# ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Профессор А.Н.Боголюбов

## ЧТО ТАКОЕ МОДЕЛЬ?

Моделирование не является единственным методом изучения окружающего мира. Существует целая область знания - **методология,** которая специально занимается изучением методов познания.

**Из всеобщих методов в истории познания известны два: диалектический и метафизический. Это общефилософские методы.** С середины XIX века метафизический метод начал все больше вытесняться из естествознания диалектическим методом.

**Классификация общенаучных методов тесно связана с понятием уровней научного познания. Различают два уровня научного познания: эмпирический и теоретический.** Одни общенаучные методы применяются только на эмпирическом уровне (наблюдение, эксперимент, измерение), другие – только на теоретическом (идеализация, формализация).

**Но есть общенаучные методы, которые используются как на эмпирическом уровне, так и на теоретическом. Таким общенаучным методом является моделирование.**

**Моделирование – метод познания окружающего мира, который можно отнести к общенаучным методам, применяемым как на эмпирическом, так и на теоретическом уровне познания. При построении и исследовании модели могут применяться практически все остальные методы познания.**

**Под моделью понимается такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты. Процесс построения и использования модели называется моделированием.**

**Другими словами, модель – это объект-заменитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых интересующих исследователя свойств оригинала.**

Любая модель нетождественна объекту-оригиналу, поскольку при ее построении исследователь учитывал лишь важнейшие с его точки зрения факторы. В этом отношении **любая модель является неполной.** «Полная» модель, очевидно, будет полностью тождественна оригиналу (Норберт Винер: наилучшей моделью кота является другой кот, а еще лучше – тот же самый кот).

Если результаты моделирования удовлетворяют исследователя и могут служить основой для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта, то говорят, что **модель адекватна** объекту. Адекватность модели зависит от целей моделирования и принятых критериев. Идеально адекватная модель принципиально невозможна в силу неполноты модели.

**Использование моделирования на эмпирическом и теоретическом уровнях исследования приводит к делению (условному) моделей на материальные и идеальные.**

**Материальное моделирование** – это моделирование, при котором исследование объекта происходит с использованием его материального аналога воспроизводящего основные физические, геометрические, динамические и функциональные характеристики данного объекта.

**Основными разновидностями материального моделирования является натурное и аналоговое.**

**Натурное моделирование** – это такое моделирование, при котором реальному объекту ставится в соответствие его увеличенный или уменьшенный материальный аналог, допускающий исследование с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия.

**Аналоговое моделирование** – это моделирование, основанное на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (одними и теми же математическими соотношениями, логическими и структурными схемами).

Фактически процесс исследования моделей данного типа сводится к проведению ряда натурных экспериментов, где вместо реального объекта используется его физическая или аналоговая модель.

**К примерам натурного моделирования можно отнести макеты в архитектуре, модели судов в судостроении.** Следует отметить, что именно с натурных моделей судов в середине XIX века моделирование стало развиваться как научная дисциплина, а сами модели – активно использовался при проектировании новых технических устройств. Середина XIX века связана в судостроении с окончанием эпохи парусных судов и началом эпохи парового флота. Оказалось, что использование паровых машин требует принципиального изменения конструкции судов.

В первую очередь это осознали строители военных кораблей. Как известно, в условиях морского сражения время жизни судна зависит главным образом от его маневренности и скорости. Для парусных судов в результате многовекового опыта были выработаны оптимальные сочетания формы корпуса и парусов. Для кораблей с паровой машиной скорость определяется в значительной степени мощностью паровой машины. В тот период тепло для машин получали от сжигания угля в топках котлов.

Поэтому чем выше требуемая мощность машины, тем большее число котлов необходимо использовать и иметь на судне больший запас угля. Все это утяжеляло судно и снижало его скорость, сводя к нулевому эффекту увеличение мощности машины.

Учитывая, что строительство одного крейсера занимало несколько лет, а его стоимость была весьма значительной, можно понять стремление судостроителей найти более быстрый и дешевый по сравнению с традиционным методом проб и ошибок способ поиска оптимальных параметров судна. Выход был найден в моделировании. Протягивая в бассейне небольшие модели будущих судов и измеряя силу сопротивления, конструкторы нашли рациональные решения, как по форме корпуса судна, так и по мощности силовой установки. В настоящее время методы натурного моделирования находят самое широкое применение в судостроении, авиастроении, автомобилестроении, ракетостроении и других областях. Например, при разработке нового самолета большое значение имеют эксперименты с натурными моделями, испытываемыми в аэродинамической трубе.

