Множества и последовательности точек

1. Сформулируйте определение изолированной точки множества $D \subset R^m$.
2. Сформулируйте определение внутренней точки множества D точек пространства R^m.
3. Сформулируйте определение предельной точки множества D точек пространства R^m.
4. Сформулируйте определение связного множества точек пространства R^m.
5. Сформулируйте определение прямой в пространстве R^m.
6. Сформулируйте определение открытого множества точек пространства R^m
7. Сформулируйте определение ограниченной последовательности точек пространства R^m.
8. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности точек пространства R^m.
9. Сформулируйте определение сходящейся последовательности точек пространства R^m.
10. Сформулируйте определение неограниченной последовательности точек пространства R^m.
11. Сформулируйте определение предела последовательности точек пространства R^m.
12. Сформулируйте определение предельной точки последовательности точек пространства R^m.
13. Докажите, что любая внутренняя точка множества является его предельной точкой.
14. Докажите, что любая точка множества точек на плоскости, которая не является внутренней, является его граничной точкой.
15. Докажите, что граничная точка множества является либо предельной точкой, либо изолированной точкой этого множества.
16. Докажите, что объединение любого числа открытых множеств является открытым множеством.
17. Докажите, что любая точка сферы в пространстве R^m является граничной.
18. Пусть точка M_0 не лежит на сфере пространстве R^m. Докажите, что эта точка не является граничной точкой сферы.
19. Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством. Верно ли это для бесконечного количества открытых множеств?
20. Докажите, что сходящаяся последовательность точек пространства R^m является ограниченной.
21. Докажите, что если числовые последовательности x_n и y_n являются сходящимися, то последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является ограниченной.
22. Докажите, что если числовые последовательности x_n и y_n являются сходящимися, то последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является сходящейся.
23. Докажите, что если последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является сходящейся, то числовые последовательности x_n и y_n являются сходящимися.
24. Докажите, что ограниченная последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости имеет по крайней мере одну предельную точку.
25. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности точек пространства R^m. Докажите необходимость.
26. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности точек пространства R^m. Докажите достаточность.
27. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, все точки которого предельные.
28. Найдите все граничные точки множества точек на плоскости $\left\{\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right), n \in N\right\}$.
29. Найдите предел последовательности точек $M_n\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right)$ на плоскости.

Предел функции, её ограниченность и непрерывность

1. Сформулируйте определение ограниченной сверху функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.
2. Сформулируйте определение точной нижней грани функции m переменных на множестве D точек пространства R^m.
3. Сформулируйте определение точной верхней грани функции m переменных на множестве D точек пространства R^m.

4. Сформулируйте определение неограниченной снизу функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.
5. Сформулируйте определение ограниченной снизу функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.
6. Сформулируйте определение неограниченной сверху функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m.
7. Приведите пример неограниченной снизу и неограниченной сверху функции, определённой на множестве $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\right\}$.
8. Приведите пример неограниченной сверху и ограниченной снизу функции, определённой на множестве $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\right\}$.
9. Приведите пример ограниченной сверху и неограниченной снизу функции, определённой на множестве $\left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\right\}$.
10. Приведите пример функции двух переменных, которая непрерывна и ограничена на заданном ограниченном множестве, но не достигает на этом множестве своей точной верхней грани.
11. Приведите пример функции двух переменных, которая непрерывна на заданном ограниченном, но незамкнутом множестве, и является неограниченной на этом множестве.
12. Приведите пример разрывной функции двух переменных, которая непрерывна по каждой переменной в отдельности.
13. Докажите первую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.
14. Докажите вторую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.
15. Сформулируйте определение предела функции $u(M)$ в точке M_0 "по Коши".
16. Сформулируйте определение "по Коши" того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0.
17. Сформулируйте "по Гейне" отрицание того, что число b является пределом функции $u(M)$ точке M_0.
18. Сформулируйте определение "по Гейне" того, что функция $u(M)$ не имеет предела при $M \to \infty$
19. Сформулируйте определение "по Гейне" того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0.
20. Сформулируйте определение "по Коши" того, что функция $u(M)$ не имеет предела при $M \to \infty$.
21. Исследуйте функцию $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ на непрерывность по каждой из
22. Исследуйте функцию $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$ на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в точке $(0,1)$.
23. Докажите теорему о непрерывности суммы двух непрерывных функций нескольких переменных.
24. Докажите теорему о непрерывности произведения двух непрерывных функций нескольких переменных
25. Докажите теорему о прохождении непрерывной функции двух переменных через любое промежуточное значение.
26. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции $f\big(u(x,y)\big)$.
27. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции $f\big(x(t), y(t)\big)$

