§ 1. ВОПРОСЫ

1. Внешняя мера множеств. Измеримые по Лебегу множества. Сумма, дополнение, пересечение, разность и симметрическая разность измеримых по Лебегу множеств.

2. Теорема о конечной аддитивности меры Лебега.

3. Измеримые функции. Лемма об измеримых множествах. Измеримость произведения измеримых функций. Измеримость предела измеримых функций.

4. Интеграл Лебега. Интеграл Лебега от простой функции. Интеграл Лебега от неотрицательной функции. НИДУ интегрируемости функции $f(x)$.

5. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Неравенство Чебышёва. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Лебега.

6. Теорема Беппо Леви. Лемма Фату.

7. Класс интегрируемых по Лебегу функций. Разбиение на классы. Пространства Лебега L^p. Неравенство Гельдера. Неравенство Минковского.

8. Определение метрического пространства. Открытый и замкнутый шар. Открытое и замкнутое множество. Необходимое и достаточное условие замкнутости множества. Лемма о топологии. Определение замыкания множества. Лемма о свойствах замыкания.

9. Непрерывность по Коши и по Хайне. Образ отображения и прообраз отображения. Теорема об открытом отображении. Теорема об эквивалентности определений по Коши и по Хайне.

10. Определение полного метрического пространства. Определение изометрии. Лемма о продолжении изометрии с плотных подмножеств. еорема о изометрии метрического пространства (X, d) некоторой части $(B(X), d_0)$. Определение пополнения метрического пространства. Теорема о пополнении метрического пространства.

11. Теорема о пересечении замкнутых шаров. Теорема Бэра о категории.

12. Определение топологического пространства. ФСО. Примеры двух ФСО на $\mathbb{C}(X)$ и построение соответствующих топологий.

13. Линейные функционалы. Теорема о базисе в линейном пространстве линейных функционалов над конечномерным линейным пространством. Определение ВТП. Полунормы. Функционал Минковского.

14. Определение банахового пространства. Определение эквивалентной нормы. Пространство $\mathcal{L}(N_1, N_2)$. Определение операторной нормы. Лемма 1 о НИДУ ограниченности нормы линейного оператора. Теорема о полноте $\mathcal{L}(N_1, N_2)$.

15. Теорема Хана–Банаха и её следствия.

16. Теоремы Банаха–Штейнгауза. $*$–слабая полнота $\mathbb{B}^*$.

17. Сильная, слабая и $*$–слабая сходимости. Понятие $\mathbb{B}^{**}$. Теорема о слабой полноте рефлексивного банахова пространства. Критерии слабой и $*$–слабой сходимости.

18. Теорема об открытом отображении. Теорема об обратном отображении.

19. Банаховы Алгебры. Интеграл Бохнера. Открытость множества обратимых элементов. Ряд Неймана. Резольвента. Резольвентное множество и спектр. Понятие об интеграле Данфорда.

20. Предгильбертово и гильбертово пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Теорема Беппо–Леви. Теорема о базисе.

21. Теорема об изометрии Рисса–Фреше. Свойства изометрии Рисса–Фреше. Транспонированный и сопряженный операторы. Обобщенное неравенство Коши–Буняковского. Теорема о спектре самосопряженного оператора.

§ 2. СПИСОК ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Задача 1. Доказать счётность множества всех алгебраических чисел (корней многочленов с целыми коэффициентами).

Задача 2. 1) Доказать, что добавление счётного множества к данному бесконечному множеству не меняет мощность последнего. 2) Можно ли то же самое сказать про удаление счётного подмножества? 3) Как сформулировать утверждение про удаление счётного подмножества так, чтобы оно стало верным?

Задача 3. Найти меру множества всех тех чисел отрезка $[0;1]$, в стандартном десятичном разложении которых отсутствует цифра 5.

Задача 4. Доказать с помощью неравенства Чебышёва, что сходимость в $L^p(X)$ влечёт сходимость по мере. Показать на примере (годится один из рассмотренных в данной лекции), что поточечная (или почти всюду) сходимость из сходимости в $L^p(X)$ не следует.

Задача 5. Привести пример функции $f(x)$, для которой существует (несобственный) интеграл Римана, но не существует интеграл Лебега.

Задача 6. Построить такую последовательность $\{f_n(x)\}$ ограниченных на $(0;1)$ функций, что $f_n(x) \to 0$ поточечно, но $\|f_n\|_1 \to +\infty$.

Задача 7. Убедиться в том, что открытый шар открыт, а замкнутый шар замкнут (приняв любое определение замкнутости).

Задача 8. Привести пример счётного пересечения открытых множеств, дающего замкнутое множество; привести пример счётного объединения замкнутых множеств, дающего открытое множество.

Задача 9. Доказать сепарабельность пространств l^p, $p \in [1;+\infty)$. (Указание. Начните с $p=1$.)

Задача 10. Доказать существование и единственность решения $x \in \mathbb{R}$ уравнения
$$2x + \sin x = 1.$$

Будет ли это доказательство верным при поиске решения в $\mathbb{C}$? В $\mathbb{Q}$?

Задача 11. Доказать, что пространство, не удовлетворяющее I аксиоме счётности, не является метризуемым.

Задача 12. Доказать, что норма непрерывна как функция своего аргумента: если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$. Верно ли обратное?

Задача 13. Пусть B — банахово пространство, $f \in B^*$ и для некоторого шара $\overline{B}_r(x_0) \equiv \{x \in B \mid \|x - x_0\| \leqslant r\}$ верно

$$\sup_{x,y \in \overline{B}_r(x_0)} |\langle f, x\rangle - \langle f, y\rangle| = 1. \tag{2.1}$$

Найти $\|f\|$.

Задача 14. Пусть $f, g \in C(M_1, M_2)$ — непрерывные отображения метрического пространства M_1 в метрическое пространство M_2 (с областью определения M_1), и пусть их значения совпадают на некотором всюду плотном в M_1 множестве. Доказать, что f и g совпадают всюду на M_1.

Задача 15. Доказать, что для любого элемента a банаховой алгебры верно соотношение

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

Задача 16. Для каких элементов a банаховой алгебры определена функция $\operatorname{tg} a$?

Задача 17. Показать, что скалярное произведение непрерывно по норме по совокупности переменных, т. е. если $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Задача 18. Можно ли в условии предыдущей задачи заменить сильную сходимость на слабую:
1) для одной из последовательностей?
2) для обеих последовательностей?

Задача 19. Пусть $A \in L(H)$ — обратимый оператор. Доказать, что существует $(A^*)^{-1}$ и он равен $(A^{-1})^*$. (Тем самым, оператор обратим тогда и только тогда, когда его сопряжённый обратим.)