Проведенные исследования позволяют изучить особенности обтекания фюзеляжа воздушными потоками, найти наиболее рациональную форму корпуса и отдельных узлов. Натурные модели используются и при исследовании причин крупных аварий и катастроф. Активно применяются натурные модели в сочетании с другими методами моделирования (например, компьютерного) при съемке кинофильмов. Так, на съемках американского фильма «Титаник» для сцен гибели корабля было использовано более десяти моделей судов.

**В основу аналогового моделирования положено совпадение математических описаний различных объектов.** Примерами аналоговых моделей могут служить электрические и механические колебания, которые с точки зрения математики описываются одинаковыми соотношениями, но относятся к качественно отличающимся физическим процессам. Поэтому изучение механических колебаний можно вести с помощью электрической схемы, и наоборот.

При некоторых допущениях аналогичными можно считать процессы распространения тепла в теле, диффузии примесей и просачивания жидкости.

К числу интересных примера можно отнести известную в теории упругости аналогию Прандтля, который показал, что уравнения для функции напряжений (по которой простым дифференцированием по координатам определяются компоненты тензора напряжений) в задаче о кручении стержня произвольного поперечного сечения идентичны уравнениям, определяющим прогиб нерастяжимой мембраны, натянуто на упругий контур той же формы, под действием равномерного давления. Это позволит заменить отнюдь не простые эксперименты по определению компонент тензора напряжений в скручиваемом стержне простыми измерениями прогиба мембраны.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*Математическое моделирование – третий путь познания.*

*А.Н.Тихонов*

**Математическое моделирование** – это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов.

В настоящее время математическое моделирование это один из самых результативных и наиболее часто применяемых методов научного исследования. Фактически все современные разделы физики посвящены построению и исследованию математических моделей различных физических объектов и явлений.

Так физики - «ядерщики» до проведения экспериментов выполняют серьезные исследования с применением математических моделей.

При этом на основании теоретического моделирования разрабатывается и уточняется методика натурных экспериментов, выясняется, какие эффекты, где и когда следует ожидать, когда и что регистрировать. Такой подход позволяет значительно снизить затраты на проведение эксперимента, повысить его эффективность.

Как правило значительные успехи в биологии и химии в последнее время были связаны с разработкой и исследованием математических моделей для биологических систем и химических процессов.

Идут активные работы по созданию математических моделей в экологии, экономике и социологии.

Огромную роль играет использование математических моделей в медицине и промышленности.

Появилась возможность на научной, то есть логически обоснованной основе подходить ко многим экологическим и медицинским проблемам: имплантации и замене различных органов, прогнозирование развития эпидемий, обоснования планов ликвидации последствий крупных аварий и катастроф.

**Очень часто методы математического моделирования являются единственно возможными.**

**Приведем два примера.**

Всестороннее математическое моделирование и «проигрывание» различных вариантов на ЭВМ позволило в кратчайшие сроки обоснованно спланировать и преступить к реализации плана ликвидации последствий Чернобыльской катастрофы.

Уникальные результаты были получены по проекту «Гея», связанному с математическим моделированием последствий ядерной войны. Было показано, что в результате сильного запыления атмосферы возможно значительное глобальное похолодание («ядерная зима») и связанное с этим практическое вымирание всего живого.

**По сравнению с натурным моделированием математическое моделирование имеет следующие преимущества:**

1)экономичность (в частности, сбережение ресурсов реальной системы);

2)возможность моделирования гипотетических, то есть не реализуемых в природе объектов (прежде всего на разных этапах проектирования);

3)возможность реализации режимов опасных или трудновоспроизводимых в натуре (критический режим ядерного реактора, работа системы противоракетной обороны);

4)возможность изменения масштабов времени; простота многоаспектного анализа;

5)большая прогностическая сила вследствие возможности выявления общих закономерностей;

6)универсальность технического и программного обеспечения проводимой работы (ЭВМ, системы программирования и пакеты прикладных программ широкого назначения).

