

Глава 2. Некоторые классические задачи математической физики

1. Уравнение Гельмгольца в неограниченной области

1. Физические задачи, приводящие к уравнению $\Delta U + cU = -f(M)$

1) Установившиеся колебания

$$W_{tt} + \beta W_t = a^2 \Delta W + \Phi(x, y, z, t)$$

Рассмотрим гармоническую зависимость от времени $e^{-i\omega t}$:

$$\Phi(x, y, z, t) = F(x, y, z)e^{-i\omega t}$$

$$W(x, y, z, t) = U(x, y, z)e^{-i\omega t}$$

$$(-\omega^2 - i\beta\omega)U = a^2 \Delta U + F(x, y, z)$$

$$\Delta U + k^2 U = -f(x, y, z)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 + i\beta\omega}{a^2}, \quad f(x, y, z) = \frac{1}{a^2} F(x, y, z)$$

Величина k^2 — комплексная, причем $\text{Im } k^2 > 0$. Выберем ту ветвь, где $\text{Im } k > 0$. При временной зависимости $e^{-i\omega t}$ эта ветвь соответствует поглощению.

Рассмотрим одномерное однородное уравнение Гельмгольца

$$U_{xx} + k^2 U = 0.$$

Физический смысл правой плоской волны имеет выражение

$$W(x, t) = e^{i(kx - \omega t)},$$

а левой - выражение

$$W(x, t) = e^{-i(kx + \omega t)}.$$

При $\text{Im } k > 0$ получим затухающие на $\pm\infty$ волны.

2) Стационарный процесс диффузии

Уравнение диффузии имеет вид (D – коэффициент диффузии):

$$U_t = D \cdot \Delta U + cU + F.$$

При $c < 0$ процесс диффузии происходит с распадом молекул диффундирующего газа, а при $c > 0$ – с размножением частиц, что физически означает наличие цепных реакций между частицами и окружающей средой.

В случае стационарного процесса диффузии производная $U_t = 0$ и уравнение имеет вид:

$$\Delta U + CU = -f,$$

где

$$C = \frac{c}{D}, \quad f = \frac{1}{F}.$$

Коэффициент C в уравнении $\Delta U + CU = -f$ может иметь положительное или отрицательное значение. При этом свойства решений уравнения при $C < 0$ резко отличаются от свойств при $C > 0$.

2. Поведение решения на бесконечности при различных C .

Решение уравнения $\Delta U + CU = -f$ можно записать при различных C , используя свойства объемного потенциала.

$$1) \quad c = -\alpha^2 < 0 \tag{1}$$

$$u^\pm(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{\pm \alpha r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q,$$

где $f(M)$ – финитная функция, $\text{supp } f \subset D$.

Теорема 1.

Классическое решение уравнения

$$\Delta u - \varkappa^2 u = -f(M), \quad (2)$$

**равномерно стремящееся к нулю на бесконечности,
единственно.**

Доказательство:

$$u_1(M) \neq u_2(M) \Rightarrow V(M) = u_1(M) - u_2(M) \Rightarrow$$

$\Delta V - \varkappa^2 V = 0$. Так как $V \rightarrow 0$ равномерно,

то $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0: |V(M)| < \varepsilon, r \geq R$

Применим к шару K^r принцип максимума: $|V(M)| < \varepsilon, M \in K^r$.

В силу произвольности ε и r получим, что

$$V(M) \equiv 0 \Rightarrow u_1(M) \equiv u_2(M).$$

Единственное решение, равномерно стремящееся к нулю на бесконечности:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{-\alpha r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q. \quad (3)$$

$$2) \quad c = k^2, \quad k = \bar{k} + i\bar{k}, \quad \bar{k} > 0$$

Единственное решение, равномерно стремящееся к нулю на бесконечности

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{ikr_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q. \quad (4)$$

При временной зависимости $e^{-i\omega t}$ это решение соответствует **расходящейся волне**.

$$3) \quad c = k^2 > 0$$

$$u^\pm(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{\pm ik r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q. \quad (5)$$

Оба решения $u^\pm(M)$ уравнения Гельмгольца

$\Delta u + k^2 u = -f(M)$ **одинаково убывают на бесконечности.**

3. Условия излучения Зоммерфельда

Из двух фундаментальных решений уравнения Гельмгольца

$$v^\pm(M) = \frac{e^{\pm ik r_{M_0M}}}{r_{M_0M}} \quad (6)$$

нужно выбрать решение, соответствующее **расходящейся волне** (временная зависимость $e^{-i\omega t}$).