Дифференцируемость функций.

1. Сформулируйте определение частной производной функции $f(x_1,\dots,x_m)$ по переменной x_k в точке $M(x_1,x_2,\dots,x_m)$.
2. Сформулируйте определение дифференцируемой функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.
3. Сформулируйте определение первого дифференциала функции нескольких переменных.
4. Сформулируйте определение производной по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ для функции $f(x,y,z)$ в точке $M(x_0,y_0,z_0)$.
5. Сформулируйте определение градиента функции $f(x,y,z)$ в данной точке $M(x_0,y_0,z_0)$.

6. Докажите теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.
7. Докажите теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.
8. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцируемости сложной функции $f\left(u(x,y)\right)$.
9. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцируемости сложной функции $f\left(x(t),y(t)\right)$.
10. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2. Докажите, что функция $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ дифференцируема в точке $M=(x_1,x_2)$.
11. Докажите, что производная дифференцируемой в точке $M(x_0,y_0,z_0)$ функции $f(x,y,z)$ по направлению $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ равна скалярному произведению вектора $\vec{l}$ и градиента функции f в точке M.
12. В чем состоит свойство инвариантности формы первого дифференциала?
13. В чем состоит свойство неинвариантности формы дифференциала второго порядка?
14. Сформулируйте определение n раз дифференцируемой функции нескольких переменных в данной точке.
15. Пусть функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(0,0)$. Докажите, что $f(h,h)-f(h,0)-f(0,h)+f(0,0)=\left[f_{xy}(0,0)+\alpha\right]h^2$, где $\alpha\to 0$ - при $h\to 0$.
16. Пусть функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(0,0)$. Докажите, что $f(h,h)-f(h,0)-f(0,h)+f(0,0)=\left[f_{yx}(0,0)+\alpha\right]h^2$, где $\alpha\to 0$ - при $h\to 0$.
17. Найдите смешанную частную производную второго порядка u_{xy} сложной функции $u=f(\xi,\eta,\theta),\quad \xi=xy,\quad \eta=x-y,\quad \theta=x+y$, где f — дважды дифференцируемая функция, x и y — независимые переменные.
18. Найдите вторую смешанную частную производную u_{xy} сложной функции $u=f(\xi,\theta),\quad \xi=x^2+y^2,\quad \theta=x^2-y^2$, где f — дважды дифференцируемая функция, x и y — независимые переменные.
19. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x,y)$ с центром разложения в точке $M_0(x_0,y_0)$.
20. Запишите формулу Тейлора второго порядка с центром разложения в точке $M_0(0,0)$ и с остаточным членом в форме Пеано для функции $u(x,y)=\sqrt{1-x-y}$.
21. Запишите формулу Тейлора второго порядка с центром разложения в точке $M_0(e,e)$ и с остаточным членом в форме Пеано для функции $u=x^y$.
22. Запишите формулу Тейлора третьего порядка с центром разложения в точке $M_0(0,0)$ и с остаточным членом в форме Пеано для функции $u=e^x\sin y$.
23. Запишите формулу Тейлора третьего порядка с центром разложения в точке $M_0(0,0)$ и с остаточным членом в форме Пеано для функции $u=\ln(1+x+y)$.
24. Запишите формулу Тейлора третьего порядка с центром разложения в точке $M_0(x_0,y_0)$ и с остаточным членом в форме Пеано для функции $u(x,y)=x^3-y^2+3xy$.
25. Сформулируйте определение локального экстремума функции нескольких переменных.
26. Докажите теорему о необходимом условии локального экстремума функции нескольких переменных.
27. Докажите теорему о достаточных условиях локального экстремума функции нескольких переменных.
28. Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$. Докажите, что функция $u(x,y)+v(x,y)$ также имеет локальный минимум в указанной точке.

