Лекция 11

АБСТРАКТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 1. Интеграл Бохнера

Перейдем к построению интеграла Бохнера, являющегося банаховозначным обобщением интеграла Лебега.

Как и в случае интеграла Лебега путь у нас имеется измеримое пространство $([0,T],\mathcal{M},\mu)$ — это измеримое пространство, состоящее из $[0,T]\subset\mathbb{R}^1_+$, $\sigma-$алгебры его подмножеств $\mathcal{M}$ и меры Лебега μ, определенной на $\mathcal{M}$. Конечно, как и интеграл Лебега интеграл Бохнера можно строить и для множеств не только на прямой $\mathbb{R}^1$. Но нас в дальнейшем будет интересовать интеграл Бохнера на «временном» отрезке $[0,T]$. Дадим следующее определение.

Определение 1. *Простой функцией $h(t)$ на сегменте $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ мы назовем следующую функцию*:

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n} b_i\chi_i(t) \quad b_i\in\mathbb{B}, \tag{1.1}$$

где для каждого $i=\overline{1,n}$ функция $\chi_i(t)$ — это характеристическая функция некоторого множества $S_i\in\mathcal{M}$:

$$\chi_i(t)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}1 & \textit{при} \quad t\in S_i;\\ 0 & \textit{при} \quad t\in[0,T]\backslash S_i.\end{cases}$$

Причем $S_i\cap S_j=\varnothing$ при $i\neq j$.

Теперь мы можем определить интеграл Бохнера для простых функций. Дадим определение.

Определение 2. *Интегралом Бохнера от простой функции $h(t)$ на отрезке $[0,T]$ называется следующая величина*:

$$\int\limits_0^T h(t)\,\mu(dt)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n} b_i\mu(S_i). \tag{1.2}$$

Наконец, можно ввести интеграл Бохнера для произвольной $\mathbb{B}-$ $-$значной функции $f(t)$ следующим образом. Дадим определение.

Определение 3. *Интегралом Бохнера от произвольной $\mathbb{B}$—значной функции $f(t)$ называется следующая величина*:

$$\int\limits_0^T f(t)\,\mu(dt) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^T h_n(t)\mu(dt), \tag{1.3}$$

где предел понимается в сильном смысле банахова пространства $\mathbb{B}$ при условии, что существует такая последовательность $\{h_n(t)\}$ простых функций, сходящаяся μ почти всюду на $[0,T]$ сильно в $\mathbb{B}$ к функции $f(t)$, причем

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^T \|f(t)-h_n(t)\|\,\mu(dt) = 0. \tag{1.4}$$

Здесь есть один тонкий момент. Мы пока не доказали, что скалярная функция

$$\|f(t)-h_n(t)\|,$$

стоящая под знаком интеграла Лебега (1.4) μ—измерима на отрезке $[0,T]$. Действительно, это необходимо проверить. Для ответа на этот вопрос мы немного углубимся в теорию измеримости $\mathbb{B}$—значных функций.

Кроме того, необходимо доказать независимость предела (1.3) от выбора последовательности $\{h_n(t)\}$.

§ 2. Сильная и слабая измеримость

Дадим определения.

Определение 4. *$\mathbb{B}$—значная функция $f(t)$ называется μ—слабо измеримой на отрезке $[0,T]$, если для каждого $f^* \in \mathbb{B}^*$ функция*

$$\langle f^*, f(t)\rangle \tag{2.1}$$

является μ—измеримой на отрезке $[0,T]$.

Определение 5. *$\mathbb{B}$—значная функция $f(t)$ называется μ—сильно измеримой на отрезке $[0,T]$, если существует последовательность $\{h_n(t)\}$ простых функций на отрезке $[0,T]$, сильно сходящаяся в $\mathbb{B}$ к $f(t)$ μ почти всюду на отрезке $[0,T]$, т. е.*

$$\|f(t)-h_n(t)\| \to +0 \quad \textit{при} \quad n\to+\infty.$$

Справедлива следующая важная теорема Петтиса, доказательство которой приведено в [**?**].

