0.5 setgray0 0.5 setgray1

Лекция 3

ВЕКТОРЫ

§ 1. Определение вектора. Свободные и скользящие векторы

Дадим определение направленного отрезка.

Определение 1. *Отрезок, концы которого упорядочены, называется направленным отрезком. Первый из его концов называется началом, второй — концом направленного отрезка.*

Обозначение. Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Точка A — это начало, а точка B — это конец направленного отрезка.

Определение 2. *Длиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.*

Определение 3. *Линией действия направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется прямая, проходящая через точки A и B.*

Все направленные отрезки подразделяются на три категории: *свободные векторы*, *скользящие векторы* и *связанные векторы*. Такое разделение вызвано потребностями физики и прежде всего *теоретической механики*. Дадим сначала физическое описание каждой из трёх групп векторов.

Свободными векторами представляются векторные физические величины, не меняющиеся при переходе от одной точки пространства (тела) к любой другой. Так, например, при поступательном движении абсолютно твердого тела скорости $\mathbf{v}$ в каждой точке тела равны между собой по величине и направлению. Задать скорость движения тела можно задать каким–либо направленным отрезком.

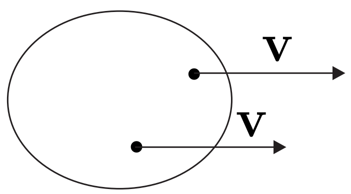

Рис. 1. Скорость поступательного движения абсолютно твердого тела — свободный вектор.

Скользящие векторы представляют векторные физические величины, остающиеся неизменными вдоль линии действия векторной величины и меняющиеся при переходе к другой точке пространства, не лежащей на линии действия. Например, сила $\mathbf{F}_A$, приложенная к одной точке A абсолютно твердого тела, сообщит ему вполне определённое движение. Такое же движение сообщит сила $\mathbf{F}_B$, приложенная к другой точке B твердого тела, лежащей на той же линии действия силы $\mathbf{F}_A$. Однако, такая же сила $\mathbf{F}_C$, приложенная к точке C, не лежащая на линии действия силы $\mathbf{F}_A$, сообщит твердому телу другое движение. Например, рассмотрим маятник, закреплённый в точке O :

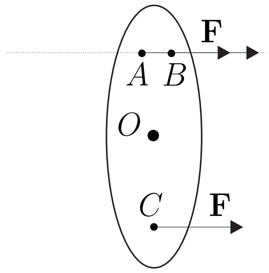

Рис. 2. Вектор силы $\mathbf{F}$ — это скользящий вектор.

Связанные векторы представляют физическую величину лишь только в каждой конкретной точке пространства (тела). Например так обстоит дело с силой приложенной к деформируемому твёрдому телу. Действительно, одна и та же сила, приложенная к различным точкам деформируемого тела приведёт к различным его деформациям.

Дадим определения.

Определение 4. *Два направленных отрезков называются коллинеарными, если их линии действия параллельны.*

Замечание 1. Если один из направленных отрезков нулевой $\overrightarrow{AA}$ или оба направленных отрезков нулевые, то оба направленных отрезков считаются коллинеарными. Если отложить оба коллинеарных отрезка от одной точки, то их линии действия совпадут, т. е. они будут лежать на одной прямой.

Определение 5. *Направленные отрезки называются компланарными, если их линии действия параллельны некоторой плоскости.*

Замечание 2. Линия действия нулевого направленного отрезка $\overrightarrow{AA}$ считается параллельной всякой плоскости.

Лемма 1. *Два направленных отрезка компланарны.*

Доказательство.

Случай 1. Если один из направленных отрезков нулевой, то в качестве искомой плоскости можно взять плоскость, проходящую через линию действия второго направленного отрезка. Если оба направленных отрезка нулевые, то произвольная плоскость параллельна их линиям действия.

Пусть оба направленных отрезка $\overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$ и $\overrightarrow{CD} \neq \mathbf{0}$.

Случай 2. Если их линии действия пересекаются, то в качестве искомой плоскости можно взять плоскость содержащую эти прямые:

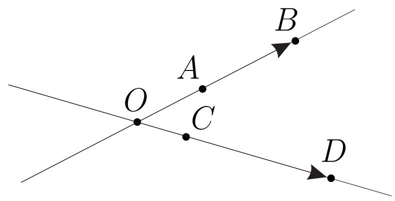

Рис. 3. Линии действия направленных отрезков пересекаются.