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук: слово «алгоритм» происходит от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми (аль Хорезми Абу Абдала Мухамед бен Мусса аль Маджуси, 787 г. – ок. 850 г.).

Второе рождение математического моделирования пришлось на конец 40-х – начало 50-х годов XX века и было обусловлено в основном двумя причинами.

Первая из них – появление первых компьютеров. Вторая – социальный заказ – выполнение национальных программ СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита, который не мог быть выполнен традиционными методами.

Математическое моделирование блестяще справилось с этой задачей: ядерные взрывы и полеты ракет и спутников были предварительно осуществлены в недрах ЭВМ с помощью математических моделей и лишь затем претворены на практике.

Сейчас математическое моделирование вступает в третий принципиально важный этап своего развития, встраиваясь в структуру информационного общества. «Сырая информация» обычно мало что дает для анализа и прогноза, для принятия решений и контроля за их исполнением. Нужны надежные способы переработки информационного сырья в готовый продукт – точные знания.

# Основные этапы метода математического моделирования

## 1. Создание качественной модели

**На данном этапе математического моделирования выясняется характер законов и связей, действующих в системе.** В зависимости от природы модели эти законы могут быть физическими, химическими, биологическими, экономическими.

**Задача моделирования-выявить главные, характерные черты явления или процесса, его определяющие особенности.**

**Применительно к исследованию физических явлений создание качественной модели – это формулировка физических закономерностей явления или процесса на основании эксперимента.**

## 2. Создание математической модели - постановка математической задачи

**Если модель описывается некоторыми уравнениями, то она называется детерминированной.** Начально-краевые и краевые задачи математической физики являются примерами детерминированных дифференциальных моделей.

**Если модель описывается вероятностными законами, то она называется стохастической.**

**1) Выделение существенных факторов**

**Основной принцип: если в системе действует несколько факторов одного порядка, то все они должны быть учтены, или отброшены.**

**2) Выделение дополнительных условий (начальных, граничных, условий сопряжения и т.п.)**

## 3. Изучение математической модели

1) **Математическое обоснование модели**. Исследование внутренней непротиворечивости модели. Обоснование корректности дифференциальной модели. Доказательство теорем существования, единственности и устойчивости решения.

2) **Качественное исследование модели.** Выяснение поведения модели в крайних и предельных ситуациях.

3) **Численное исследование модели.**

а) Разработка алгоритма.

б) Разработка численных методов исследования модели.

**Разрабатываемые методы должны быть достаточно общими, алгоритмичными и допускающими возможность распараллеливания.**

в) Создание и реализация программы. Компьютерный эксперимент.

По сравнению с лабораторным (натурным) экспериментом компьютерный эксперимент дешевле, безопасней, может проводиться в тех случаях, когда натурный эксперимент принципиально невозможен.

| Лабораторный эксперимент | Компьютерный эксперимент |
|---|---|
| Образец | Математическая модель |
| Физический прибор | Программа |
| Калибровка | Тестирование программы |
| Измерения | Расчеты |
| Анализ данных | Анализ данных |

## 4. Получение результатов и их интерпретация

**Сопоставление полученных данных с результатами качественного анализа, натурного эксперимента и данными, полученными с помощью других численных алгоритмов. Уточнение и модификация модели и методов её исследования.**

## 5. Использование полученных результатов

**Предсказание новых явлений и закономерностей.** Предсказание Полем Дираком открытия античастиц на основе исследования построенной им модели квантовой теории поля.

# Прямые и обратные задачи математического моделирования

1. **Прямые задачи математического моделирования**: все параметры исследуемой задачи известны и изучается поведение модели в различных условиях.

2. **Обратные задачи математического моделирования подразделяются на следующие основные группы**:

**а) Задачи распознавания**: определение параметров модели путем сопоставления наблюдаемых данных и результатов моделирования. По результатам наблюдений пытаются выяснить, какие процессы управляют поведением объекта и находят определяющие параметры модели. В обратной задаче распознавания требуется определить значение параметров модели по известному поведению системы как целого.

