной группе называется её **порядком**. Группа, не являющаяся конечной, называется **бесконечной**.

Пример 1.9 Множество, состоящее из единственного элемента e, для которого бинарная операция определяется по правилу $e \star e = e$, образует группу.

Пример 1.10 Множество матриц A размером $m \times n$ образует абелеву группу относительно операции сложения матриц. Покажем выполнение аксиомы 1.5. Пусть A_i^k B_i^k и C_i^k, где $i = 1, 2...n$, $k = 1, ..., m$ — элементы матриц A, B, C, соответственно. Рассмотрим две матрицы: $D = (A + B) + C$ и $D' = A+(B+C)$. Используя определение операции сложения матриц (см., например, [1]), запишем цепочку равенств, справедливых для каждого элемента D_i^k матрицы D :

$$D_i^k = (A_i^k + B_i^k) + C_i^k = A_i^k + (B_i^k + C_i^k) = (D')_i^k.$$

Из приведенных равенств следует, что соответствующие элементы матриц D и D' совпадают, то есть аксиома 1.5 выполняется. Свойствами правого нейтрального элемента обладает $m \times n$ матрица O, состоящая только из нулей, поскольку для любой матрицы $A + O = A$ и существует матрица $-A$, для которой выполнено равенство $A + (-A) = O$.

Пример 1.11 Множество квадратных матриц A размером $n \times n$ с отличным от нуля определителем образует группу относительно операции умножения матриц. Эта группа носит название $\mathbf{GL}(n)$ (general linear — полная линейная).

Докажем, что для множества $\mathbf{GL}(n)$ выполняется аксиома 1.5. Пусть A_i^p B_s^i и C_k^s — элементы матриц A, B, $C \in \mathbf{GL}(n)$, соответственно. Здесь $i, k, p, s = 1, 2...n$. Используя определение операции умножения матриц (см., например, [1]), запишем следующую цепочку равенств:

$$(AB)C = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i^p B_s^i \right) C_k^s = \sum_{i,s=1}^{n} A_i^p B_s^i C_k^s =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i^p \left(\sum_{s=1}^{n} B_s^i C_k^s \right) = A(BC).$$

Из равенства начального и конечного выражений в этой цепочке следует выполнение аксиомы 1.5.

Свойствами правого нейтрального элемента обладает единичная матрица E, поскольку для любой матрицы A с ненулевым определителем выполнено равенство $AE = A$ и существует матрица A^{-1}, для которой $AA^{-1} = E$. Эта группа не является абелевой.

2 Свойства групп

Сформулируем и докажем утверждения, которые являются общими для всех групп.

Свойство 2.1 *Пусть $\boldsymbol{G}$ — группа с операцией $\star$, a — некоторый элемент этой группы, $u \in \boldsymbol{G}$ — какой-либо правый нейтральный элемент. Пусть элемент $y \in \boldsymbol{G}$ такой, что выполняется равенство*

$$a \star y = u, \tag{1}$$

тогда выполняется равенство

$$y \star a = u.$$

Доказательство. Согласно аксиоме 1.6 для элемента $y \in \mathbf{G}$ и нейтрального элемента $u \in \mathbf{G}$ можно подобрать такой элемент $z \in \mathbf{G}$, что будет выполнено равенство

$$y \star z = u. \tag{2}$$

Докажем, что будет справедливо равенство $y \star a = u$. Для этого составим следующую цепочку равенств, используя групповые аксиомы и равенства (1) и (2):

$$y \star a = (y \star a) \star u = (y \star a) \star y \star z = y \star (a \star y) \star z = y \star u \star z = y \star z = u.$$

В силу произвольности u можно утверждать, что свойство 2.1 верно для любого правого нейтрального элемента из $\mathbf{G}$ и любого правого обратного элемента.

В силу доказанного свойства 2.1 результаты правого и левого умножения элемента a на правый обратный элемент y совпадают и равны нейтральному элементу, поэтому дальше правый обратный элемент будем называть просто «обратным».

Свойство 2.2 *Для каждого правого нейтрального элемента $u \in \boldsymbol{G}$ и для любого элемента $a \in \boldsymbol{G}$ справедливо равенство $u \star a = a$.*

Доказательство. Пусть u — правый нейтральный элемент и $a \in \mathbf{G}$. Согласно аксиоме 1.6 найдется такой элемент $y \in \mathbf{G}$, что $a \star y = u$. Используя это утверждение, а также свойство 2.1 и групповые аксиомы, получаем цепочку равенств

$$u \star a = (a \star y) \star a = a \star (y \star a) = a \star u = a.$$

В силу произвольного выбора элементов u и a можно утверждать, что свойство 2.2 справедливо для каждого правого нейтрального элемента $u \in \mathbf{G}$.

В силу свойства 2.2 результаты правого и левого умножения элемента a на правый нейтральный элемент совпадают, поэтому дальше правый нейтральный элемент будем называть просто «нейтральным»

Свойство 2.3 *Существует единственный нейтральный элемент $u \in \boldsymbol{G}$.*

Доказательство. Пусть $u_1 \in \mathbf{G}$ и $u_2 \in \mathbf{G}$ — два нейтральных элемента. Используя свойство 2.2 и аксиому 1.6, можно записать цепочку равенств

$$u_1 = u_1 \star u_2 = u_2 \star u_1 = u_2.$$

Свойство 2.4 *Для каждого элемента $a \in \boldsymbol{G}$ существует единственный обратный элемент $y \in \boldsymbol{G}$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого элемента $a \in \mathbf{G}$ существуют два обратных элемента: y_1 и y_2, то есть выполняются равенства $a \star y_1 = u$ и $a \star y_2 = u$. Для обратных элементов y_1 и y_2 справедливо свойство 2.1. Используя это свойство и групповые аксиомы, можно записать цепочку равенств

$$y_1 = y_1 \star u = y_1 \star (a \star y_2) = (y_1 \star a) \star y_2 = u \star y_2 = y_2.$$

В группе с аддитивной формой записи бинарной операции элемент y, обратный к a, принято называть «противоположным элементом» и обозначать $-a$. В группе с мультипликативной формой записи бинарной операции элемент, обратный к a, обозначается как a^{-1}. Дальше мы будем использовать обозначение a^{-1} для обратного элемента в случае всех форм записи бинарных операций, кроме аддитивной.

Следствие 2.5 $u^{-1} = u$.

Это утверждение следует из единственности обратного элемента и равенств $u \star u^{-1} = u$ и $u \star u = u$.

Следствие 2.6 $(a^{-1})^{-1} = a$.

Это следует из единственности обратного элемента и равенств

$$(a^{-1})^{-1} \star a^{-1} = u \quad \text{и} \quad a \star a^{-1} = u.$$

Следствие 2.7 *Для любых двух элементов* $a, b \in \boldsymbol{G}$ *справедливо равенство* $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$.

Доказательство. Запишем цепочку равенств

$$(a \star b) \star (b^{-1} \star a^{-1}) = a \star (b \star b^{-1}) \star a^{-1} = a \star u \star a^{-1} = a \star a^{-1} = u.$$

Сравнивая полученный результат с равенством $(a\star b)\star(a\star b)^{-1} = u$ и учитывая единственность обратного элемента, убеждаемся в справедливости утверждения.

Свойство 2.8 *Для любых двух элементов* $a, b \in \boldsymbol{G}$ *существуют единственный элемент* $x \in \boldsymbol{G}$ *и единственный элемент* $z \in \boldsymbol{G}$*, являющиеся решениями уравнений* $a \star x = b$ *и* $z \star a = b$.

Доказательство. Пусть a — элемент группы $\mathbf{G}$. Согласно аксиоме 1.6 и свойствам 2.1 и 2.4, существует единственный элемент $a^{-1} \in \mathbf{G}$, для которого выполнены равенства $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = u$. Решениями уравнений $a \star x = b$ и $z \star a = b$ будут, соответственно, $x = a^{-1} \star b$ и $z = b \star a^{-1}$, поскольку они обращают уравнения в тождества:

$$a\star(a^{-1}\star b) = (a\star a^{-1})\star b = u\star b = b \quad \text{и} \quad (b\star a^{-1})\star a = b\star(a^{-1}\star a) = b\star u = b.$$

Единственность элементов x и z для каждой пары $a, b \in \mathbf{G}$ следует из единственности a^{-1}.

3 Примеры групп

Пример 3.1 Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел образует абелеву группу относительно операции сложения чисел с нулем $o = 0$ и противоположным элементом $-a, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$.

Множество $\mathbb{Z}$ не образует группы относительно операции умножения с единицей $e = 1$, поскольку не существует целого обратного элемента, например, для числа 2.

Пример 3.2 Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел образует абелеву группу относительно операции сложения чисел с нулем $o = 0$ и противоположным элементом $-a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Множество $\mathbb{R}$ не образует группы относительно операции умножения с единицей $e = 1$, поскольку не существует обратного элемента для числа 0.

Пример 3.3 Множество $\{\mathbb{R} \setminus 0\}$ отличных от нуля вещественных чисел образует абелеву группу относительно операции умножения с единицей $e = 1$ и противоположным элементом $\dfrac{1}{a}$ для всякого $a \in \{\mathbb{R} \setminus 0\}$.

Множество $\{\mathbb{R} \setminus 0\}$ не образует группы относительно операции сложения, поскольку не содержит нейтрального относительно этой операции элемента.

Пример 3.4 Множество $\mathbb{R}^+$ положительных вещественных чисел образует абелеву группу относительно операции умножения чисел с единицей $e = 1$ и противоположным элементом $\dfrac{1}{a}$ для всякого $a \in \mathbb{R}^+$.

Пример 3.5 Множество, состоящее из двух чисел 1 и -1, образует абелеву группу второго порядка относительно операции умножения с единицей $e = 1$. Каждый элемент этой группы является обратным по отношению к самому себе.

Пример 3.6 Множество направленных отрезков (векторов) $\mathbf{V}$ на плоскости или в пространстве образует абелеву группу относительно операции сложения по правилу параллелограмма с нулем $\mathbf{o}$ (нулевой вектор). Противоположным элементом для каждого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ служит вектор $-\mathbf{a}$, равный по длине и противоположный по направлению.