Теорема 1. *Из μ—слабой измеримости $\mathbb{B}$—значной функции $f(t)$ вытекает, что $\|f(t)\|$ является μ—измеримой на отрезке $[0,T]$ при условии сепарабельности $\mathbb{B}$.*

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим два следующих множества:

$$\mathrm{A} := \{t : \ \|f(t)\| \leqslant c_1\} \quad \text{и} \quad \mathrm{A}_{f^*} := \{t : \ |\langle f^*, f(t)\rangle| \leqslant c_1\}.$$

Заметим, что в силу μ—слабой измеримости функции $f(t)$ множество A_{f^*} является μ—измеримым на отрезке $[0,T]$. Поскольку [1]

$$\|f(t)\| = \sup_{\|f^*\|_* \leqslant 1} |\langle f^*, f(t)\rangle|,$$

то имеет место следующее вложение:

$$\mathrm{A} \subset \bigcap_{\|f^*\|_* \leqslant 1} \mathrm{A}_{f^*}. \tag{2.2}$$

Шаг 2. Воспользуемся следствием из теоремы Хана–Банаха:

Следствие из теоремы Хана–Банаха. *Для каждого элемента $f \in \mathbb{B}$ найдется такой $f^* \in \mathbb{B}^*$, что*

$$\|f^*\|_* = 1 \quad \text{и} \quad \|f\| = \langle f^*, f\rangle.$$

Поэтому для каждого $t \in [0,T]$ найдется такой элемент $f^*(t) \in \mathbb{B}^*$, что имеет место равенство

$$\|f(t)\| = \langle f^*(t), f(t)\rangle, \quad \|f^*(t)\|_* = 1 \Rightarrow \|f^*(t)\|_* \leqslant 1.$$

Поэтому имеет место обратное вложение:

$$\mathrm{A} \supset \bigcap_{\|f^*\|_* \leqslant 1} \mathrm{A}_{f^*}. \tag{2.3}$$

Следовательно, из (2.2) и (2.3) вытекает следующее равенство множеств:

$$\mathrm{A} = \bigcap_{\|f^*\|_* \leqslant 1} \mathrm{A}_{f^*}. \tag{2.4}$$

Шаг 3. Но этого пока недостаточно для доказательства требуемого результат поскольку в пересечении

$$\bigcap_{\|f^*\|_* \leqslant 1} \mathrm{A}_{f^*}$$

участвует несчетное множество множеств. Для того чтобы преодолеть эту трудность воспользуемся тем, что пространство $\mathbb{B}$ сепарабельно. Справедлива следующая вспомогательная лемма, которую мы приведем без доказательства.

[1] Смотри первый том I.

Л е м м а 1. *Существует такая последовательность* $\{f_n^*\} \subset \mathbb{B}^*$, $\|f_n^*\|_* \leqslant 1$, *что для каждого* $f^* \in \mathbb{B}^*$, $\|f^*\|_* \leqslant 1$ *найдется подпоследовательность*

$$\left\{f_{n'}^*\right\} \subset \left\{f_n^*\right\},$$

что

$$\lim_{n' \to +\infty} \left\langle f_{n'}^*, f\right\rangle = \langle f^*, f\rangle \quad \textit{для всех} \quad f \in \mathbb{B}. \tag{2.5}$$

С учетом этой леммы мы приходим к следующему равенству

$$\mathrm{A} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_{f_n^*}, \tag{2.6}$$

где $\{f_n^*\}$ — это последовательность из леммы 1. Но счетное пересечение измеримых множеств является измеримым множеством и, следовательно, множество A является измеримым.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 2. *Сильно* μ*—измеримая функция на отрезке* $[0,T]$ *является слабо* μ*—измеримой на том же отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Пусть $\mathbb{B}$—значная функция $f(t)$ является сильно μ—измеримой на отрезке $[0,T]$. Тогда существует последовательность $\mathbb{B}$—значных простых функций

$$\{h_n(t)\} \subset \mathbb{B},$$

сильно в $\mathbb{B}$ сходящаяся к функции $f(t)$ почти всюду по мере Лебега μ на $[0,T]$, т.е.