**В задачах распознавания необходимым элементом является требование единственности решения соответствующей математической задачи.**

## Типичные примеры обратных задач распознавания

**1. Задача электроразведки**. Для изучения неоднородностей земной коры в целях разведки полезных ископаемых широко применяются электрические методы. Основная схема электроразведки постоянных током заключается в следующем. При помощи заземленных электродов в землю пропускается ток от питающей батареи. На поверхности земли измеряется напряжение созданного таким образом поля постоянного тока. При помощи измерений на поверхности определяют подземную структуру. Методы определения подземных структур (интерпретация наблюдений) основывается на математическом решении соответствующих задач.

**2. Задача магнитной дефектоскопии.** Для определения дефекта (наличие пустот) металлическую деталь помещают между полюсами магнита и измеряют магнитное поле на ее поверхности. По возмущениям магнитного поля требуется определить наличие дефекта, а также, его размеры, глубину залегания и т.д.

б) **Задачи синтеза (задачи математического проектирования):** построение математических моделей систем и устройств, которые должны обладать заданными техническими характеристиками. **В отличие от задач распознавания в задачах синтеза отсутствует требование единственности решения («веер решений»).** Отсутствие единственности решения позволяет выбрать технологически наиболее приемлемый результат.

**Примеры задач синтеза: а) Синтез диаграммы направленности антенны:** определение распределения токов, создающих заданную диаграмму направленности антенны. **б) Синтез градиентных световодов:** определение профиля функции диэлектрической проницаемости, при котором световод обладает заданными характеристиками.

**3. Задача проектирования управляющих систем**: особая область математического моделирования, связанная с автоматизированными информационными системами и автоматизированными системами управления.

## Универсальность математических моделей. Принцип аналогий

Универсальность математических моделей есть отражение принципа материального единства мира. Математическая модель должна описывать не только конкретные отдельные явления или объекты, но достаточно широкий круг разнородных явлений и объектов.

Как уже отмечалось, аналоговое моделирование – это моделирование, основанное на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально, например, одними и теми же математическими соотношениями, логическими и структурными схемами.

**В этом отношении одним из весьма плодотворным подходом к моделированию сложных объектов является использование аналогий с уже изученными явлениями.**

В качестве примера рассмотрим процессы колебаний в объектах различной природы.

1. Колебательный электрический контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности.

Введем следующие обозначения: $q(t)$ –заряд на обкладках конденсатора, $u(t)$ –напряжение на обкладках конденсатора, $C$ – ёмкость конденсатора, $L$ – индуктивность катушки, $E$ – э.д.с. самоиндукции, $i$ – ток.

Будем предполагать, что сопротивление проводов равно нулю.

Получаем цепочку очевидных формул

$$Cu(t) = q(t), E = -L\frac{di}{dt}, i = -\frac{dq}{dt}, u(t) = -E(t) \rightarrow CL\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -q,$$

которая приводит к **уравнению колебаний**

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{CL} q = 0$$

## 2. Малые колебания при взаимодействии двух биологических популяций.

Пусть на некоторой территории, например, на острове живут две популяции: растительноядная (овцы) и плотоядная (волки). $N(t)$-численность растительноядной популяции 1; $M(t)$- численность плотоядной популяции 2. Считаем, что убыль овец пропорциональна произведению $MN$ и определяется только поеданием их волками, а естественный прирост пропорционален $N$. Для второй популяции естественная убыль пропорциональна $M$, а прирост пропорционален $MN$. В результате приходим к следующей нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = (a_1 - b_1 M)N, \ a_1 > 0, \ b_1 > 0, \\ \dfrac{dM}{dt} = (-a_2 + b_2 N)M, \ a_2 > 0, \ b_2 > 0. \end{cases}$$

Система находится в равновесии, если выполнено условие $\frac{dN}{dt}=\frac{dM}{dt}=0$, откуда следует, что равновесные значения величин $N, M$ равны

$$M_0=\frac{a_1}{b_1},\quad N_0=\frac{a_2}{b_2}.$$

Проведем линеаризацию системы, полагая

$$n=N-N_0,\quad m=M-M_0,\quad |n|\ll|N|,\quad |m|\ll|M|.$$

Линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{dn}{dt}=-b_1N_0m,\\[2ex] \dfrac{dm}{dt}=b_2M_0n.\end{cases}$$

Отсюда снова получаем уравнение колебаний

$$\frac{d^2n}{dt^2}+a_1a_2n=0.$$

Рассмотрим более подробно процесс линеаризации.