Пример 3.7 Рассмотрим конечное множество $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}}$ $(n > 0)$ целых чисел $0, 1, 2, ...n - 1$. Определим для них бинарную операцию, которая называется «сложением по модулю n» и обозначается $(a + b)(\mathrm{mod}\ n)$, следующим образом:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}} \quad (a + b)(\mathrm{mod}\ n) = \begin{cases} a + b, & \text{если} \quad a + b < n; \\ a + b - n, & \text{если} \quad a + b \geq n. \end{cases}$$

Согласно этому определению если $a + b = n$, то $(a + b)(\mathrm{mod}\ n) = 0$. Свойствами нейтрального элемента обладает число 0. Определим противоположный элемент как

$$(-a)(\mathrm{mod}\ n) = \begin{cases} n - a, & \text{если} \quad a > 0; \\ 0, & \text{если} \quad a = 0. \end{cases}$$

Тогда, если $a = 0$, то

$$(a + (-a))(\mathrm{mod}\ n) = (0 + 0)(\mathrm{mod}\ n) = 0,$$

а для всех чисел $a \in \mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}},\ a \neq 0$ выполняются равенства

$$a + (-a)(\mathrm{mod}\ n) = n \quad \text{и} \quad (a + (-a)(\mathrm{mod}\ n))(\mathrm{mod}\ n) = 0.$$

Противоположный элемент $(-a)(\mathrm{mod}\ n)$ принадлежит множеству $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}}$, поскольку выполняется неравенство $0 \leq (-a)(\mathrm{mod}\ n) < n$.

Ассоциативность операции сложения по модулю n и равенство $(a + b)(\mathrm{mod}\ n) = (b + a)(\mathrm{mod}\ n)$ следуют непосредственно из определения сложения целых чисел. Тем самым, множество $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}}$ образует конечную абелеву группу порядка n, которая называется группой сравнения по модулю n.

4 Подгруппы

Пусть $\mathbf{G}$ — группа с операцией $\star$.

Определение 4.1 *Множество $\boldsymbol{G}_1 \subseteq \boldsymbol{G}$ называется подгруппой группы $\boldsymbol{G}$, если выполняются следующие три условия:*

1. $\boldsymbol{G}_1 \neq \varnothing$,
2. *если* $a \in \boldsymbol{G}_1$ *и* $b \in \boldsymbol{G}_1$, *то* $a \star b \in \boldsymbol{G}_1$,
3. *если* $a \in \boldsymbol{G}_1$, *то* $a^{-1} \in \boldsymbol{G}_1$.

Так, например, множество четных чисел с операцией сложения образует подгруппу группы $\mathbb{Z}$ целых чисел с той же операцией.

Утверждение 4.2 *Подгруппа группы $\boldsymbol{G}$ с операцией $\star$ образует группу относительно операции $\star$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{G}_1$ — подгруппа группы $\mathbf{G}$. Поскольку $\mathbf{G}_1 \subseteq \mathbf{G}$, то каждый элемент множества $\mathbf{G}_1$ является также и элементом множества $\mathbf{G}$, поэтому

для каждой пары элементов $a, b \in \mathbf{G}_1$ существует единственный элемент $a \star b$, причем, согласно условию 2 из определения подгруппы, $a \star b \in \mathbf{G}_1$;

для любых трех элементов $a, b, c \in \mathbf{G}_1$ справедливо равенство $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$, то есть выполнена групповая аксиома 1.5;

поскольку $\mathbf{G}$ — группа, то существует правый нейтральный элемент $u \in \mathbf{G}$ и для любого элемента $a \in \mathbf{G}_1$ существует a^{-1}, причем, согласно условию 3 из определения 4.1, $a^{-1} \in \mathbf{G}_1$, а значит $a \star a^{-1} = u \in \mathbf{G}_1$, согласно условию 2. Тем самым множество $\mathbf{G}_1$ содержит правый нейтральный элемент, а значит, для $\mathbf{G}_1$ выполнена аксиома 1.6.

Таким образом, согласно определению множество $\mathbf{G}_1$ является группой.

5 Гомоморфизм групп

Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — два непустых множества.

Определение 5.1 *Если каждому элементу $x \in \boldsymbol{X}$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in \boldsymbol{Y}$ по правилу $y = F(x)$, то говорят, что задано отображение F множества $\boldsymbol{X}$ в множество $\boldsymbol{Y}$.*

Множество всех элементов y, для каждого из которых существует такой элемент $x \in \boldsymbol{G}$, что $y = F(x)$, называется образом F и обозначается $\mathrm{im}\, F$.

Пример 5.2 Если $\mathbf{X} = \mathbb{R}$, $F(x) = \sin x$, то образом $\mathrm{im}\, F$ является отрезок $[-1; 1]$.

Определение 5.3 *Пусть $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{G_1}$ — два множества, на которых заданы алгебраические операции $*$ и $\circ$ соответственно. Отображение F множества $\boldsymbol{G}$ в $\boldsymbol{G_1}$ называется гомоморфизмом, если для любых двух элементов $a, b \in \boldsymbol{G}$ выполняется равенство $F(a * b) = F(a) \circ F(b)$. При этом* $\mathrm{im}\, F$ *называется гомоморфным образом множества $\boldsymbol{G}$.*

Пример 5.4 Гомоморфизм бесконечной группы с операцией сложения в группу порядка 2 с операцией умножения.

Рассмотрим группу $\mathbb{Z}$ целых чисел с операцией сложения. Поставим каждому четному числу в соответствие число 1, а каждому нечетному — число -1. Покажем, что такое отображение является гомоморфизмом группы целых чисел с операцией сложения в группу из примера 3.5, состоящую из двух элементов 1 и -1 с операцией умножения. Для этого проверим выполнение равенства

$$F(a + b) = F(a)F(b) \tag{3}$$

для всех пар целых чисел.

Пусть a и b — два четных числа. Тогда их сумма $a + b$ — тоже четная, $F(a) = 1$, $F(b) = 1$, $F(a + b) = 1$, и равенство (3) выполняется.

Пусть a и b — два нечетных числа. Тогда $a+b$ — четное число, $F(a) = -1$, $F(b) = -1$, $F(a+b) = 1$, и равенство 3 оказывается выполненным.

В случае, если число a — четное, b — нечетное, сумма $a+b$ будет нечетным числом, тогда $F(a) = 1$, $F(b) = -1$, $F(a+b) = -1$, и равенство (3) также будет справедливо.

Пример 5.5 Гомоморфизм неабелевой группы группы в абелеву группу.

Рассмотрим группу $\mathbf{GL}(n)$ квадратных матриц n-го порядка с отличным от нуля определителем (см. пример 1.11). Эта группа не является абелевой. Поставим каждой матрице $A \in \mathbf{GL}(n)$ в соответствие определитель $\det A$ этой матрицы. В силу выполнения для любых A_1, $A_2 \in \mathbf{GL}(n)$ равенства $\det(A_1 A_2) = \det A_1 \det A_2$, это соответствие является гомоморфизмом группы $\mathbf{GL}(n)$ в абелеву группу отличных от нуля чисел, для которых определена операция умножения.

Пример 5.6 Гомоморфизм бесконечной группы с операцией умножения в бесконечную группу с операцией сложения.

Рассмотрим группу $\mathbb{R}^+$, состоящую из положительных вещественных чисел с операцией умножения (см. пример 3.4). Поставим каждому числу $a \in \mathbb{R}^+$ в соответствие число $\ln a$. Тем самым мы получим отображение множества положительных чисел на множество всех вещественных чисел, причем в силу свойств логарифма будет выполнено равенство $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. Это равенство означает, что отображение $F(a) = \ln a$ является гомоморфизмом группы $\mathbb{R}^+$ с операцией умножения в группу $\mathbb{R}$ вещественных чисел с операцией сложения (см. пример 3.2).

Пример 5.7 Гомоморфизм бесконечной группы с операцией сложения в группу порядка n с операцией сложения по модулю n.

Рассмотрим группу целых неотрицательных чисел $\mathbb{Z}^+$ с операцией сложения и нулем $o = 0$. Выберем какое-нибудь натуральное число n. Любое число $a \in \mathbb{Z}^+$ может быть представлено в виде

$$a = pn + r, \tag{4}$$

где p — целое неотрицательное число, а r — целое неотрицательное число, меньшее n, представляющее собой остаток от деления числа a на n. Пара чисел p и r определяется единственным образом.

Поставим каждому числу a из группы $\mathbb{Z}^+$ в соответствие число r — остаток от деления a на n. Будем обозначать это отображение $(\bmod n)$, то есть если $a = pn + r$, то $a(\bmod n) = r$.

Покажем, что это отображение является гомоморфизмом группы $\mathbb{Z}^+$ в группу $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}}$ из примера 3.7. Для этого нужно проверить справедливость равенства из определения 5.3, которое в рассматриваемом случае выглядит как

$$(a+b)(\operatorname{mod} n) = (a(\operatorname{mod} n) + b(\operatorname{mod} n))(\operatorname{mod} n). \tag{5}$$

Представим числа a, b и $a+b$ в виде (4):

$$a = p_a n + r_a, \quad b = p_b n + r_b, \quad a+b = p_1 n + r_1, \tag{6}$$

то есть

$$a(\operatorname{mod} n) = r_a, \quad b(\operatorname{mod} n) = r_b, \quad (a+b)(\operatorname{mod} n) = r_1.$$

.

Сумму чисел r_a и r_b также можно представить в виде (4):

$$r_a + r_b = \bar{p}_1 n + \bar{r}_1,$$

или

$$(r_a + r_b)(modn) = (a(\operatorname{mod} n) + b(\operatorname{mod} n))(\operatorname{mod} n) = \bar{r}_1.$$

Для того, чтобы убедиться в выполнении равенства (5), нужно показать, что $r_1 = \bar{r}_1$. Последнее следует из цепочки равенств

$$a + b = (p_a + p_b)n + r_a + r_b = (p_a + p_b + \bar{p}_1)n + \bar{r}_1$$

и единственности представления (6) для числа $(a+b)$. Итак, числа r_1 и $\bar{r}_1$ совпадают, из чего следует выполнение равенства (5), означающего что отображение $(\operatorname{mod} n)$ является гомоморфизмом группы $\mathbb{Z}^+$ в группу $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}}$.

Утверждение 5.8 *Гомоморфный образ группы (абелевой группы) есть группа (абелева группа)*

Доказательство. Пусть $\mathbf{G}$ — группа с операцией $*$, $\mathbf{G}_1$ — множество, на котором определена бинарная операция $\circ$, F — гомоморфизм множества $\mathbf{G}$ в множество $\mathbf{G}_1$. Для того, чтобы показать, что $\operatorname{im} F$ также является группой, нужно проверить выполнение аксиом 1.5 и 1.6 для этого множества.