Случай 3. Если их линии действия совпадают, то годится любая плоскость содержащая эту прямую.

Случай 4. Если их линии действия параллельны, то искомая плоскость проходит через эти параллельные прямые.

Если линии действия (AB) и (CD) направленных отрезков не пересекаются и не параллельны, т. е. скрещиваются, то существует плоскость π, которая одновременно параллельна и прямой (AB) и прямой (CD). Для построения этой плоскости нужно так параллельно самой себе переместить прямую (AB), чтобы она пересекалась с прямой (CD). Тогда искомая плоскость есть плоскость содержащая эти две прямые:

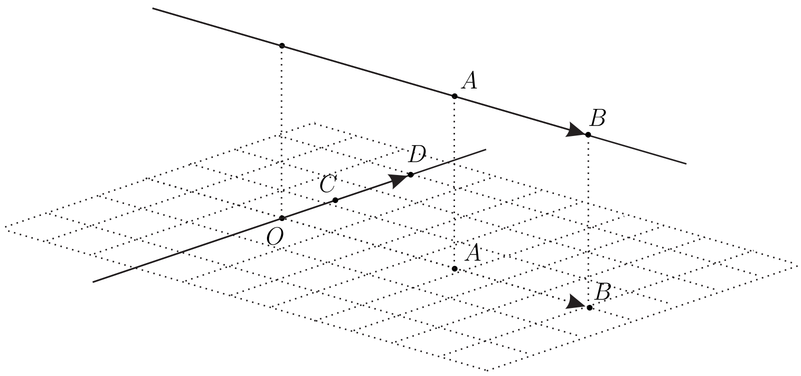

Рис. 4. Линии действия направленных отрезков скрещиваются.

Лемма доказана.

Замечание 3. Понятие компланарности направленных отрезков нетривиально только для семейства направленных отрезков, состоящего не менее чем из трёх направленных отрезков.

Для того, чтобы ввести понятия свободного вектора и скользящего вектора нужно дать соответствующие определения равенства векторов. Этих определений равенств у нас три.

Определение 6. *Два направленных отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *называются равными в смысле связанных векторов, если совпадают точки* $A = B$ *и* $C = D$.

Определение 7. *Два направленных отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *называются равными в смысле скользящих векторов, если у них общая линия действия, они одинаково направлены и имеют одинаковую длину.*

Определение 8. *Два направленных отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *называются равными в смысле свободных векторов, если они коллинеарны, у них одинаковое направление и они имеют одинаковую длину.*

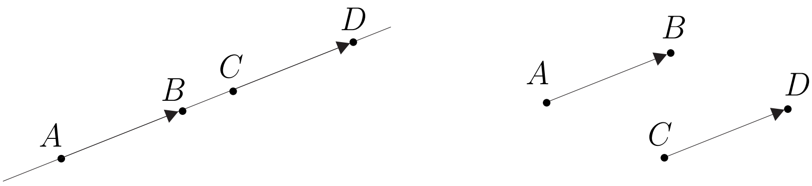

Рис. 5. Равные направленные отрезки в смысле скользящих и в смысле свободных векторов.

Теперь мы можем дать определения всех трёх типов векторов.

Определение 9. *Связанным вектором называется направленный отрезок.*

Определение 10. *Скользящим вектором, порождённым направленным отрезком* $\overrightarrow{AB}$, *называется все равные направленному отрезку* $\overrightarrow{AB}$ *направленные отрезки в смысле определения* 7.

Замечание 1. Для скользящего вектора используется такое обозначение $\mathbf{a}_\alpha$, $\mathbf{b}_\beta$, где α, β — это линии действия скользящих векторов.

Определение 11. *Свободным вектором или вектором, порождённым направленным отрезком* $\overrightarrow{AB}$, *называется все равные направленному отрезку* $\overrightarrow{AB}$ *направленные отрезки в смысле определения* 8.

Замечание 2. Для свободного вектора или просто вектора используется обозначение $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. В дальнейшем мы будем в основном рассматривать свободные векторы. При этом все рассматриваемые операции будут не зависеть от точки приложения свободных векторов.