$$N = N_0 + n, \;\; M = M_0 + m \;\Rightarrow\; \frac{d\left(N_0 + n\right)}{dt} = \left(a_1 - b_1\left(M_0 + m\right)\right)\left(N_0 + n\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dN_0}{dt} + \frac{dn}{dt} = a_1 N_0 + a_1 n - b_1 M_0 N_0 - b_1 N_0 m - b_1 M_0 n - b_1 mn$$

$$N_0 = \frac{a_2}{b_2};\; M_0 = \frac{a_1}{b_1};\; \frac{dN_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{a_2}{b_2}\right);\; b_1 M_0 N_0 = \frac{a_1 a_2}{b_2};\; b_1 N_0 m = \frac{a_2 b_1}{b_2} m;\; b_1 M_0 n = \frac{a_1 b_1}{b_1} n$$

$$mn \ll 1 \;\Rightarrow\; \frac{dn}{dt} = a_1 N_0 + a_1 n - \frac{a_1 a_2}{b_2} - b_1 \frac{a_2}{b_2} m - a_1 n =$$

$$= \frac{a_1 a_2}{b_2} + a_1 n - \frac{a_1 a_2}{b_2} - b_1 N_0 m - a_1 n = - \;\Rightarrow\; \frac{dn}{dt} = -b_1 N_0 m$$

Аналогично получаем:

$$\frac{d\left(M_0+m\right)}{dt}=\left(-a_2+b_2\left(N_0+n\right)\right)\left(M_0+m\right)=-a_2M_0-a_2m+b_2M_0N_0+b_2N_0m+$$

$$+b_2M_0n+b_2mn;\quad mn\ll 1\ \Rightarrow$$

$$N_0=\frac{a_2}{b_2};\ M_0=\frac{a_1}{b_1}\ \Rightarrow\ \frac{dM_0}{dt}=0\ \Rightarrow\ \frac{dm}{dt}=-\frac{a_1a_2}{b_1}-a_2m+\frac{a_1a_2}{b_1}+a_2m+b_2M_0n=b_2M_0n\Rightarrow$$

$$\frac{dm}{dt}=b_2M_0n$$

**3.** Простейшая модель изменения зарплаты и занятости: $p(t)$ – зарплата, $N(t)$ – число занятых работников. Равновесие рынка труда: за плату $p_0 > 0$ согласны работать $N_0 > 0$ человек.

Предполагается, что

а) работодатель изменяет зарплату пропорционально отклонению численности занятых работников от равновесного $N_0$;

б) численность работников изменяется пропорционально изменению зарплаты относительно $p_0$.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -a_1(N - N_0), \ a_1 > 0, \\ \dfrac{dN}{dt} = a_2(p - p_0), \ a_2 > 0. \end{cases}$$

Отсюда снова получаем уравнение колебаний:

$$\frac{d^2(p - p_0)}{dt^2} + a_1 a_2 (p - p_0) = 0.$$

Вывод уравнения:

$$\frac{dp_0}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dp_0}{dt} = \frac{d\left(p - p_0\right)}{dt};$$

$$\frac{dN_0}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d\left(N - N_0\right)}{dt} = \frac{dN}{dt} \;\Rightarrow$$

$$\frac{d\left(p - p_0\right)}{dt} = -a_1\left(N - N_0\right) \;\Rightarrow\; \frac{d^2\left(p - p_0\right)}{dt^2} = -a_1\frac{d\left(N - N_0\right)}{dt} = -a_1\frac{dN}{dt} = -a_1 a_2\left(p - p_0\right) \;\Rightarrow$$

$$\frac{d^2\left(p - p_0\right)}{dt^2} + a_1 a_2\left(p - p_0\right) = 0$$

**Вывод**. Построенные в пунктах 1-3 модели в одних случаях основаны **на точно известных законах** (задача 1 о колебательном контуре), в других – **на наблюдаемых фактах** (задача 2 о двух популяциях), в третьих – **на правдоподобных представлениях о характере объекта** (задача 3 о простейшей модели заработной платы).

Хотя и сущность рассматриваемых явлений, и подходы к получению описывающих их моделей совершенно различны, построенные модели оказались идентичными друг другу.