Проверим выполнение аксиомы 1.5. Согласно определению группы, для любых элементов $a, b, c \in \mathbf{G}$ имеет место ассоциативность: $(a*b)*c = a*(b*c)$, значит для образов элементов $(a*b)*c$ и $a*(b*c)$ справедливо равенство $F((a*b)*c) = F(a*(b*c))$. Согласно определению гомоморфизма, можно записать следующие цепочки равенств:

$$F((a*b)*c) = (F(a*b)) \circ F(c) = (F(a) \circ F(b)) \circ F(c)$$
$$F(a*(b*c)) = F(a) \circ (F(b*c)) = F(a) \circ (F(b) \circ F(c)).$$

Из равенства левых частей последних выражений следует равенство правых частей, таким образом, для элементов множества $\operatorname{im} F$ выполняется закон ассоциативности: $(F(a) \circ F(b)) \circ F(c) = F(a) \circ (F(b) \circ F(c))$.

Проверим теперь выполнение аксиомы 1.6. Поскольку множество $\mathbf{G}$ является группой, то существует нейтральный элемент $u \in \mathbf{G}$ и для любого $a \in \mathbf{G}$ справедливо равенство $a = a * u$; также существует такой элемент $a^{-1} \in \mathbf{G}$, что $u = a * a^{-1}$. Для образов этих элементов выполняются следующие соотношения:

$$F(a) = F(a * u) = F(a) \circ F(u) \quad \text{и} \quad F(u) = F(a * a^{-1}) = F(a) \circ F(a^{-1}).$$

Из последних равенств следует, что элемент $F(u) \in \operatorname{im} F$ удовлетворяет условиям аксиомы 1.6.

Выполнение двух групповых аксиом означает, что $\operatorname{im} F$ представляет собой группу, в которой элемент $F(u)$ является нейтральным. Кроме того, для каждого элемента $F(a)$ этой группы обратным элементом является $F(a^{-1})$, то есть выполняется равенство $(F(a))^{-1} = F(a^{-1})$.

Наконец, если группа $\mathbf{G}$ — абелева, то для любых двух элементов $a, b \in \mathbf{G}$ справедливо равенство $a * b = b * a$, тогда $F(a * b) = F(b * a)$. Отсюда и из определения гомоморфизма получаем, что $F(a) \circ F(b) = F(b) \circ F(a)$.

Утверждение 5.8 полностью доказано.

Замечание 5.9 Как следует из примера 5.5, гомоморфный образ неабелевой группы не обязательно является неабелевой группой.

В ходе последнего доказательства было установлено, что при гомоморфизме F группы $\mathbf{G}$ нейтральный элемент $u \in \mathbf{G}$ связан с нейтральным элементом $u_f \in \operatorname{im} F$ следующим образом: $F(u) = u_f$. Этот факт не исключает существования других элементов $a \in \mathbf{G}$, для которых $F(a) = u_f$.

Определение 5.10 *Ядром гомоморфизма F множества $\mathbf{G}$ называется совокупность всех элементов $a \in \mathbf{G}$, для которых $F(a) = u_f$. Обозначается* $\ker F$.

В примере 5.4 ядром гомоморфизма является множество всех четных чисел. В примере 5.5 ядром гомоморфизма является множество всех квадратных матриц с вещественными элементами, определители которых равны 1.

Ядром гомоморфизма из примера 5.6 является единственный элемент $e = 1$. Ядром гомоморфизма из примера 5.7 является множество всех целых чисел, кратных n, включая число 0.

Ещё раз отметим, что $\ker F$ является подмножеством группы $\mathbf{G}$. Оказывается, справедливо и более сильное утверждение.

Утверждение 5.11 *Множество* $\ker F$ *является подгруппой группы* $\boldsymbol{G}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{G}$ — группа с операцией $*$, F — гомоморфизм $\mathbf{G}$ в группу $\mathbf{G}_1$ с операцией $\circ$. Согласно определению подгруппы 4.1, нужно установить выполнение для $\ker F$ трёх требований:

1. $\ker F \neq \varnothing$,
2. если $a \in \ker F$ и $b \in \ker F$, то $a * b \in \ker F$,
3. если $a \in \ker F$, то $a^{-1} \in \ker F$.

Первое утверждение выполнено, поскольку множество $\ker F$ содержит по крайней мере один элемент $u : F(u) = u_f$.

Пусть теперь $a, b \in \ker F$, то есть $F(a) = u_f$ и $F(b) = u_f$. Используя это предположение и определение гомоморфизма, получаем цепочку равенств

$$F(a * b) = F(a) \circ F(b) = u_f \circ u_f = u_f.$$

Это означает, что $(a * b) \in \ker F$.

Наконец, в ходе доказательства утверждения 5.8 было установлено равенство $F(a^{-1}) = (F(a))^{-1}$, поэтому, если $a \in \ker F$, то $F(a^{-1}) = (F(a))^{-1} = (u_f)^{-1} = u_f$, то есть $a^{-1} \in \ker F$.

Утверждение 5.11 доказано.

Если каждому элементу x из множества $\mathbf{X}$ при помощи отображения F поставлен в соответствие единственный элемент y из множества $\mathbf{Y}$, а каждому $y \in \mathbf{Y}$ при помощи отображения F^{-1} поставлен в соответствие единственный элемент $x \in \mathbf{X}$, то говорят, что существует взаимно однозначное отображение $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$.

Определение 5.12 *Взаимно однозначный гомоморфизм называется изоморфизмом.*

Пример 5.13 Группа, состоящая из вещественных чисел с операцией сложения, изоморфна группе, элементами которой являются все положительные вещественные числа с операцией умножения. В качестве изоморфизма может выступать, например, отображение $y = \exp(x)$, где x — любое вещественное число. Из курса математического анализа известно, что это отображение взаимно однозначно, кроме того, $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$.

Утверждение 5.14 *Гомоморфизм* F *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда* $\ker F = u$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_1$ — две группы с операциями $*$ и $\circ$ соответственно.

Если гомоморфизм F группы $\mathbf{G}$ в $\mathbf{G}_1$ является изоморфизмом, то нейтральный элемент $u_1 \in \mathbf{G}_1$ имеет единственный прообраз u, то есть $\ker F = u$.

Пусть теперь $\ker F = u$, и найдется два различных элемента $a, b \in \mathbf{G}$, для которых $F(a) = F(b)$. Тогда $F(b^{-1}) = (F(b))^{-1} = (F(a))^{-1}$. Запишем теперь следующую цепочку равенств

$$F(a * b^{-1}) = F(a) \circ F(b^{-1}) = F(a) \circ (F(a))^{-1} = u_f,$$

то есть $a * b^{-1} \in \ker F$, но по предположению, $\ker F = u$, следовательно, $a * b^{-1} = u$, откуда в силу единственности обратного элемента следует, что $a = (b^{-1})^{-1} = b$. Последнее равенство противоречит исходному предположению о том, что a и b — различные. Утверждение 5.14 полностью доказано.

Пример 5.15 Группа, состоящая из направленных отрезков на плоскости (в трехмерном пространстве), для которых определена операция сложения по правилу параллелограмма, изоморфна группе столбцов координат этих векторов, для которых определена операция сложения по координатам. Отображение является изоморфизмом, поскольку по определению нулевые координаты имеет только нулевой вектор.

Среди разобранных в этом пункте примеров изоморфизмами являются отображения из примеров 5.6 и 5.13. Гомоморфизмы, определенные в примерах 5.4, 5.5 и 5.7, не являются взаимно однозначными соответствиями. Так, в примере 5.5 вещественному числу $\det A$ сопоставляется не только матрица A, но и любая другая матрица с таким же определителем.

6 Группы преобразований

Пусть M — некоторое множество. **Преобразованием** множества M называется его однозначное отображение на само себя. Например, поворот множества $\mathbf{V_2}$ векторов на плоскости на угол $\alpha \in \mathbb{R}$ вокруг начала координат — это преобразование множества $\mathbf{V_2}$.

Если множество преобразований образует группу, то она называется **группой преобразований**. Произведение элементов этой группы определяется как два последовательных преобразования. (Напомним, что произведение элементов a и b обозначается ab.) Следуя [2], докажем ассоциативность этого произведения. Рассмотрим множество $\mathbf{G}$ преобразований множества $\mathbf{M}$.

Лемма 6.1 *Для любых трех элементов* $r, s, t \in \boldsymbol{G}$ *выполняется равенство* $r(st) = (rs)t$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные преобразования $r, s, t \in \mathbf{G}$. Возьмем какой-нибудь элемент $x \in \mathbf{M}$. Преобразование t элемента x будем обозначать как $t(x)$. Запишем две цепочки равенств:

$$r(st)(x) = r(s(t(x))) = r(st(x)) \quad \text{и} \quad (rs)t(x) = rs(t(x)) = r(st(x)).$$

Правые части равенств совпадают, значит, совпадают и левые. Лемма доказана.

Пример 6.2 Рассмотрим множество $S(D)$ непрерывных монотонно возрастающих функций, определенных на подмножестве D вещественной оси, для которых область значений совпадает с областью определения. В силу монотонности и непрерывности [3] можно утверждать, что для каждой такой функции существует обратная, которая определена на множестве D, являющемся также и множеством её значений. Определим групповую операцию как суперпозицию функций: $f(x) \circ g(x) = f(g(x))$, а функцию $e(x) = x$ как правую групповую единицу. Тогда для каждого элемента $f(x)$ выполнено равенство $f(e(x)) = f(x)$ и существует обратная функция $f^{-1}(x)$, для которой $f(f^{-1}(x)) = x = e(x)$. Ассоциативность следует из леммы 6.1. Итак, множество $S(D)$ образует группу преобразований множества D.

Пример 6.3 Перестановки.

Перестановкой называется взаимно однозначное отображение конечного множества на само себя.

Приведем в качестве примера множество перестановок чисел $1, 2, 3, 4, 5$. Строчка из тех же самых пяти чисел, записанных в каком-нибудь другом порядке, например, $5, 1, 4, 3, 2$, представляет собой результат перестановки этих чисел. Сопоставим этой перестановке следующую таблицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нижняя строчка содержит информацию о том, в каком порядке следует записать элементы верхней строчки. Можно интерпретировать эту запись как фразу: «Сперва запишем элемент, стоящий на 5-м месте, затем — элемент, стоящий на 1 месте, затем — тот, что стоит на 4-м и т.д.»

Определим произведение перестановок как результат последовательного действия двух перестановок.

Пусть, например

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Тогда

$$p_1 p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Тождественной является перестановка, не изменяющая порядок следования чисел. Ей соответствует таблица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обратным элементом к каждой перестановке p является перестановка, в результате которой числа выстраиваются в порядке $1, 2, 3, 4, 5$. Так, например, перестановке p^{-1}, обратной к перестановке p с таблицей

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

соответствует таблица

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$p^{-1} p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

В силу свойства 2.1 результатом произведения pp^{-1} также будет тождественная перестановка. В этом нетрудно убедиться при помощи следующей записи:

$$pp^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Существование обратной перестановки для каждого элемента следует из взаимной однозначности преобразований перестановок и множества строчек, состоящих из чисел $1, 2, 3, 4, 5$, записанных в различном порядке. Тем самым для множества перестановок выполняется аксиома 1.6. Справедливость аксиомы 1.5 для этого множества следует из леммы 6.1. Выполнение двух групповых аксиом означает, что множество перестановок чисел $1, 2, 3, 4, 5$ образует группу. Эта группа не является абелевой. Запишем, например, произведение p_2p_1 перестановок с таблицами (7):

$$p_2p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнив этот результат с (8), можно убедиться, что $p_1p_2 \neq p_2p_1$.