$$\|f(t) - h_n(t)\| \to +0 \quad \text{для почти всех} \quad t \in [0,T] \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Следовательно, эта последовательность μ—почти всюду на $[0,T]$ слабо в $\mathbb{B}$ сходится к функции $f(t)$, т. е.

$$\langle f^*, f(t) - h_n(t)\rangle \to +0 \quad \text{для почти всех} \quad t \in [0,T] \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Шаг 2. Рассмотрим следующие множества:

$$\mathrm{A}(t) := \{t : |\langle f^*, f(t)\rangle| \leqslant c_1\} \quad \text{и} \quad \mathrm{A}_n(t) := \{t : |\langle f^*, h_n(t)\rangle| \leqslant c_1\}.$$

Для μ—почти всех $t \in [0,T]$ справедливо следующее равенство:

$$\mathrm{A}(t) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n(t),$$

Причем

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n(t)$$

является $\mu-$измеримым как счетное пересечение $\mu-$измеримых множеств.

Следовательно, множество $\mathrm{A}(t)$ тоже $\mu-$измеримо.

Лемма доказана.

Замечание 1. Теперь мы можем доказать, что *функция* $\|f(t)-h_n(t)\|$ *является* $\mu-$*измеримой на отрезке* $[0,T]$.

$\square$ Действительно, функция $f(t)$ является в силу определения 3 сильно $\mu-$измеримой, значит, из леммы 2 вытекает, что она является слабо $\mu-$измеримой. Понятно, что простые функции $h_n(t)$ слабо измеримы. Далее, разность двух слабо измеримых функций $f(t)-h_n(t)$ является, очевидно, слабо измеримой функцией. Теперь достаточно воспользоваться теоремой 1. $\boxtimes$

Замечание 2. Как мы уже отмечали, в определении 3 имеется еще один тонкий момент — мы должны доказать, что *интеграл Бохнера от функции* $f(t)$ *не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности простых функций* $\{h_n(t)\}\subset\mathbb{B}$.

$\square$ Действительно, пусть у нас имеются две последовательности простых функций, аппроксимирующих одну и туже функцию $f(t)$, тогда из этих двух последовательностей можно организовать третью последовательность, аппроксимирующую функцию $f(t)$. $\boxtimes$

§ 3. Интегрируемость по Бохнеру

Теперь мы можем доказать важную теорему, принадлежащую Бохнеру.

Теорема 2. *Для того чтобы сильно* $\mu-$*измеримая функция* $f(t)$ *была интегрируемой по Бохнеру на отрезке* $[0,T]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\|f(t)\|$ *была* $\mu-$*интегрируемой на этом же отрезке.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Имеет место следующее неравенство треугольника:

$$\|f(t)\|\leqslant\|h_n(t)\|+\|f(t)-h_n(t)\|. \tag{3.1}$$

Отметим, что $\|h_n(t)\|$ является μ–измеримыми на отрезке $[0,T]$. В силу замечания 1 функции $\|f(t)-h_n(t)\|$ являются μ–измеримыми.

Из неравенства (3.1) вытекает $\mu-$интегрируемость функции $\|f(t)\|$.

Шаг 2. Достаточность. Пусть $\{h_n(t)\}$ это последовательность простых функций, μ–почти всюду на отрезке $[0,T]$ сильно в $\mathbb{B}$ сходящаяся к функции $f(t)$. Рассмотрим новую последовательность простых функций:

$$w_n(t)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}h_n(t), & \text{при}\quad \|h_n(t)\|\leqslant\|f(t)\|\left(1+n^{-1}\right);\\ 0, & \text{при}\quad \|h_n(t)\|>\|f(t)\|\left(1+n^{-1}\right).\end{cases}$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to+\infty}\|f(t)-w_n(t)\|=0$$

μ–почти всюду на отрезке $[0, T]$. Кроме того,

$$\|f(t) - w_n(t)\| \leqslant 2\|f(t)\| \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Теперь в силу μ–интегрируемости функции $\|f(t)\|$ можно воспользоваться теоремой Лебега и доказать, что

$$\int\limits_0^T \|f(t) - w_n(t)\| \, \mu(dt) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим еще некоторые свойства интеграла Бохнера. Во-первых, интеграл Бохнера обладает свойством линейности.