**Это свидетельствует о важнейшем свойстве математических моделей – их универсальности.**

Свойство универсальности математических моделей широко используется при изучении объектов самой разнообразной природы.

# Иерархия моделей

Принцип «от простого к сложному»: построение цепочки (иерархии) все более полных моделей, каждая их которых обобщает предыдущую, включая её в качестве составного случая.

**Модель многоступенчатой ракеты.** Пренебрегаем сопротивлением воздуха, гравитацией.

**а) Одноступенчатая ракета.** $u$=3-5 км/с – скорость истечения продуктов сгорания топлива (относительно Земли), $V(t)$ – скорость ракеты (относительно Земли); $m(t)$ – масса; закон сохранения импульса:

$$m(t)V(t) = m(t+dt)V(t+dt) - dm(V(t+\theta dt) - u),\ 0<\theta<1.$$

Линеаризация:

$$m(t+dt) = m(t) + \frac{dm}{dt}dt + O(dt^2) \ \rightarrow\ m\frac{dV}{dt} = -\frac{dm}{dt}u \ \rightarrow\ \frac{dV}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt} \ \rightarrow$$

$$V(t) = V_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right),\ \ V_0 = V(0),\ m_0 = m(0).$$

Подробный вывод формул.

$$m(t+dt)=m(t)+\frac{dm}{dt}dt+\underline{\underline{O}}(dt^2)\Rightarrow$$

$$m(t)V(t)=m(t)V(t+dt)+\frac{dm}{dt}dtV(t+dt)+\underline{\underline{O}}(dt^2)-dm\big(V(t+dt)-u\big)$$

$$\frac{V(t+dt)-V(t)}{dt}=-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}V(t+dt)+\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}V(t+dt)-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}u\Rightarrow$$

$$dt\to 0\quad\Rightarrow\quad\frac{dV}{dt}=-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}u\quad\Rightarrow\quad\frac{dV}{dt}=-u\frac{d(\ln m)}{dt}\quad\Rightarrow$$

$$\int_0^t\frac{dV}{dt}dt=-u\int_0^t\frac{d(\ln m)}{dt}dt\quad\Rightarrow\quad V(t)-V(0)=-u\big(\ln m(t)-\ln m(0)\big)\quad\Rightarrow$$

$$V(t)=V_0+u\ln\frac{m_0}{m(t)},$$ где $$V_0=V(0),\quad m_0=m(0).$$

Максимальная скорость при полном сгорании топлива и нулевой начальной скорости $V_0 = 0$ (формула Циолковского):

$$V = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right).$$

Здесь $m_p$ – полезная масса (масса спутника), $m_s$ – структурная масса (топливных баков, двигателей, систем управления ракетой т.д.). Введем параметр $\lambda = \frac{m_s}{m_0 - m_p}$. Обычное значение $\lambda$ = 0.1. При этом получается, что при $u$=3 км/с и $m_p = 0$ скорость $V$=7 км/с.

Одноступенчатая ракета не сможет поднять полезный груз!

**б) Многоступенчатая ракета**: основная идея – избавление от балласта. $m_i$ – общая масса i-ой ступени; $\lambda m_i$ – структурная масса i- ой ступени; $(1-\lambda)m_i$ – масса топлива i - ой ступени. Считаем, что $\lambda$ и $u$ одинаковы для всех ступеней. Пусть $n = 3$; $m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$.

По формуле Циолковского скорость равна:

$$V_1 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right).$$

После отброса структурной массы $\lambda m_1$ включается вторая ступень. Масса ракеты в этот момент $m_p + m_2 + m_3$. После выгорания топлива второй ступени скорость равна

$$V_2 = V_1 + u \ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right),$$

а после отброса структурной массы $\lambda m_2$ и включения двигателя третьей ступени равна

При $n = 3$ получим $V_3 = V_2 + u \ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right).$

$$\frac{V_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{a_1}{1+\lambda(a_1-1)}\right)\left(\frac{a_2}{1+\lambda(a_2-1)}\right)\left(\frac{a_3}{1+\lambda(a_3-1)}\right)\right\} = f(a_1, a_2, a_3),$$

где

$$a_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3},\ a_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3},\ a_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p}.$$