Замечание 6.4 При помощи группы перестановок можно описать множество положений маленьких кубиков, составляющих кубик Рубика. Подробнее об этом можно прочитать в книге [4].

6.1 Движения

В элементарной геометрии рассматриваются преобразования плоскости (пространства), которые называются движениями (их называют также перемещениями или наложениями). Движение — это такое преобразование плоскости (пространства), при котором сохраняются расстояния между точками, т. е. для любых точек A и B плоскости (пространства) выполняется равенство $|A'B'| = |AB|$, где A' и B' — точки, в которые отображаются точки A и B при данном преобразовании, $|AB|$ — расстояние между точками A и B.

Примерами движений являются параллельный перенос плоскости (пространства) на данный вектор, центральная симметрия плоскости (пространства) относительно данной точки, осевая симметрия плоскости (пространства) относительно данной прямой, зеркальная симметрия пространства относительно данной плоскости, поворот плоскости на заданный угол вокруг данной точки.

Множество всех движений плоскости (пространства) образует группу. Групповой операцией является композиция двух движений,то есть последовательное выполнение двух движений в заданном порядке. В результате каждого из этих последовательных преобразований расстояние между точками пространства сохраняется, из чего следует, что композиция двух движений является движением. Согласно лемме 6.1, композиция движений обладает свойством ассоциативности. Единицей группы движений является тождественное преобразование, при котором образ каждой точки плоскости (пространства) есть сама эта точка. И наконец, обратное преобразование к данному движению также сохраняет расстояние между точками, то есть является движением.

Важную роль играют различные подгруппы группы движений, например, параллельные переносы и повороты плоскости вокруг данной точки.

Параллельный перенос

Зададим некоторый вектор (направленный отрезок) $\mathbf{b}$.

Определение 6.5 *Параллельным переносом на вектор $\boldsymbol{b}$ называется преобразование, ставящее в соответствие каждой точке A пространства такую точку A', что $\overrightarrow{AA'} = \boldsymbol{b}$.*

Нетрудно показать, что параллельный перенос является движением. На рисунке 1 точки A' и B' являются образами, соответственно, точек A и B при параллельном переносе на вектор $\mathbf{b}$. Из равенства векторов $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \mathbf{b}$ следует, что четырехугольник $AA'B'B$ является параллелограммом, а значит, $|A'B'| = |AB|$, то есть согласно определению, параллельный перенос является движением. Параллельный перенос на вектор $\mathbf{o}$ является тождественным преобразованием.

Множество параллельных переносов является подгруппой группы движений. Это нетрудно доказать, используя определение подгруппы 4.1. Множество не пусто, поскольку не пусто множество направленных отрезков, задающих параллельные переносы. Покажем, что композиция параллельных переносов, как и обратное преобразование, принадлежат этому подмножеству. Согласно правилу сложения векторов совокупность параллельных переносов сначала на вектор $\mathbf{a}$, а потом на вектор $\mathbf{b}$ представляет собой параллельный перенос на вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, (см. рис. 2), а значит является параллельным переносом, а из равенства $\mathbf{b}+(-\mathbf{b}) = \mathbf{o}$ следует, что обратное преобразование — это параллельный перенос на вектор $-\mathbf{b}$. Итак, совокупность параллельных

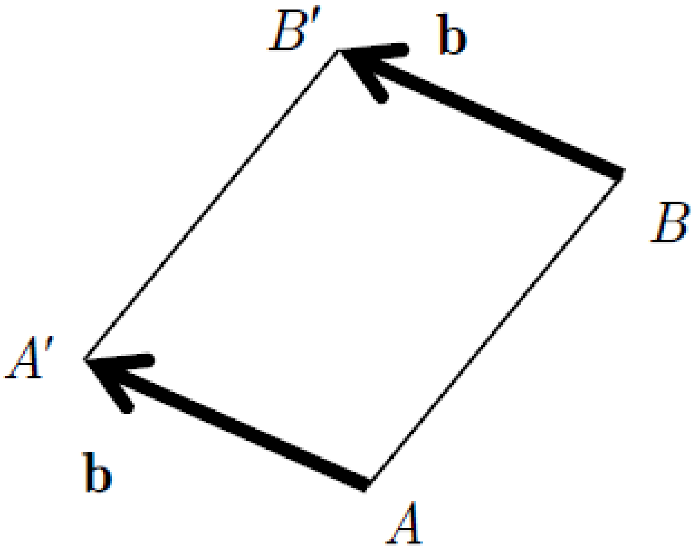

Рис. 1: Параллельный перенос как движение.

переносов образует подгруппу группы движений. Более того, из равенства $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$, справедливого для суммы любых двух векторов, следует, что результат параллельного переноса сначала на вектор $\mathbf{a}$, а потом на вектор $\mathbf{b}$ совпадает с результатом параллельного переноса сначала на вектор $\mathbf{b}$, а потом на вектор $\mathbf{a}$, то есть эта подгруппа является абелевой.

Заметим, что сама группа движений не является абелевой. Так, например, на рисунках 3 и 4 показано различие в результатах композиций двух последовательных движений — центральной симметрии относительно точки O и параллельного переноса вектор $\mathbf{b}$, выполненных в различном порядке.

Поворот

Пусть точка O лежит в некоторой плоскости π. Зададим число $\alpha \in \mathbb{R}$.

Определение 6.6 *Поворотом плоскости π вокруг точки O на угол α называется преобразование, при котором точка O отображается сама в себя, а каждая точка A плоскости, отличная от O, отображается в такую точку A', что угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$, отсчитываемый против часовой стрелки, равен α и $|OA| = |OA'|$.*

На рисунке 6 показано как в результате поворота преобразуются две различные точки A и B. Легко убедиться, что расстояние между образами A' и

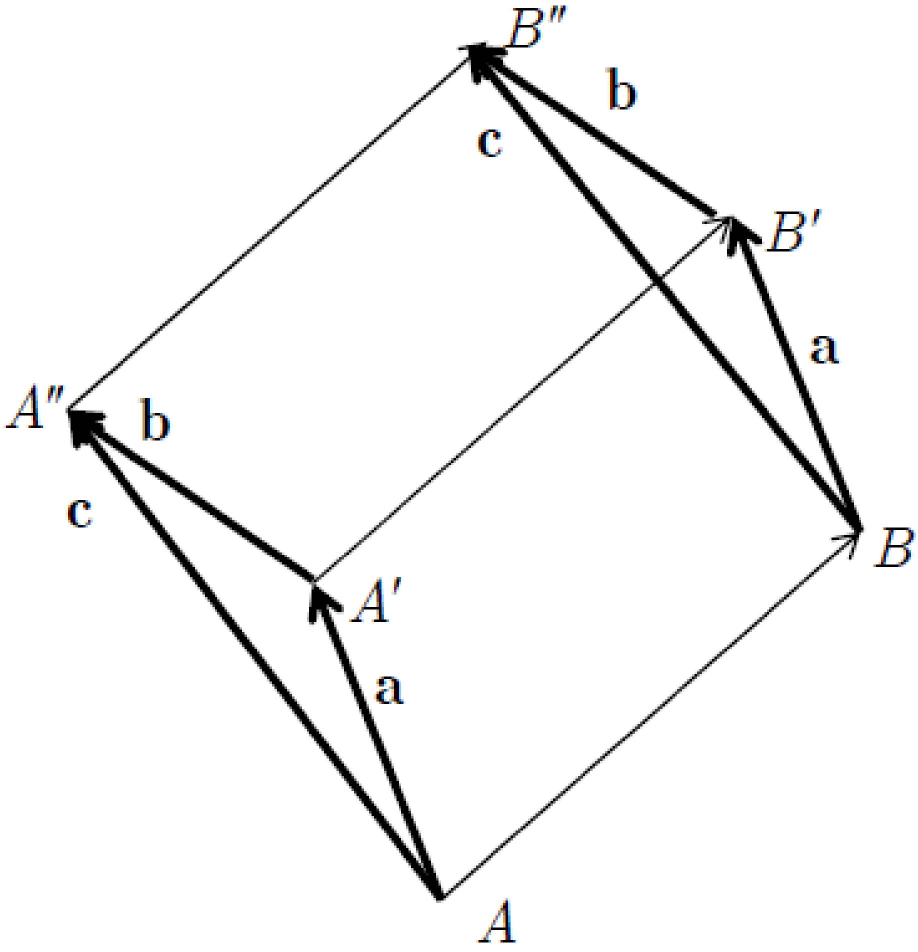

Рис. 2: Композиция параллельных переносов.

B' при этом сохраняется. Действительно, углы AOA' и BOB' являются углами поворота и равны между собой, откуда следует равенство углов AOB и $A'OB'$. Длины отрезков OA и OA' равны, как и длины OB и OB', по определению поворота. Таким образом, $\triangle AOB$ равен $\triangle A'OB'$ по двум сторонам и углу между ними, из чего следует равенство длин отрезков $|AB| = |A'B'|$. Последнее равенство означает, что поворот плоскости является движением.

Определим произведение поворотов как два последовательных поворота вокруг одной и той же точки O сначала на угол α, а затем на угол β, как показано на рисунке 7. В результате такого преобразования точка O отобразится сама в себя, а каждая точка A плоскости, отличная от O, отобразится в такую точку A'', что угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA''}$, отсчитываемый против часовой стрелки, будет равен $\alpha+\beta$ и $|OA| = |OA''|$, то есть, согласно определению, произведение поворотов также является поворотом. Обратным преобразованием является поворот на угол $-\alpha$, поскольку из равенства $\alpha + (-\alpha) = 0$

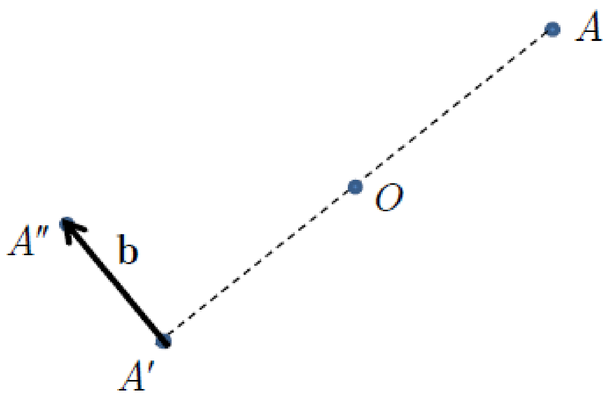

Рис. 3: Центральная симметрия и параллельный перенос.