В дальнейшем мы постоянно будем пользоваться операцией отложения вектора $\mathbf{a}$ от заданной точки A, которая приводит к построению однозначно определённого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$:

Замечание 4. Определения коллинеарности и компланарности направленных отрезков переносятся на свободные векторы без изменений. Именно, два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ если направленные отрезки $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ и

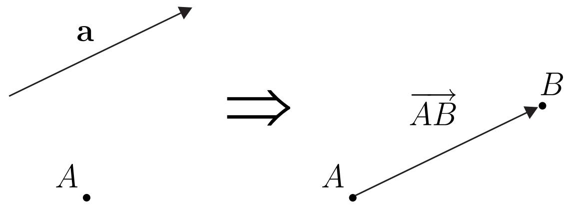

Рис. 6. Отложение вектора от заданной точки.

$\overrightarrow{CD} \in$ коллинеарны. Векторы компланарны, если линии действия произвольных направленных отрезков, представляющих соответствующие свободные векторы, параллельны некоторой плоскости.

§ 2. Операции над векторами

Рассмотрим два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Дадим определение суммы векторов, построенной по правилу треугольника.

Определение 12. *Суммой* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется вектор* $\mathbf{c}$, *построенный по следующему правилу треугольника*: *отложим вектор* $\mathbf{a}$ *от некоторой точки* A *и в результате получим направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$, *а от точки* B *отложим вектор* $\mathbf{b}$ *и в результате получим направленные отрезок* $\overrightarrow{BC}$. *Направленный отрезок* $\overrightarrow{AC}$ *порождает вектор* $\mathbf{c}$, *который и называется суммой векторов* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

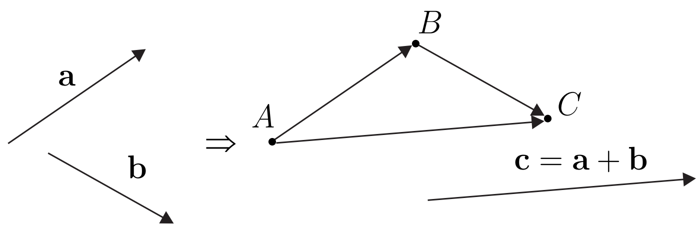

Рис. 7. Правило треугольника сложения векторов.

Замечание 3. Можно заметить, что так построенный вектор $\mathbf{c}$ не зависит от выбора точки A, т. е. действительно является свободным.

Замечание 4. Точно также можно ввести операцию сложения скользящих векторов $\mathbf{a}_\alpha$ и $\mathbf{b}_\beta$, но при одном существенном условии — линии действия α и β скользящих векторов пересекаются. Например, коллинеарные скользящие векторы складывать нельзя, в отличие от коллинеарных свободных векторов.

Замечание 5. Заметим, что по правилу треугольника нельзя складывать, вообще говоря, два связанных вектора. Поэтому сейчас введём ещё одно правило сложения параллелограмма, которое для свободных и скользящих векторов эквивалентно правилу треугольника, и является определением сложения связанных векторов.

Определение 13. *Суммой двух направленных отрезков* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AC}$ *называется направленный отрезок* $\overrightarrow{AD}$, *где точка* D *— это противоположная вершина параллелограмма, построенного на направленных отрезках* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AC}$.

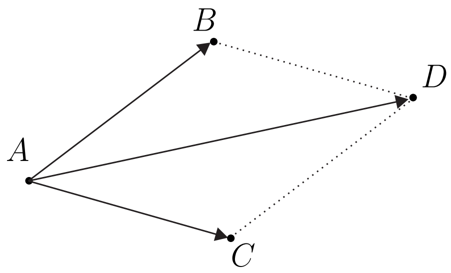

Рис. 8. Правило параллелограмма сложения направленных отрезков.

Если отложить два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от одной точки A, то мы получим направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и нетрудно заметить, что вектор $\overrightarrow{AD}$, построенный согласно определению 13, порождает свободный вектор $\mathbf{c}$, равный сумме векторов $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, построенной согласно правилу треугольника.

Справедлива следующая лемма о свойствах операции сложения векторов:

Лемма 2. *Справедливы следующие* 4 *свойства*:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}, \tag{2.1}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}, \tag{2.3}$$

$$\forall\,\mathbf{a}\quad \exists\,\mathbf{a}^{'}:\quad \mathbf{a}+\mathbf{a}^{'}=\mathbf{0}. \tag{2.4}$$

Доказательство.