В самом деле из предыдущих формул мы получаем:

$$V_3 = V_2 + u\ln\left(\frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3}\right),\quad V_2 = V_1 + u\ln\left(\frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3}\right),\quad V_1 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{V_3}{u} = \ln\left(\frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3}\right) + \ln\left(\frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3}\right) + \ln\left(\frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3}\right) =$$

$$= \ln(\left(\frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3}\right)\left(\frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3}\right)\left(\frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3}\right)) =$$

$$= \ln\left(\left(\frac{\dfrac{m_0}{m_p+m_2+m_3}}{1+\lambda\dfrac{m_1}{m_p+m_2+m_3}}\right)\left(\frac{\dfrac{m_p+m_2+m_3}{m_p+m_3}}{1+\lambda\dfrac{m_2}{m_p+m_3}}\right)\left(\frac{\dfrac{m_p+m_3}{m_p}}{1+\lambda\dfrac{m_3}{m_p}}\right)\right)$$

Введем следующие обозначения:

$$a_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3} = \frac{m_p + m_1 + m_2 + m_3}{m_p + m_2 + m_3} \Rightarrow a_1 - 1 = \frac{m_1}{m_p + m_2 + m_3};$$

$$a_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3} \Rightarrow a_2 - 1 = \frac{m_2}{m_p + m_3};$$

$$a_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p} \Rightarrow a_3 - 1 = \frac{m_3}{m_p} \Rightarrow$$

$$\frac{V_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{a_1}{1+\lambda(a_1-1)}\right)\left(\frac{a_2}{1+\lambda(a_2-1)}\right)\left(\frac{a_3}{1+\lambda(a_3-1)}\right)\right\} = f(a_1, a_2, a_3),$$

Максимум функцией $f\left(a_1, a_2, a_3\right)$ достигается в симметричном случае при $a_1 = a_2 = a_3 = a.$ Для $n$=3 получим:

$$\frac{V_3}{u} = \ln\left(\frac{a}{1+\lambda\left(a-1\right)}\right)^3 = -3\ln\frac{1+\lambda a-\lambda}{a} \Rightarrow \frac{1-\lambda+a\lambda}{a} = e^{\frac{-V_3}{3u}} = P \Rightarrow$$

$$1-\lambda+\grave{a}\lambda = aP \Rightarrow 1-\lambda = a\left(P-\lambda\right) \Rightarrow a = \frac{1-\lambda}{P-\lambda}$$

Легко проверить, что

$$a_1 a_2 a_3 = a^3 = \frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{p-\lambda}\right)^3.$$

В общем случае для n ступеней имеем:

$$\frac{m_o}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{p-\lambda}\right)^n, \; p = e^{\frac{-V_n}{nu}}.$$

Проанализируем формулу (1). Примем $V_n = 10{,}5$ км/с, $\lambda = 0{,}1$. Тогда для n=2,3,4 получаем:

$$n = 2 \qquad m_0 = 149 m_p$$

$$n = 3 \qquad m_0 = 77 m_p$$

$$n = 4 \qquad m_0 = 65 m_p$$

Двухступенчатая ракета пригодна для вывода на орбиту полезной массы, но при одной тонны полезного груза необходимо иметь ракету весом 149 тонн.

Переход к трехступенчатой ракете уменьшает ее массу почти в два раза, но конечно усложняет ее конструкцию.

Четырехступенчатая ракета не дает заметного выигрыша по сравнению с трехступенчатой.

**Вывод: наиболее выгодна трехступенчатая ракета.**

**Первой космической скоростью** называется наименьшая скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно могло стать искусственным спутником Земли. Она равна скорости искусственного спутника, обращающегося по круговой орбите вокруг Земля в отсутствии сопротивления атмосферы.

**Первая космическая скорость равна у поверхности Земли V=7,9 км/с.**

**Второй космической скоростью** называется наименьшая скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно могло без воздействия каких-либо дополнительных сил преодолеть земное притяжение и превратиться в искусственный спутник Солнца.

**Вторая космическая скорость равна у поверхности Земли V=11,2 км/с.**

**Третьей космической скоростью** называется наименьшая скорость, которую нужно сообщить космическому аппарату, запускаемому с поверхности Земли, для того, тчтобы он преодолел притяжение Солнца и покинул Солнечную систему.

**Третья космическая скорость равна у поверхности Земли V=16,7 км/с.**