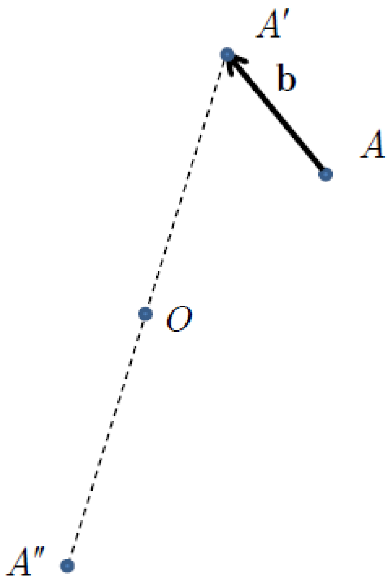

Рис. 4: Параллельный перенос и центральная симметрия.

следует, что композиция поворотов на углы α и $-\alpha$ есть поворот на нулевой угол, то есть тождественное преобразование. Наконец, множество поворотов не пусто, поскольку не пусты множества плоскостей в пространстве, точек на плоскости и чисел $\alpha \in \mathbb{R}$, использующиеся в определении 6.6. Таким образом, выполнено определение подгруппы 4.1, а значит совокупность поворотов с указанной операцией произведения образует подгруппу группы движений. Эта группа является абелевой, поскольку для суммы любых двух углов $\angle\alpha$ и $\angle\beta$ справедливо равенство $\angle\alpha + \angle\beta = \angle\beta + \angle\alpha$.

6.2 Представления групп

Определение 6.7 *Представлением группы преобразований называется гомоморфизм этой группы в множество невырожденных квадратных матриц с операцией умножения матриц. Матрица, являющаяся образом этого гомоморфизма, называется матрицей преобразования.*

Представление группы параллельных переносов

При параллельном переносе плоскости на вектор $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$ точка с координатами (x, y) преобразуется в точку с координатами $(x', y') = (x+b_1, y+b_2)$. Поставим каждому такому преобразованию в соответствие такую невырожденную квадратную матрицу размера 3×3, чтобы в результате умножения

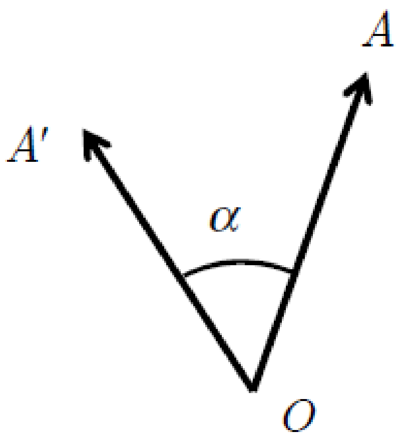

Рис. 5: Поворот.

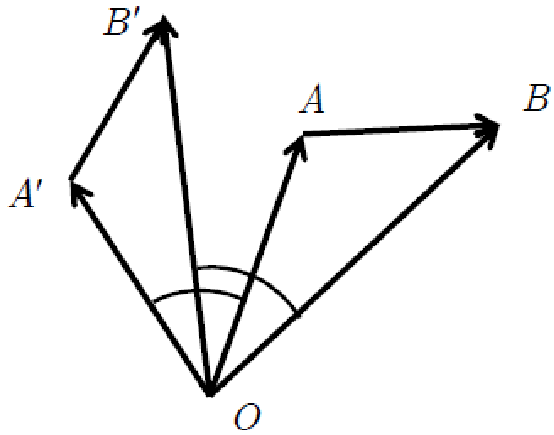

Рис. 6: Поворот как движение.

на неё столбца чисел вида $(1, x, y)^T$ получался столбец $(1, x + b_1, y + b_2)^T$, а именно, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x + b_1 \\ y + b_2 \end{pmatrix}.$$

Запишем последнее равенство как систему уравнений для коэффициентов $a_i^k, \ i, k = 1, 2, 3:$

$$1 = a_1^1 + a_2^1 x + a_3^1 y;$$

$$x + b_1 = a_1^2 + a_2^2 x + a_3^2 y;$$

$$y + b_2 = a_1^3 + a_2^3 x + a_3^3 y.$$

Параллельный перенос плоскости на вектор **b** зависит только от координат этого вектора, но не от координат (x, y) точек плоскости, откуда следует, что каждое из этих уравнений должно выполняться при любых значениях x и y. Поэтому для того, чтобы определить числа a_i^k, следует приравнять отдельно коэффициенты при x и y и слагаемые, от них не зависящие, в каждом

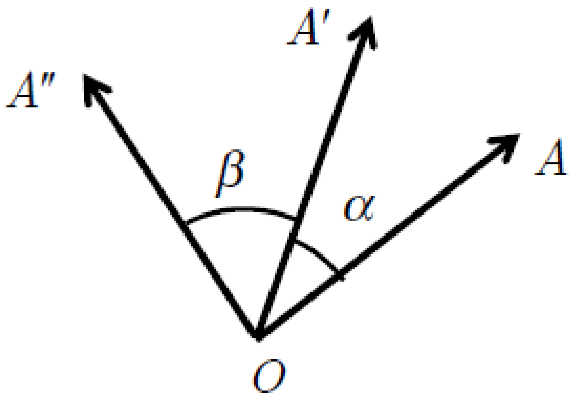

Рис. 7: Композиция поворотов.

из уравнений. Тогда получим равенства

$$1 = a_1^1, \quad 0 = a_2^1, \quad 0 = a_3^1,$$

$$b_1 = a_1^2, \quad 1 = a_2^2, \quad 0 = a_3^2,$$

$$b_2 = a_1^3, \quad 0 = a_2^3, \quad 1 = a_3^3.$$

Определение 6.8 *Матрицей параллельного переноса плоскости на вектор* $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$ *называется матрица*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Обозначим через a параллельный перенос на вектор $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$, а через b — параллельный перенос на вектор $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$. Произведению ab этих двух параллельных переносов соответствует произведение их матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 + b_1 & 1 & 0 \\ a_2 + b_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В правой части равенства стоит матрица произведения двух параллельных переносов; таким образом, выполняется равенство $F(a)F(b) = F(ab)$, где F — отображение множества параллельных переносов на всевозможные векторы на плоскости в множество матриц вида (9) с определенной для них операцией умножения матриц. Согласно определению 5.3, выполнение этого равенства означает, что отображение F является гомоморфизмом.

Поскольку множество параллельных переносов образует абелеву группу, то, согласно утверждению 5.8, множество матриц вида (9) также образует абелеву группу относительно операции умножения матриц. Нейтральным элементом этой группы является единичная матрица, которая соответствует параллельному переносу на нулевой вектор, то есть тождественному преобразованию, и только ему. Тем самым выполнено условие утверждения 5.14: $\ker F = e$, где e — тождественное преобразование, а значит, группа параллельных переносов изоморфна группе матриц вида (9) с операцией умножения матриц.

Определение 6.9 *Матрицей параллельного переноса трехмерного пространства на вектор* $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ *называется матрица*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Матрицы вида (10) осуществляют преобразования столбцов из четырех координат вида $(1, x, y, z)^T$ и образуют абелеву группу относительно операции умножения матриц, изоморфную группе параллельных переносов в пространстве. Эти утверждения нетрудно доказать по аналогии с доказанным выше для параллельного переноса на плоскости.

Представление группы поворотов плоскости

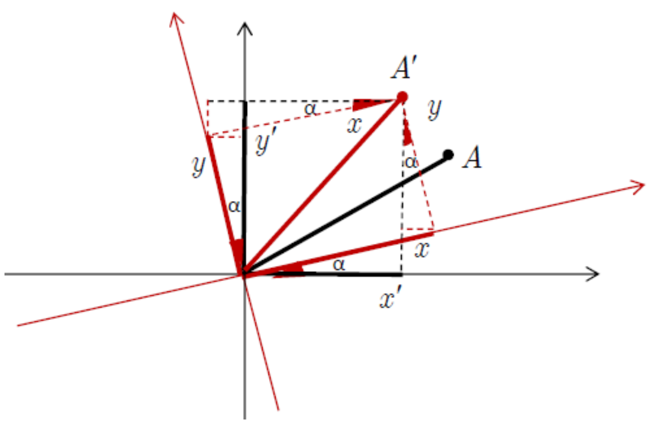

Рис. 8: Преобразование координат точки при повороте.

Пусть в результате поворота плоскости вокруг точки O (см. рис.8) на угол α точка $A(x, y)$ преобразуется в точку $A'(x', y')$. Выразим координаты точки A' через координаты точки A и функции угла поворота. Для этого запишем известные из школьной тригонометрии равенства, связывающие углы и стороны прямоугольного треугольника, для треугольника $OA'x'$ на рисунке 8.

$$\begin{aligned} x' &= |OA'|\cos(\alpha+\beta) = |OA'|(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \\ &= |OA|\cos\beta\cos\alpha - |OA|\sin\beta\sin\alpha; \\ y' &= |OA'|\sin(\alpha+\beta) = |OA'|(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \\ &= |OA|\cos\beta\sin\alpha + |OA|\sin\beta\cos\alpha. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь мы использовали равенство $|OA| = |OA'|$ из определения 6.6. В свою очередь, стороны и углы прямоугольного треугольника OAx связаны соотношениями

$$|OA|\cos\beta = x \quad \text{и} \quad |OA|\sin\beta = y.$$

Учитывая эти равенства, из (11) получаем выражения

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}$$

Точно такую же связь чисел x и y с числами x' и y' можно получить, умножая матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{12}$$

на столбец $(1, x, y)^T$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Определение 6.10 *Матрицей поворота плоскости на угол α называется матрица (12.)*

Покажем, что отображение F группы поворотов плоскости на всевозможные углы $\alpha \in \mathbb{R}$ в множество матриц вида (12) является гомоморфизмом.

Используя определение 5.3 и сопоставляя равенство $F(a*b) = F(a) \circ F(b)$ из этого определения с равенством

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ 0 & \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix},$$

заключаем, что соответствие поворота и его матрицы является гомоморфизмом.

Как было показано ранее, множество поворотов является абелевой группой, а значит, согласно утверждению 5.8, множество матриц вида (12) также образует абелеву группу относительно операции умножения матриц.

Сответствие поворотов плоскости на угол α и их матриц не является изоморфизмом, поскольку существует бесконечное множество углов α с величинами $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, повороты на которые равны тождественному преобразованию.