Эти свойства достаточно очевидны и доказываются согласно определению суммы векторов по правилу треугольника.

Лемма доказана.

Дадим определение операции вычитания векторов.

Определение 14. *Вектор* $\mathbf{c}$ *называется разностью векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, *если* $\mathbf{c}+\mathbf{b}=\mathbf{a}$.

Обозначение. Используется обозначение $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Замечание 6. Если отложить оба вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от одной точки A, то вектор $\mathbf{c}$ будет порождаться направленным отрезком, идущим из конца вектора $\mathbf{b}$ в конец вектора $\mathbf{a}$.

Дадим определение ещё одной операции.

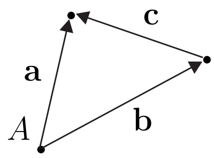

Рис. 9. Вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Определение 15. *Произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на вещественное число* λ *называется вектор* $\mathbf{b}$, *который*

1. *коллинеарен вектору* $\mathbf{a}$,
2. *его длина* $|\mathbf{b}| = |\lambda||\mathbf{a}|$,
3. *имеет направление, которое совпадает с направлением вектора* $\mathbf{a}$, *если* $\lambda > 0$, *и имеет противоположное направление с вектором* $\mathbf{a}$, *если* $\lambda < 0$.
4. *если* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ *или* $\lambda = 0$, *то вектор* $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Замечание 7. Аналогичные вид имеют определения умножения скользящих и связанных векторов на вещественные числа.

Справедливы следующие легко проверяемые свойства:

Лемма 3. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *и любых вещественных чисел* λ, μ *справедливы следующие свойства*:

1. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$,
2. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$,
3. $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$,
4. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$,
5. $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$,
6. $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Свойства лемм 1 и 2 позволяют работать с векторами относительно операций суммы векторов и умножения векторов на вещественные числа как с вещественными числами.

Справедливо следующее важное свойство коллинеарных векторов, которое является прямым следствием определением операции умножения векторов на вещественные числа:

Лемма 4. *Два вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда найдётся такое число* α, *что* $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$ *либо найдётся такое число* β, *что* $\mathbf{a} = \beta\mathbf{b}$.

Доказательство. Сначала докажем *необходимость.* Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е. линии действия этих векторов параллельны. Отложим эти векторы от произвольной точки O. Тогда получим два направленных отрезка $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Нужно рассмотреть два случая:

Случай 1. Пусть $\overrightarrow{OA} \neq \mathbf{0}$ и $\overrightarrow{OB} \neq \mathbf{0}$. Эти направленные отрезки лежат на одной прямой, поскольку у векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельные линии действия, а точка O, от которой отложены векторы, общая.

Рассмотрим два направленных отрезка

$$\mathbf{e}_1 := \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}, \quad \mathbf{e}_2 := \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}.$$

Это два *единичных* направленных отрезка, с общим началом — точкой O. Возможны всего две ситуации взаимного расположения этих двух направленных отрезков: т. е. либо

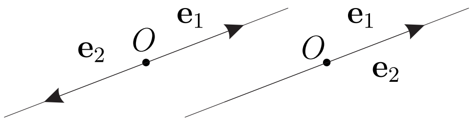

Рис. 10. Взаимное расположение двух единичных направленных отрезков.

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \quad \text{либо} \quad \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1.$$

В первом случае получим следующее равенство:

$$\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \lambda_+ \overrightarrow{OA}, \quad \lambda_+ = \frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}.$$

Во втором случае имеем

$$\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} = -\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \lambda_- \overrightarrow{OA}, \quad \lambda_- = -\frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}.$$

Итак, в любом случае в силу произвольности точки O справедливо одно из следующих равенств:

$$\mathbf{b} = \lambda_+ \mathbf{a} \quad \text{или} \quad \mathbf{b} = \lambda_- \mathbf{a}.$$

Случай 2. Если $\overrightarrow{OA} = \mathbf{0}$, то

$$\overrightarrow{OA} = 0 \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Если $\overrightarrow{OB} = \mathbf{0}$, то

$$\overrightarrow{OB} = 0 \cdot \overrightarrow{OA}.$$

Если же $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{0}$, то, например,

$$\overrightarrow{OB} = 0 \cdot \overrightarrow{OA}.$$

В силу произвольности точки O имеем, что либо

$$\mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{b} \quad \text{либо} \quad \mathbf{b} = 0 \cdot \mathbf{a}.$$

Необходимость доказана.