$$1) M_0 \equiv 0 \Rightarrow r_{M_0 M} = r_M = r$$

$$\frac{dv^\pm}{dr} = \pm ik \frac{e^{\pm ikr}}{r} - \frac{e^{\pm ikr}}{r^2} = \pm ikv^\pm + o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (7)$$

Расходящейся сферической волне соответствует $v^+(M)$,
а **сходящейся** $v^-(M)$.

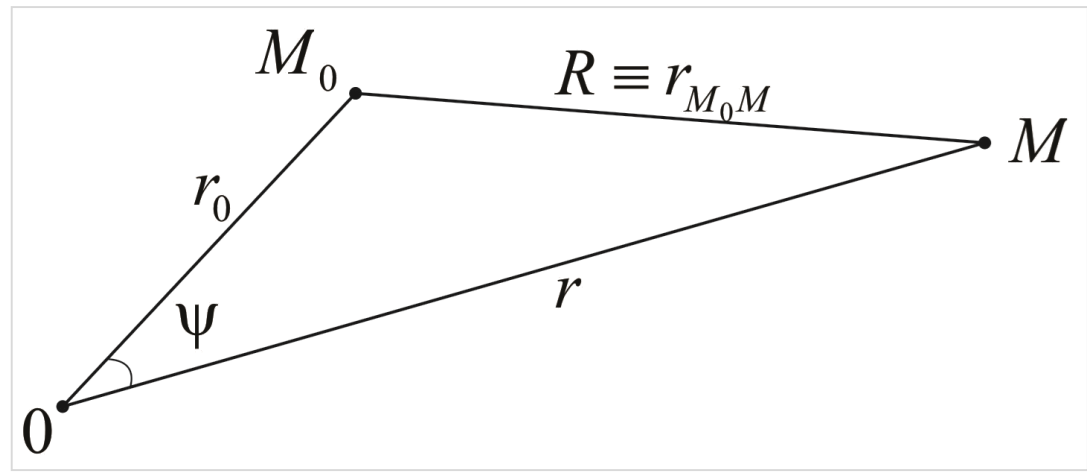
Расходящаяся сферическая волна должна удовлетворять
соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad u = v^+(M)e^{-i\omega t}, \quad (8)$$

а **сходящаяся** - соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad u = v^-(M)e^{-i\omega t}. \quad (9)$$

2) $M_0 \neq 0$



$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{\partial}{\partial R} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial R}{\partial r}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right) \cos \psi \right\}}} = \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right) \cos \psi \right] + \dots \right\} = \frac{1}{r} \left(1 + \underline{\underline{O}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r - r_0 \cos \psi}{R} = 1 + \underline{\underline{O}} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikR}}{R} = ik \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{e^{ikR}}{R^2} \frac{\partial R}{\partial r} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikR}}{R} - ik \frac{e^{ikR}}{R} = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

И в этом случае **расходящиеся сферические волны** удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad u = e^{-i\omega t} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (14)$$

а сходящиеся - соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad u = e^{-i\omega t} \frac{e^{-ikR}}{R}. \quad (15)$$

Замечание 1. В силу специального выбора ядер введенные выше потенциалы удовлетворяют **условиям излучения**

Зоммерфельда:
$$u(M) = \underline{\underline{O}}(1/r), \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (17)$$

Замечание 2. Для **двумерных задач** условия излучения Зоммерфельда имеют вид:

$$u(M) = \underline{\underline{O}}(1/\sqrt{r}), \quad (18)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0. \quad (19)$$

Замечание 3. И.Н. Векуа показал, что **условие (18)** является **следствием условия(19).**

3) Теорема единственности:

Теорема 2.

Классическое решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = -f(M), \quad M \in \mathbb{R}^3, \quad (20)$$

где k – вещественное, удовлетворяющее условиям излучения Зоммерфельда (16), (17), единственно.