Пример 6.11 Приведем матрицу преобразования, осуществляющего сначала поворот на угол α относительно начала координат, а затем параллельный перенос на вектор $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ b_2 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Задача для самостоятельного решения.

Покажите, что множество преобразований вида (13) при всех возможных $\mathbf{b} \in \mathbf{V}_2$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ образует неабелеву группу.

7 Преобразования координат и времени

Движение материальных точек определяется как изменение их положения относительно других тел [5]. Для удобства описания такого относительного движения вводится воображаемое абсолютно твердое тело, относительно которого определяется положение изучаемых материальных точек. Это тело называется системой отсчета. Различные системы отсчета могут находиться в движении друг относительно друга. Указать положение точки относительно той или иной системы отсчета можно, введя систему координат, связанную с этой системой отсчета. Движение материальной точки характеризуется не только её положением в пространстве, но и зависимостью этого положения от времени. Тот факт, что положение материальной точки в данный момент времени задается определенными координатами, называется событием. Событие характеризуется тремя пространственными координатами и моментом времени, то есть всего четырьмя параметрами. Каждому событию можно сопоставить точку с координатами (t, x, y, z) в четырехмерном пространстве. Такая точка называется мировой. Возникает вопрос, как связаны координаты одной и той же мировой точки в двух различных системах отсчета, если эти системы находятся в относительном движении?

Мы остановимся на преобразованиях координат и времени в случае поступательного равномерного прямолинейного движения систем отсчета друг относительно друга, а именно, инерциальных систем отсчета.

Инерциальными называются такие системы отсчета, в которых справедлив первый закон Ньютона: тело, не подверженное внешним воздействиям, либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно.

7.1 Преобразования Галилея

Пусть K и K' — две инерциальные системы отсчета, причем система K' движется относительно K с постоянной скоростью $\mathbf{V}$. Преобразованиями Галилея называются такие преобразования координат и времени, при которых ход времени считается одинаковым во всех системах отсчета,

$$t' = t,$$

а преобразование координат одной и той же материальной точки при переходе от одной системы отсчета к другой задается равенством

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t.$$

Здесь t и $\mathbf{r}$ — время и радиус-вектор материальной точки в системе K, а t' и $\mathbf{r}'$ — соответственно время и радиус-вектор материальной точки в системе K'.

Рассмотрим теперь две инерциальные системы отсчета K и K', расположенные как показано на рисунке 9. В каждой из систем отсчета введем правую ортогональную декартову систему координат. Координаты мировой точки в системе K будем обозначать через (t, x, y, z), а в системе K' — через (t', x', y', z'). Преобразование столбца четырех координат движущейся материальной точки физически означает переход между различными системами отсчета.

Для того, чтобы подчеркнуть алгебраический смысл каждой из четырех координат при преобразовании, будем использовать следующие обозначения:

$$t = x^0;\ x = x^1;\ y = x^2;\ z = x^3.$$

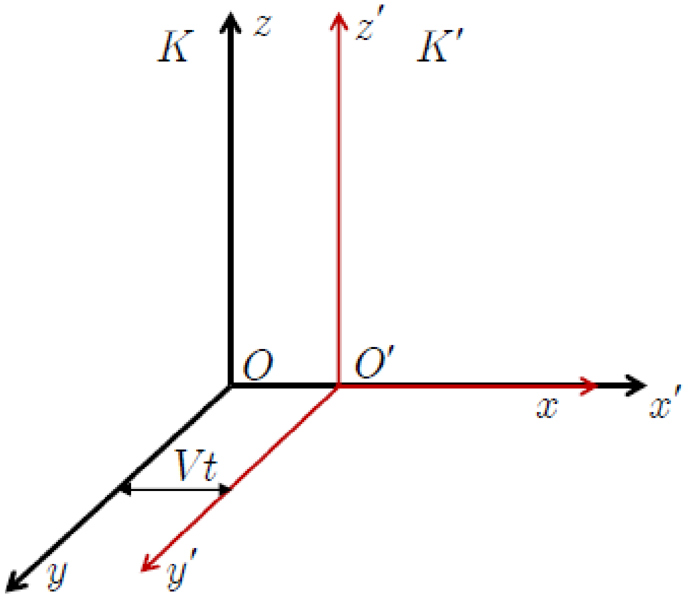

Рис. 9: Инерциальные системы отсчета.

Если системы отсчета расположены так, как показано на рисунке 9, то преобразования Галилея записываются с помощью равенств

$$x^{0'} = x^0 \quad x^{1'} = x^1 - Vx^0, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3. \tag{14}$$

Здесь x^0, x^1, x^2, x^3 — координаты материальной точки в системе отсчета K, $x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$ — её координаты в системе отсчета K'.

Используя равенства (14), составим матрицу преобразования.

$$G(V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -V & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Исходя из вида матрицы $G(V)$, преобразование Галилея можно интерпретировать как параллельный перенос на вектор $\mathbf{V} = \{-V, 0, 0\}$ в трехмерном пространстве (сравните с матрицей (10)). Множество матриц вида (15), с различными значениями V образует группу относительно операции умножения матриц; единицей группы является $G(0)$ — единичная матрица размера 4×4. Непосредственным перемножением нетрудно проверить, что обратным элементом для $G(V)$ является матрица $G(-V)$ и что произведение двух элементов группы также является элементом этой группы и выполняется равенство

$$G(V_1)G(V_2) = G(V_1 + V_2). \tag{16}$$

Равенство (16) отражает закон сложения скоростей для инерциальных систем отсчета в классической механике: если система отсчета K_1 движется относительно неподвижной системы отсчета K_0 со скоростью V_1, а система K_2 движется относительно K_1 со скоростью V_2, то K_2 движется относительно K_0 со скоростью $V_1 + V_2$.

Инварианты преобразований Галилея

Инвариантом преобразования (или инвариантной величиной) называется величина, сохраняющаяся при преобразовании.

Свойство 7.1 *Расстояние между точками трехмерного пространства является инвариантом преобразований Галилея.*

Для доказательства этого свойства рассмотрим в системе отсчета K две точки $A_1(x^0,\, x_1^1,\, x_1^2,\, x_1^3)$ и $A_2(x^0,\, x_2^1,\, x_2^2,\, x_2^3)$ с одинаковыми координатами x^0, то есть две точки пространства в один и тот же момент времени. В результате преобразования (перехода в систему K') эти точки отображаются соответственно, в $A_1'(x^{0'},\, x_1^{1'},\, x_1^{2'},\, x_1^{3'})$ и $A_2'(x^{0'},\, x_2^{1'},\, x_2^{2'},\, x_2^{3'})$. При этом выполняются равенства

$$(x_1^{1'} - x_2^{1'})^2 + (x_1^{2'} - x_2^{2'})^2 + (x_1^{3'} - x_2^{3'})^2 =$$

$$= (x_1^1 - Vx^0 - x_2^1 + Vx^0)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_1^3 - x_2^3)^2 =$$

$$= (x_1^1 - x_2^1)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_1^3 - x_2^3)^2.$$

Равенство левой и правой частей означает, что квадрат расстояния между двумя материальными точками в пространстве сохраняется, то есть является инвариантом преобразований Галилея.

Определение 7.2 *Величина*

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dx^0},$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор материальной точки, называется скоростью материальной точки.

Пусть $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы двух различных материальных точек в одной системе отсчета.

Определение 7.3 *Величина*

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{dx^0}$$

называется относительной скоростью двух материальных точек с радиус-векторами $\boldsymbol{r}_1$ *и* $\boldsymbol{r}_2$*.*

Свойство 7.4 *Относительная скорость двух материальных точек является инвариантом преобразований Галилея.*

Для того, чтобы доказать это свойство, выведем сначала закон преобразования скорости материальной точки, $d\mathbf{r}/dx^0$, где $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)^T$ — радиус-вектор материальной точки, $x^i = x^i(x^0)$, $\quad i = 1,2,3$ — её пространственные координаты, вообще говоря, изменяющиеся в зависимости от координаты x^0.

Пусть $\mathbf{r}' = (x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})^T$ — радиус-вектор материальной точки в системе отсчета K', причем в этой системе отсчета координаты $x^{i'}$, $\quad i' = 1,2,3$ являются функциями $x^{0'}$. Используя преобразования (14), запишем закон преобразования радиус-вектора при переходе от системы отсчета K в систему отсчета K'.

$$\mathbf{r}'(x^{0'}) = \begin{pmatrix} x^{1'}(x^{0'}) \\ x^{2'}(x^{0'}) \\ x^{3'}(x^{0'}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1(x^0) - Vx^0 \\ x^2(x^0) \\ x^3(x^0) \end{pmatrix} = \mathbf{r}(x^0) - \mathbf{V}x^0. \tag{17}$$

Здесь использовано равенство $x^0 = x^{0'}$ а через $\mathbf{V}$ обозначен вектор $\{V, 0, 0\}$.

Покажем, как преобразуется производная d/dx^0 при переходе в систему отсчета K'. Заметим, что координаты x^i, $i = 0,1,2,3$ можно рассматривать как функции величин $x^{i'}$, $i' = 0,1,2,3$, заданные с помощью обратных преобразований

$$x^0 = x^{0'}, \quad x^1 = x^{1'} + Vx^{0'}, \quad x^2 = x^{2'}, \quad x^3 = x^{3'}. \tag{18}$$

Далее используем формулу для производной сложной функции нескольких переменных [3]

$$\frac{d}{dx^{0'}} = \frac{\partial}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} + \frac{\partial}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial x^1}{\partial x^{0'}} = \frac{\partial}{\partial x^0} + V\frac{\partial}{\partial x^1}. \tag{19}$$

Производные

$$\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial x^1}{\partial x^{0'}} = V$$

в (19) вычислены, исходя из формул обратного преобразования (18).

Для того, чтобы выяснить, как преобразуется скорость материальной точки при преобразовании Галилея, подействуем операторами, стоящими в левой и правой частях (19), на радиус-вектор точки. С учетом равенства (17), получим

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dx^{0'}} = \frac{d}{dx^{0'}}\left(\mathbf{r}(x^0) - \mathbf{V}x^0\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dx^{0'}} - \mathbf{V}\frac{dx^0}{dx^{0'}} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + V\frac{\partial}{\partial x^1}\right)\mathbf{r}(x^0) - \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dx^0} - \mathbf{V}. \quad (20)$$

В последнем равенстве частная производная заменена на полную, поскольку радиус-вектор $\mathbf{r}$ является функцией только одной переменной x^0.