Теперь докажем *достаточность*. Пусть, например, имеет место равенство $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$ при некотором числе α. Тогда по определению произведения вектора на число вектор $\mathbf{a}$ коллинеарен вектору $\alpha\mathbf{a}$, который равен вектору $\mathbf{b}$. Достаточность доказана.

Лемма доказана.

Замечание 8. Очевидно, что в случае связанных векторов лемма не имеет место. Для скользящих векторов имеет место аналогичное утверждение, если коллинеарность векторов заменить на общую линию действия скользящих векторов $\mathbf{a}_\alpha$ и $\mathbf{b}_\beta$.

Дадим следующее важное определение.

Замечание 9. Мы ввели свободные векторы в пространстве. Это множество называется векторным пространством и обозначается $\mathbb{V}_3$. Точно также можно ввести свободные векторы на плоскости (лежащих на одной той же плоскости). Это множество называется векторным пространством векторов на плоскости и обозначается $\mathbb{V}_2$. Для этого множества выполнены свойства аналогичные результатам лемм 1 и 2. Наконец, можно рассматривать векторное пространство векторов на прямой, которое обозначается $\mathbb{V}_1$.

§ 3. Линейная зависимость векторов

Дадим определения.

Определение 16. *Линейной комбинацией векторов* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *называется сумма*

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n, \tag{3.1}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *— это вещественные числа.*

Определение 17. *Линейная комбинация векторов*

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n \tag{3.2}$$

называется нетривиальной, если числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *не равны одновременно нулям*:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq (0, 0, \ldots, 0).$$

Теперь мы можем дать определения линейной зависимости и линейной независимости векторов.

Определение 18. *Векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *называются линейно зависимыми, если найдётся такая их нетривиальная линейная комбинация*

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq (0, 0, \ldots, 0), \tag{3.3}$$

что справедливо следующее равенство:

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}, \tag{3.4}$$

где $\mathbf{0}$ *— это нулевой вектор.*

Определение 19. *Векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *называются линейно независимыми, если равенство*

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{3.5}$$

возможно только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Справедливы следующие свойства линейной зависимости и линейной независимости.

Теорема 1. *Если хотя бы один из векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ *является нулевым, то эти векторы являются линейно зависимыми.*

Доказательство.

Пусть без ограничения общности первый вектор $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация векторов

$$1 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Значит, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Один вектор является линейно зависимым тогда и только тогда, когда это нулевой вектор.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть вектор $\mathbf{a}$ является линейно зависимым:

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \lambda \neq 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Достаточность. Для нулевого вектора $\mathbf{0}$ выполнено следующее равенство:

$$\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{для всякого} \quad \lambda \neq 0,$$

т. е. нулевой вектор является линейно зависимым.

Следствие доказано.

Теорема 2. *Если среди* n *векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ *какие–либо* $m < n$ *векторов линейно зависимы, то и все векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ *линейно зависимы.*

Доказательство.

Поскольку при перестановке местами векторов в системе векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ линейная зависимость или линейная независимость системы не меняется, то перестановкой можно добиться, чтобы первые $m < n$ векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ были линейно зависимыми. Но тогда найдётся такая нетривиальная линейная комбинация

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \quad (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \neq (0, \cdots, 0).$$

Но тогда справедливо следующее равенство:

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

т. е. вся система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ является линейно зависимой.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ *были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из векторов системы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ *выражался через другие.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимы. Тогда найдётся нетривиальная линейная комбинация

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq (0, 0, \ldots, 0).$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1 \neq 0$. Но тогда справедливо равенство

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \mathbf{a}_n,$$

т. е. вектор $\mathbf{a}_1$ выражается через векторы $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Достаточность. Пусть, например,

$$\mathbf{a}_1 = \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n,$$

тогда имеет место следующее равенство:

$$-1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

т. е. векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Теперь мы докажем следующие два утверждения о связи линейной зависимости двух векторов с коллинеарностью этих векторов и о связи линейной зависимости трёх векторов с компланарностью этих векторов.