Лемма 3. *Пусть функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ интегрируемы по Бохнеру, тогда для любых постоянных $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^1$ имеет место следующее равенство*:

$$\int\limits_0^T [\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] \, \mu(dt) = \alpha_1 \int\limits_0^T f_1(t) \, \mu(dt) + \alpha_2 \int\limits_0^T f_2(t) \, \mu(dt).$$

Доказательство.

Для доказательства этого утверждения достаточно взять соответствующие аппроксимирующие последовательности и перейти к пределу, поскольку для простых функций это равенство, очевидно, имеет место.

Лемма доказана.

Кроме того, имеет место важное в приложениях неравенство.

Лемма 4. *Пусть функция $f(t)$ является μ–интегрируемой по Бохнеру на отрезке $[0, T]$, тогда имеет место следующее неравенство*:

$$\left\| \int\limits_0^T f(t) \, \mu(dt) \right\| \leqslant \int\limits_0^T \|f(t)\| \, \mu(dt).$$

Доказательство.

Надо взять аппроксимирующую последовательность простых функций $\{h_n(t)\}$, для которых указанное неравенство имеет место, а затем перейти к пределу при $n \to +\infty$ и получить требуемое неравенство. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\| \int\limits_0^T f(t) \, \mu(dt) \right\| \leqslant \left\| \int\limits_0^T f(t) \, \mu(dt) - \int\limits_0^T h_n(t) \, \mu(dt) \right\| + \left\| \int\limits_0^T h_n(t) \, \mu(dt) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_0^T f(t)\,\mu(dt) - \int_0^T h_n(t)\,\mu(dt) \right\| + \int_0^T \|h_n(t)\|\,\mu(dt) \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_0^T f(t)\,\mu(dt) - \int_0^T h_n(t)\,\mu(dt) \right\| + \int_0^T \|f(t) - h_n(t)\|\,\mu(dt) + \int_0^T \|f(t)\|\,\mu(dt).$$

Теперь надо перейти к пределу при $n \to +\infty$, воспользовавшись определением 3.

Лемма доказана.

Наконец, справедлива следующая важная лемма.

Лемма 5. *Пусть функция $f(t)$ интегрируема по Бохнеру на отрезке $[0, T]$, тогда функция $u(t)$, определенная формулой*

$$u(t) := \int_{t_0}^{t} f(s)\mu(ds), \tag{3.2}$$

является сильно дифференцируемой для почти всех $t \in [0, T]$.

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть $\{h_n(t)\}$ — это последовательность простых функций из определения 3, причем без ограничения общности можно предположить, что имеет место следующее неравенство (сравни с теоремой 2):

$$\|h_n(t)\| \leqslant \|f(t)\| \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

В силу определения 3

$$h_n(t) \to f(t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}$$

μ–почти всюду на отрезке $[0, T]$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mu(ds) - f(t_0) = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} [f(s) - h_n(s)]\,\mu(ds) +$$

$$+ \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} h_n(s)\,\mu(ds) - f(t_0).$$

Отсюда получаем следующую цепочку неравенств:

$$\left\| \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mu(ds) - f(t_0) \right\| \leqslant \frac{1}{|t - t_0|} \int_{t_0}^{t} \|f(s) - h_n(s)\|\,\mu(ds) +$$

$$+\left\|\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} h_n(s)\,\mu(ds)-h_n(t_0)\right\|+\|h_n(t_0)-f(t_0)\|:=$$

$$=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3. \quad (3.3)$$

Шаг 2. Прежде всего отметим, что в силу того, что $h_n(t)$ — это простая функция, то выражение I_2 равно нулю μ–почти всюду на отрезке $[0,T]$ при достаточно малой длине отрезка $|t-t_0|$.