Из закона преобразования скорости (20) следует, что относительная скорость двух материальных точек сохраняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Действительно, пусть $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ радиус-векторы двух различных материальных точек в системе отсчета K. Согласно (20), относительная скорость этих двух материальных точек преобразуется по закону

$$\frac{d(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)}{dx^{0'}} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dx^0} - \mathbf{V} - \frac{d\mathbf{r}_2}{dx^0} + \mathbf{V} = \frac{d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{dx^0},$$

то есть относительная скорость является инвариантом преобразований Галилея.

Определение 7.5 *Величина*

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{(dx^0)^2}$$

называется ускорением материальной точки.

Свойство 7.6 *Ускорение материальной точки является инвариантом преобразований Галилея.*

Выведем закон преобразования второй производной $d^2/(dx^0)^2$ при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Для этого подействуем оператором $d/dx^{0'}$ на самого себя и используем закон преобразования (19):

$$\frac{d^2}{(dx^{0'})^2} = \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial}{\partial x^0} + V\frac{\partial}{\partial x^1}\right) + V\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial}{\partial x^0} + V\frac{\partial}{\partial x^1}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} + 2V\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^0} + V^2\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2}.$$

Подставим в левую и правую части этого операторного равенства радиус-вектор материальной точки и учтем равенство (17), тогда получим

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{(dx^{0'})^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{(dx^0)^2},$$

откуда вытекает справедливость свойства 7.6.

Замечание 7.7 Коэффициенты преобразования (14) — постоянные величины. Если это не так, и коэффициенты преобразования являются функциями координат $x^i, i = 0, 1, 2, 3$, то в результате преобразования второй производной $d^2\mathbf{r}/d(x^0)^2$ возникают слагаемые, содержащие первые и вторые производные этих функций, что физически означает, что движение одной из систем отсчета относительно другой происходит с непостоянной скоростью, то есть с ускорением, а значит система отсчета не является инерциальной.

Свойство 7.8 *Вид уравнения, выражающего второй закон Ньютона, не изменяется при преобразованиях Галилея.*

Запишем второй закон Ньютона в принятых обозначениях:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{(dx^0)^2} = F(\mathbf{r}, x^0). \tag{21}$$

В левой части уравнения стоит произведение массы m материальной точки, не изменяющейся при преобразованиях Галилея, на ускорение материальной точки, инвариантное относительно этих преобразований, а в правой — сумма сил, действующих на материальную точку со стороны других механических объектов, зависящая от расстояния между объектами, их относительной скорости и времени. Как уже было показано, все эти величины являются инвариантами преобразований Галилея, а значит и вид правой части (21), как и левой, не изменяется при преобразовании, то есть уравнение (21) инвариантно относительно преобразований Галилея.

7.2 Преобразования Лоренца

Второй постулат Эйнштейна гласит: «Скорость света в вакууме одинакова по всем направлениям и в любой области данной инерциальной системы отсчета и одинакова во всех инерциальных системах отсчета» [6]. Фраза «скорость света одинакова по всем направлениям» в том числе означает, что во всех инерциальных системах отсчета фронт световой волны, испущенной источником, движущимся равномерно и прямолинейно, не зависит от скорости источника и сохраняет форму. В случае электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме, фронт волны характеризуется изменением вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и вектора индукции магнитного поля $\mathbf{B}$ в данной точке пространства и описывается с помощью следующего волнового уравнения:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u.$$

Здесь c — скорость света в вакууме, одинаковая во всех инерциальных системах отсчета, u — какая-либо из компонент векторов $\mathbf{E}$ или $\mathbf{B}$ электромагнитного поля, возникающего при распространении волны в пространстве, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа.

Введя обозначения

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z,$$

волновое уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial (x^3)^2} = 0. \tag{22}$$

Обозначим через $\mathbf{x}$ следующий столбец из четырех координат:

$$\mathbf{x} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}^T. \tag{23}$$

Выполнение второго постулата Эйнштейна определяет требования к преобразованиям столбцов из четырех координат $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}^T$ при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, а именно, преобразование должно быть таким, чтобы сохранялся вид (22) волнового уравнения.

Введя в каждой системе отсчета декартовы оси и сопоставив мировой точке столбец из четырех координат, мы фактически перешли от физического определения положения движущейся материальной точки в каждой из систем отсчета к математическому заданию столбца из четырех координат в линейном пространстве столбцов. Согласно замечанию 7.7, коэффициенты преобразования при переходе между четырехмерными координатными пространствами, соответствующими инерциальным системам отсчета, не зависят от координат, поэтому преобразование координат при переходе между инерциальными системами отсчета K и K' можно интерпретировать как алгебраическое преобразование столбца (23) при переходе от линейного пространства, которое соответствует системе отсчета K, к линейному пространству, соответствующему системе отсчета K'. Дальше для линейных пространств мы будем использовать те же обозначения, что и для соответствующих систем отсчета.

В общем виде преобразование координат при переходе от линейного пространства K к линейному пространству K' можно записать как [7],[1].

$$x^{i'} = \sum_{i'=0}^{3} A_i^{i'} x^i.$$

Здесь индексами $i = 0, 1, 2, 3$ и $i' = 0, 1, 2, 3$ отмечены координаты четырехмерного столбца в линейных пространствах K и K' соответственно, а $A_i^{i'}$ — коэффициенты преобразования.

Дальше мы договоримся опускать значок суммы, считая, что суммирование всегда ведется по повторяющимся индексам, один из которых расположен внизу, а другой вверху. Такое правило записи суммы называется «соглашением Эйнштейна». Так, например, предыдущее равенство будем записывать как

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i.$$

Это так называемая тензорная запись.

С физической точки зрения переход между различными системами отсчета возможен в обе стороны, то есть допускает обратное преобразование с математической точки зрения. Тензорная запись обратного преобразования имеет вид

$$x^i = A_{i'}^{i} x^{i'}. \tag{24}$$

Коэффициенты $A_{i'}^{i}$ и $A_i^{i'}$ связаны друг с другом как коэффициенты прямой и обратной матриц [7]-[8]. На практике зачастую оказывается более удобным проводить преобразования в матричном виде, поэтому дальше будем приводить два варианта записи каждой выкладки: тензорную и матричную. В матричном виде прямое и обратное преобразования координат соответственно, имеют вид

$$\mathbf{x}' = A^{-1}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = A\mathbf{x}'.$$

где $\mathbf{x}$ — столбец (23), A — матрица преобразования.

Для того, чтобы получить закон преобразования уравнения (22), нам потребуются преобразования частных производных второго порядка. Из вида преобразования координат (24) следует, что в закон преобразования любой частной производной второго порядка, вообще говоря, войдут частные производные по всем возможным координатам, поэтому для получения законов преобразований нужно переписать волновое уравнение с использованием всех частных производных второго порядка. С этой целью введем матрицу

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

и перепишем с её помощью волновое уравнение следующим образом.

$$g^{i,k}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} = 0, \tag{26}$$

где $g^{i,k}$ — компоненты матрицы (25). То же уравнение в матричном виде можно записать следующим образом

$$\nabla^T g \nabla u = 0,$$

где через ∇ мы обозначили оператор градиента, который представляет собой столбец из четырех элементов — операторов частного дифференцирования по каждой переменной:

$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}^T.$$

Выведем закон преобразования градиента. Используя формулу для производной сложной функции нескольких переменных [3] и зависимость (24), получаем следующий закон преобразования для частной производной по координате $x^{i'}$, $i' = 0, 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = A^i_{i'}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

В матричном виде:

$$\nabla' = A^T \nabla.$$

Получим закон преобразования вторых частных производных:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(A^i_{i'}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = A^i_{i'}A^k_{k'}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}.$$

Вид волнового уравнения в новых координатах совпадает с (26) и сохраняется при переходах между инерциальными системами отсчета, то есть выполняются равенства

$$\begin{gathered} g^{i',k'}\frac{\partial^2 u}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} = g^{i',k'}A^i_{i'}A^k_{k'}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k}, \\ g^{i',k'} = g^{i,k}, \qquad g^{i',k'}A^i_{i'}A^k_{k'} = g^{i,k}. \end{gathered} \tag{27}$$

Из последнего равенства (27) вытекает, что коэффициенты $g^{i,k}$ преобразуются по закону преобразования дважды контравариантного тензора [7]-[8]:

$$g^{i',k'} = g^{i,k}A^{i'}_i A^{k'}_k, \qquad \text{или в матричном виде} \qquad g' = A^{-1}g(A^{-1})^T.$$

Подставим в этот закон преобразования равенство $g^{i',k'} = g^{i,k}$, и получим соотношения для коэффициентов матрицы $A_i^{i'}$:

$$g^{i,k} = g^{i,k} A_i^{i'} A_k^{k'}, \qquad \text{или в матричном виде} \qquad g = A^{-1} g (A^{-1})^T. \tag{28}$$

Определение 7.9 *Преобразованием Лоренца называется преобразование, матрица которого обладает свойством (28), где компоненты дважды контравариантного тензора $g^{i,k}$ определены в (25).*

Нетрудно показать, что преобразования Лоренца образуют группу. Напомним, что для любого преобразования аксиома 1.5 из определении группы выполняется согласно лемме 6.1. Исходя из физического смысла преобразования Лоренца как перехода между различными системами отсчета, мы изначально считали его обратимым и предполагали для каждой матрицы A существование обратной матрицы A^{-1}, такой что $AA^{-1} = I$, где I — тождественное преобразование, определяемое единичной матрицей 4×4. Нетрудно убедиться, что в случае тождественного преобразования соотношение (28) выполняется. Кроме того, выполняется равенство $AI = A$, поэтому преобразование I играет роль единицы группы.

Рассмотрим теперь два любых преобразования Лоренца A и B. Последовательному произведению этих преобразований соответствует матрица $C = AB$, $C_{i'}^{i} = A_m^i B_{i'}^m$. Покажем, что матрица C обладает свойством (28).

$$g^{i,k} C_i^{i'} C_k^{k'} = g^{i,k} B_m^{i'} A_i^m B_j^{k'} A_k^j = (g^{i,k} A_i^m A_k^j) B_m^{i'} B_j^{k'} =$$

$$= g^{m,j} B_m^{i'} B_j^{k'} = g^{i',k'} = g^{i,k}.$$

То же в матричном виде:

$$C^{-1} g (C^{-1})^T = (AB)^{-1} g ((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^{-1} g (A^{-1})^T (B^{-1})^T =$$

$$= B^{-1} g (B^{-1})^T = g.$$

Здесь были использованы равенства $C_i^{i'} = B_m^{i'} A_i^m$ и $C^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, справедливые для обратной матрицы. Тем самым групповые свойства преобразований Лоренца доказаны.

Псевдоскалярное произведение. Интервал.