Теорема 4. *Для того чтобы два вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарными.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа α и β, $|\alpha| + |\beta| > 0$, что

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \neq 0$ и тогда

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}, \quad \lambda = -\frac{\beta}{\alpha},$$

т. е. векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Достаточность. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Если хотя бы один из векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ равен нулю, то эти векторы линейно зависимы в силу теоремы 1. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Тогда по лемме 4 найдётся такое число $\lambda \neq 0$, что

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

т. е. нетривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору. Следовательно, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Для того чтобы три вектора* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы. Тогда согласно результату теоремы 3 один из векторов будет выражаться через оставшиеся. Без ограничения общности будем считать, что

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}. \tag{3.6}$$

Отложим все векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ от одной точки O, тогда равенство (3.6) примет следующий вид:

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}, \tag{3.7}$$

т.е. согласно определению операций сложения направленных отрезков и умножения на направленных отрезков на число направленный отрезок $\overrightarrow{OC}$ лежит в той же плоскости, что и направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

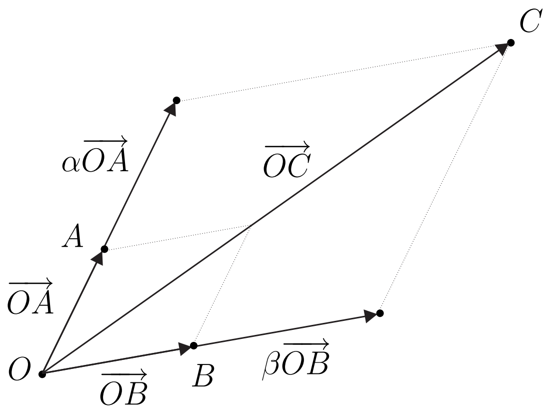

Рис. 11. К доказательству необходимости.

Достаточность. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Если какие–либо два вектора из этой тройки коллинеарны, то по теореме 2 векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы. Поэтому предположим, что никакие два вектора из трёх не являются коллинеарными. Теперь отложим векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ от произвольной точки O и получим три соответствующих направленных отрезков

$$\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC}.$$

Через точку C направленного отрезка $\overrightarrow{OC}$ проведём прямую параллельную направленному отрезку $\overrightarrow{OB}$. Точку пересечения с линией действия направленного отрезка $\overrightarrow{OA}$ обозначим через A_1. Теперь проведём прямую через точку C параллельно направленному отрезку $\overrightarrow{OA}$. Точку пересечения с линией действия направленного отрезка $\overrightarrow{OB}$ обозначим через B_1.

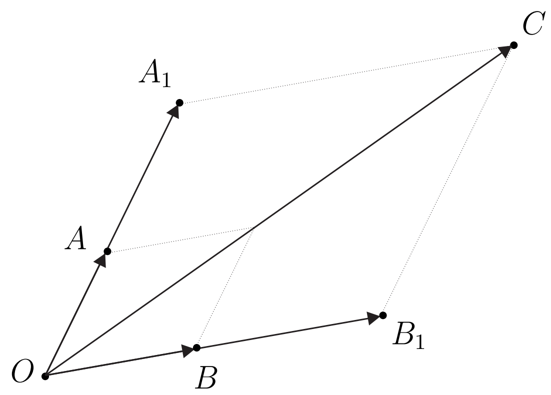

Рис. 12. К доказательству достаточности.

Приходим к следующему равенству согласно правилу параллелограмма сложения:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}. \tag{3.8}$$

Направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ лежат на одних прямых соответственно. Поэтому найдутся такие числа α и β, что

$$\overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{OB}. \tag{3.9}$$

Следовательно, из равенств (3.8) и (3.9) вытекает равенство

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}, \tag{3.10}$$

которое в силу произвольности точки O можно переписать для соответствующих свободных векторов

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \Leftrightarrow \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + (-1)\mathbf{c} = \mathbf{0}, \tag{3.11}$$

т. е. векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Точно также может быть доказано следующее утверждение:

Теорема 6. *Каковы бы ни были два неколлинеарных вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *любой компланарный с ними вектор* $\mathbf{c}$ *можно разложить по* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}. \tag{3.12}$$