Выражение для I_1 в пределе при $t\to t_0$ дает следующее предельное равенство:

$$\lim_{t\to t_0}\mathrm{I}_1=\|h_n(t_0)-f(t_0)\|$$

μ–почти всюду на отрезке $[0,T]$. Таким образом, из (3.3) получим в пределе при $t\to t_0$ следующее неравенство:

$$\lim_{t\to t_0}\left\|\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} f(s)\,\mu(ds)-f(t_0)\right\|\leqslant 2\,\|h_n(t_0)-f(t_0)\| \qquad (3.4)$$

μ–почти всюду на отрезке $[0,T]$.

Шаг 3. Теперь достаточно перейти к пределу при $n\to+\infty$ и получить из неравенства (3.4) следующее равенство:

$$\lim_{t\to t_0}\left\|\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} f(s)\,\mu(ds)-f(t_0)\right\|=0$$

μ–почти всюду на отрезке $[0,T]$.

Лемма доказана.

Имеет место такое утверждение.

Лемма 6. *Пусть $f(t)$ функция, интегрируемая по Бохнеру. Тогда для каждого $f^*\in\mathbb{B}^*$ имеет место следующее равенство*:

$$\left\langle f^*,\int\limits_0^T f(t)\,\mu(dt)\right\rangle=\int\limits_0^T\langle f^*,f(t)\rangle\;\mu(dt). \qquad (3.5)$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{h_n(t)\}$ — это последовательность простых функций из определения 3 для функции $f(t)$. Для каждой функции из этой последовательности выполнено доказываемое равенство (3.5):

$$\left\langle f^*,\int\limits_0^T h_n(t)\,\mu(dt)\right\rangle=\int\limits_0^T\langle f^*,h_n(t)\rangle\;\mu(dt).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\left\langle f^*, \int\limits_0^T f(t)\,\mu(dt) \right\rangle = \left\langle f^*, \int\limits_0^T [f(t) - h_n(t)]\;\mu(dt) \right\rangle + \\ + \left\langle f^*, \int\limits_0^T h_n(t)\,\mu(dt) \right\rangle = \left\langle f^*, \int\limits_0^T [f(t) - h_n(t)]\;\mu(dt) \right\rangle + \\ + \int\limits_0^T \langle f^*, h_n(t)\rangle\;\mu(dt) = \left\langle f^*, \int\limits_0^T [f(t) - h_n(t)]\;\mu(dt) \right\rangle + \\ + \int\limits_0^T \langle f^*, h_n(t) - f(t)\rangle\;\mu(dt) + \int\limits_0^T \langle f^*, f(t)\rangle\;\mu(dt). \quad (3.6)$$

Шаг 2. Справедливы следующие оценки:

$$\left| \left\langle f^*, \int\limits_0^T [f(t) - h_n(t)]\;\mu(dt) \right\rangle \right| \leqslant \|f^*\|_* \left\| \int\limits_0^T [f(t) - h_n(t)]\;\mu(dt) \right\| \leqslant \\ \leqslant \|f^*\|_* \int\limits_0^T \|f(t) - h_n(t)\|\,\mu(dt) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

$$\left| \int\limits_0^T \langle f^*, h_n(t) - f(t)\rangle\;\mu(dt) \right| \leqslant \int\limits_0^T |\langle f^*, h_n(t) - f(t)\rangle|\;\mu(dt) \leqslant \\ \leqslant \|f^*\|_* \int\limits_0^T \|h_n(t) - f(t)\|\,\mu(dt) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

С учетом этих оценок из (3.6) переходом к пределу при $n \to +\infty$ приходим к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть*

$$u(t) := \int\limits_{t_0}^t f(s)\,\mu(ds) \quad t_0, t \in [0, T].$$

Тогда если $f(t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{B})$, *то* $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; \mathbb{B})$.

Доказательство.

Из леммы 5 вытекает, что функция $u(t)$ μ–почти всюду на отрезке $[0, T]$ сильно дифференцируема, причем $u'(t) = f(t)$. Но поскольку

$f(t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$, то после изменения на множестве из $[0,T]$ нулевой меры Лебега μ получим, что $u^{'}(t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$.

Теорема доказана.