Как нетрудно заметить, матрица (25) невырождена, поэтому у нее существует обратная, и можно определить дважды ковариантный тензор $g_{i,k}$ с компонентами, отвечающими матрице g^{-1}. С помощью непосредственной проверки легко убедиться, что выполняется соотношение $g^{-1} = g$, то есть компоненты дважды ковариантного тензора $g_{i,k}$ определяются матрицей (25). Потребуем дополнительно, чтобы при преобразованиях Лоренца компоненты тензора $g_{i,k}$ сохранялись, как и компоненты тензора $g^{i,k}$, то есть чтобы выполнялись равенства

$$g_{i,k} = g_{i,k}A^i_{i'}A^k_{k'} \qquad \text{то же в матричном виде} \qquad g = A^T gA. \tag{29}$$

С помощью тензора $g_{i,k}$ в линейном пространстве можно определить следующую функцию двух векторных аргументов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, представляющих собой столбцы вида (23):

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{i,k}x^i y^k, \quad \text{в матричном виде} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T g\mathbf{y}. \tag{30}$$

Эта функция называется **псевдоскалярным произведением**.

Четырехмерное линейное пространство с определенным в нем псевдоскалярным произведением называется псевдоевклидовым пространством [7]-[8]. В случае, когда псевдоскалярное произведение задается с использованием тензора (25), это пространство называется пространством Минковского.

Покажем, что псевдоскалярное произведение инвариантно относительно преобразований Лоренца. Пусть векторы

$$\mathbf{x} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \{y^0, y^1, y^2, y^3\}$$

отображаются в векторы

$$\mathbf{x}' = \{x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}\} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}' = \{y^{0'}, y^{1'}, y^{2'}, y^{3'}\}$$

при преобразовании Лоренца с матрицей A, коэффициенты которой $A^i_{i'}$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{i,k}x^i y^k = g_{i,k}A^i_{i'}x^{i'}A^k_{k'}y^{k'} = g_{i,k}A^i_{i'}A^k_{k'}x^{i'}y^{k'} = g_{i,k}x^{i'}y^{k'} = (\mathbf{x}', \mathbf{y}').$$

В матричном виде:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T g\mathbf{y} = (A\mathbf{x}')^T g(A\mathbf{y}') = (\mathbf{x}')^T(A^T gA)\mathbf{y}' = (\mathbf{x}')^T g\mathbf{y}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}').$$

Здесь были использованы соотношения (29). Равенство левых и правых частей в приведенных выкладках показывает, что псевдоскалярное произведение, введенное согласно (30), инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Пусть в некоторой системе отсчета находятся две материальные точки $M_1(x^0_1, x^1_1, x^2_1, x^3_1)$ и $M_2(x^0_2, x^1_2, x^2_2, x^3_2)$. Распишем в координатах псевдоскалярное произведение вектора

$$M_1M_2 = \{x^0_1 - x^0_2, x^1_1 - x^1_2, x^2_1 - x^2_2, x^3_1 - x^3_2\}$$

на самого себя. Обозначим результат как s^2.

$$s^2 = (x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^1 - x_2^1)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_1^3 - x_2^3)^2.$$

Величина s называется **интервалом** между точками M_1 и M_2. Как следствие инвариантности псевдоскалярного произведения интервал является инвариантом преобразований Лоренца:

$$s' = s.$$

7.3 Частный случай преобразований Лоренца

Рассмотрим теперь частный случай расположения систем отсчета как показано на рисунке 9. В этом случае координаты x^2 и x^3 не меняются при преобразовании, и матрица преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_{0'}^0 & A_{1'}^0 & 0 & 0 \\ A_{0'}^1 & A_{1'}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Запишем соотношения (29) для неизвестных коэффициентов преобразования $A_{i'}^i,\ i = 0, 1;\ i' = 0, 1:$

$$\begin{aligned} 1 = g_{0,0} &= g_{0,0}(A_{0'}^0)^2 + g_{1,1}(A_{0'}^1)^2 = (A_{0'}^0)^2 - (A_{0'}^1)^2; \\ 0 = g_{0,1} &= g_{0,0}A_{0'}^0 A_{1'}^0 + g_{1,1}A_{0'}^1 A_{1'}^1 = A_{0'}^0 A_{1'}^0 - A_{0'}^1 A_{1'}^1; \\ 0 = g_{1,0} &= g_{0,0}A_{1'}^0 A_{0'}^0 + g_{1,1}A_{1'}^1 A_{0'}^1 = A_{1'}^0 A_{0'}^0 - A_{1'}^1 A_{0'}^1; \\ -1 = g_{1,1} &= g_{0,0}(A_{1'}^0)^2 + g_{1,1}(A_{1'}^1)^2 = (A_{1'}^0)^2 - (A_{1'}^1)^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Обозначим

$$\beta = \frac{A_{0'}^1}{A_{0'}^0} = \frac{A_{1'}^0}{A_{1'}^1}. \tag{33}$$

Последнее равенство является следствием второго и третьего уравнений системы (32).

Запишем теперь первое и последнее уравнения (32), используя обозначение (33):

$$1 = (A_{0'}^0)^2 - \beta^2 (A_{0'}^0)^2; \qquad -1 = \beta^2 (A_{1'}^1)^2 - (A_{1'}^1)^2.$$

Отсюда получаем равенства

$$(A^0_{0'})^2 = (A^1_{1'})^2 = \frac{1}{1-\beta^2}. \tag{34}$$

Используя равенства (33), выразим оставшиеся неизвестные коэффициенты матрицы (31):

$$(A^0_{1'})^2 = (A^1_{0'})^2 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}. \tag{35}$$

Для того, чтобы придать величине β физический смысл, рассмотрим движение начала отсчета системы K' в системе K, считая, что системы расположены так же, как на рисунке 9, и K' движется относительно K вправо со скоростью V. Тогда $x^0 = ct, \quad x^{1'} = 0, \quad x^1 = Vt$, и преобразования (24) для координат x^0 и x^1 принимают вид

$$x^0 = ct = A^0_{0'}x^{0'}; \quad x^1 = Vt = A^1_{0'}x^{0'}. \tag{36}$$

Разделив второе из этих равенств на первое и учитывая обозначение (33), получаем выражение для β :

$$\beta = \frac{V}{c}. \tag{37}$$

Заметим, что для величины β справедливо неравенство

$$|\beta| < 1.$$

Если считать, что время в системах отсчета K и K' течет в одну сторону, то есть $x^{0'} > 0$, то величины $A^0_{0'}$ и $A^1_{0'}$ в равенствах (36) окажутся положительными, и при извлечении корня в выражениях (34) и (35) следует выбрать знак "плюс".

Итак, в рассматриваемом частном случае преобразование Лоренца определяется матрицей вида

$$A(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что обратное преобразование задается матрицей $A(-\beta)$, а для произведения преобразований справедливо равенство

$$A(\beta_1)A(\beta_2) = A(\tilde{\beta}), \quad \text{где} \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}. \tag{38}$$

Замечание 7.10 Для вывода закона произведения преобразований (38) удобно использовать следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2) &= 1+\beta_1^2\beta_2^2-\beta_1^2-\beta_2^2 = \\
&= 1+\beta_1^2\beta_2^2+2\beta_1\beta_2-2\beta_1\beta_2-\beta_1^2-\beta_2^2 = (1+\beta_1\beta_2)^2-(\beta_1+\beta_2)^2,
\end{aligned}
\tag{39}
$$

тогда

$$
\frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}} = \sqrt{\frac{(1+\beta_1\beta_2)^2}{(1+\beta_1\beta_2)^2-(\beta_1+\beta_2)^2}} =
$$

$$
\sqrt{\frac{1}{1-(\beta_1+\beta_2)^2/(1+\beta_1\beta_2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-\tilde{\beta}^2}}
$$

и

$$
\frac{\beta_1+\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}} = \sqrt{\frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{(1+\beta_1\beta_2)^2-(\beta_1+\beta_2)^2}} =
$$

$$
\sqrt{\frac{(\beta_1+\beta_2)^2/(1+\beta_1\beta_2)^2}{1-(\beta_1+\beta_2)^2/(1+\beta_1\beta_2)^2}} = \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}}\,.
$$

Покажем, что при выполнении неравенств $-1 \le \beta_{1,2} \le 1$ величина $\tilde{\beta}$ по модулю также не превосходит единицы.

Заметим, что при $|\beta_{1,2}| \le 1$ левая часть равенства (39) может принимать только неотрицательные значения, а значит и правая часть также неотрицательна, то есть

$$
(1+\beta_1\beta_2)^2-(\beta_1+\beta_2)^2 \ge 0.
$$

Из последнего неравенства следует

$$
\left|\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right| \le 1.
$$

Неравенство $|\tilde{\beta}| \le 1$ доказано.

Итак, подмножество преобразований Лоренца, определяемых матрицами $A(\beta)$ при $|\beta| \le 1$, не пусто; кроме того, обратное преобразование $A(-\beta)$ и произведение преобразований $A(\beta_1)A(\beta_2)$ входят в это подмножество. Тем самым оказываются выполненными все условия определения подгруппы 4.1, то есть преобразования, определяемые матрицами $A(\beta)$, образуют подгруппу группы преобразований Лоренца.

Подставим в выражение (38) для $\tilde{\beta}$ отношения

$$\tilde{\beta} = \tilde{V}/c, \quad \beta_1 = V_1/c, \quad \beta_2 = V_2/c \quad (\text{см } (37)),$$

тогда придем к равенству

$$\frac{\tilde{V}}{c} = \frac{V_1/c + V_2/c}{1 + V_1 V_2/c^2}.$$

Домножив левую и правую части последнего равенства на величину c, получим зависимость, выражающую закон сложения скоростей в релятивистской механике:

$$\tilde{V} = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2/c^2}. \tag{40}$$

Если система отсчета K_1 движется относительно неподвижной системы отсчета K_0 со скоростью V_1, а система K_2 движется относительно K_1 со скоростью V_2, то K_2 движется относительно K_0 со скоростью $\tilde{V}$, определяемой выражением (40).

Литература

[1] С.Б. Кадомцев. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Москва ФИЗМАТЛИТ, 2001.

[2] Б.Л. ван дер Варден. Алгебра.

[3] В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа часть 1. Москва, НАУКА-ФИЗМАТЛИТ, 1998.

[4] Л.А. Калужнин, В.И. Сущанский. Преобразования и перестановки. Москва «НАУКА» 1985.

[5] А.Н. Матвеев. Механика и теория относительности. Москва «ОНИКС 21 век», «Мир и образование» 2003.

[6] В.А. Угаров. Специальная теория относительности. Москва «НАУКА», 1977.

[7] Ильин В. А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. Москва ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[8] Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. Москва ФИЗМАТЛИТ, 2001.