29. Приведите пример функций $u\left(x,y\right)$ и $v\left(x,y\right)$, которые имеют локальный минимум в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$, а функция $u\left(x,y\right)\cdot v(x,y)$ имеет локальный максимум в указанной точке.
30. Приведите пример функций $u\left(x,y\right)$ и $v\left(x,y\right)$, которые имеют локальный минимум в точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$, а функция $u\left(x,y\right)\cdot v(x,y)$ не имеет локального экстремума в указанной точке.
31. Пусть функция $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ имеет локальный экстремум в точке $M(x_1,x_2)$, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, $f(x_1)\neq 0$, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2, $g(x_2)\neq 0$. Докажите, что $f'(x_1)=0$, $g'(x_2)=0$.
32. Пусть функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_1, $f(x_1)>0$, функция $g(x)$ имеет локальный минимум в точке x_2, $g(x_2)>0$. Докажите, что функция $u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ имеет локальный минимум в точке $M(x_1,x_2)$.

Неявные функции

1. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $y=f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y)=0$.
2. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции $y=f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y)=0$.
3. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $z=f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$.
4. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции $z=f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$.
5. Сформулируйте теорему о существовании и дифференцируемости функций $y=f(x)$, $z=g(x)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$
6. Пусть функции $y=u(x),\quad z=v(x)$ заданы системой уравнений $f(x,y,z)=0,\quad g(x,y,z)=0$. Вычислите первый дифференциал функции $u(x)$.
7. Найдите частные производные первого порядка и первый дифференциал дифференцируемой функции $z=z(x,y)$, заданной неявно уравнением $z\cos x+y\cos z+x\cos y=3$.
8. Найдите частные производные первого порядка и первый дифференциал дифференцируемой функции $z=z(x,y)$, заданной неявно уравнением $x^2+zx+z^2+y=0$.
9. Пусть функции $x=f(u,v),\quad y=g(u,v)$ заданы неявно системой уравнений $\begin{cases}F(x,y)=u,\\ G(x,y)=v.\end{cases}$ Найдите $\dfrac{\partial x}{\partial v}$.
10. Пусть функции $x=f(u,v),\quad y=g(u,v)$ заданы неявно системой уравнений $\begin{cases}F(x,y)=u,\\ G(x,y)=v.\end{cases}$ Найдите $\dfrac{\partial x}{\partial v}$.
11. Пусть функции $y=f(x),\quad z=g(x)$ заданы неявно системой уравнений $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$. Найдите $\dfrac{dz}{dx}$.

12. Найдите первые дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений
$$\begin{cases} xu + yv = 1, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$$

Условный экстремум функции (метод Лагранжа)

1. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u\left(x,y\right)$ с условием связи $f\left(x,y\right)=0$ в форме Лагранжа.
2. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u\left(x,y,z\right)$ с условием связи $f\left(x,y,z\right)=0$ в форме Лагранжа.
3. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u\left(x,y,z\right)$ с двумя условиями связи $f\left(x,y,z\right)=0$, $g\left(x,y,z\right)=0$ в форме Лагранжа.
4. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u\left(x,y\right)=x^2y^3$ при условии связи $2x+3y-5=0$ в области $x>0, y>0$.
5. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u\left(x,y\right)=2x+3y$ при условии связи $x^2y^3-1=0$ в области $x>0, y>0$.
6. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u\left(x,y,z\right)=xyz$ при условии связи $x+y+z=3$ в области $x>0, y>0$, $z>0$.
7. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции $u\left(x,y,z\right)=xyz$ при условии связи $x^2+y^2+z^2=3$ в области $x>0, y>0$, $z>0$.