Доказательство.

$$u_1(M) \neq u_2(M) \Rightarrow V(M) = u_1(M) - u_2(M) \Rightarrow \Delta V + k^2 V = 0,$$

$$V(M) = \underline{\underline{O}}(1/r), \quad \frac{\partial V}{\partial r} - ikV = \underline{\underline{o}}(1/r).$$

Рассмотрим шар K^R и запишем для точки $M \in K^R$ третью формулу Грина:

$$\begin{aligned}
V(M) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma^R} \left\{ \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \frac{\partial V}{\partial r} - V(P) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) \right\} d\sigma_P = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma^R} \left\{ \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \frac{\partial V}{\partial r} - ikV \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} + ikV \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} - V(P) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) \right\} d\sigma_P = \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\Sigma^R} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - ikV \right) \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} d\sigma_P - \int_{\Sigma^R} V(P) \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) - ik \frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \right) d\sigma_P \right] = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma^R} \left(\frac{e^{ikr_{PM}}}{r_{PM}} \overset{=}{o} \left(\frac{1}{r} \right) - V(P) \overset{=}{o} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma^R} \overset{=}{o} \left(\frac{1}{r^2} \right) d\sigma_P \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$V(M) \equiv 0 \Rightarrow u_1(M) \equiv u_2(M).$$

Следствие. **Единственным решением** уравнения Гельмгольца (20) при **вещественном** $k^2 > 0$, удовлетворяющим условиям излучения Зоммерфельда (16),(17), является интеграл

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{ikr_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q, \quad (21)$$

где $f(M)$ – финитная функция, $\text{supp } f \subset D$.

При временной зависимости $e^{-i\omega t}$ и $\text{Im} k > 0$ функция

$$V(x, t) = U(x) \cdot e^{-i\omega t}$$

представляет собой расходящуюся волну, убывающую на бесконечности.

4. Принцип предельного поглощения

Пусть $f(M)$ – финитная функция, $\text{supp } f \subset D$.

Единственное решение уравнения Гельмгольца с

КОМПЛЕКСНЫМ коэффициентом $k = \bar{k} + i\bar{k}$, $\bar{k} > 0$,

равномерно стремящееся к нулю на бесконечности, имеет

ВИД:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{ikr_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{i\bar{k}r_{QM}} e^{-\bar{k}r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q \quad (22)$$

Функция

$$\bar{u}(M) = \lim_{\bar{k} \rightarrow 0} u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{i\bar{k}r_{QM}}}{r_{QM}} f(Q) dV_Q \quad (23)$$

является решением уравнения Гельмгольца с

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ВЕЩЕСТВЕННЫМ коэффициентом \bar{k}^{-2} :

$$\Delta \bar{u} + \bar{k}^{-2} \bar{u} = -f(M)$$

(24)

Дополнительным условием, позволяющим выделить решение уравнения Гельмгольца (24), соответствующее **расходящимся волнам**, является требование, чтобы функция $\bar{u}(M)$ являлась пределом **ограниченного решения** уравнения Гельмгольца с комплексным коэффициентом при $k = \bar{k} + i\bar{k}, \bar{k} \rightarrow 0$.

Для выделения единственного решения необходимо:

- 1) добавить к вещественному коэффициенту k мнимую часть;
- 2) из двух решений уравнения с полученным комплексным коэффициентом выделить единственное решение равномерно стремящееся к нулю на бесконечности;
- 3) перейти в выделенном решении к пределу при стремлении добавленной мнимой части к нулю.

5. Принцип предельной амплитуды

Рассмотрим уравнение колебаний с **периодической** правой

частью:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + F(M, t), \quad F(M, t) = f(M)e^{-i\omega t}, \quad (25)$$

$$u(M, 0) = 0, \quad u_t(M, 0) = 0; \quad M \in \mathbb{R}^3 \quad (26)$$

Со временем в системе установятся колебания с частотой

вынуждающей силы:

$$u(M, t) = V(M)e^{-i\omega t}, \quad (27)$$

где $V(M)$ – **предельная амплитуда** колебаний

$$V(M) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(M, t)e^{i\omega t}, \quad (28)$$

$$\Delta V + k^2 V = -f(M), \quad k = \frac{\omega}{a}. \quad (29)$$

Требование, чтобы $V(M)$ было **предельной амплитудой** колебаний с нулевыми начальными условиями, представляет то дополнительное условие, которое нужно присоединить к волновому уравнению Гельмгольца для выделения единственного решения.

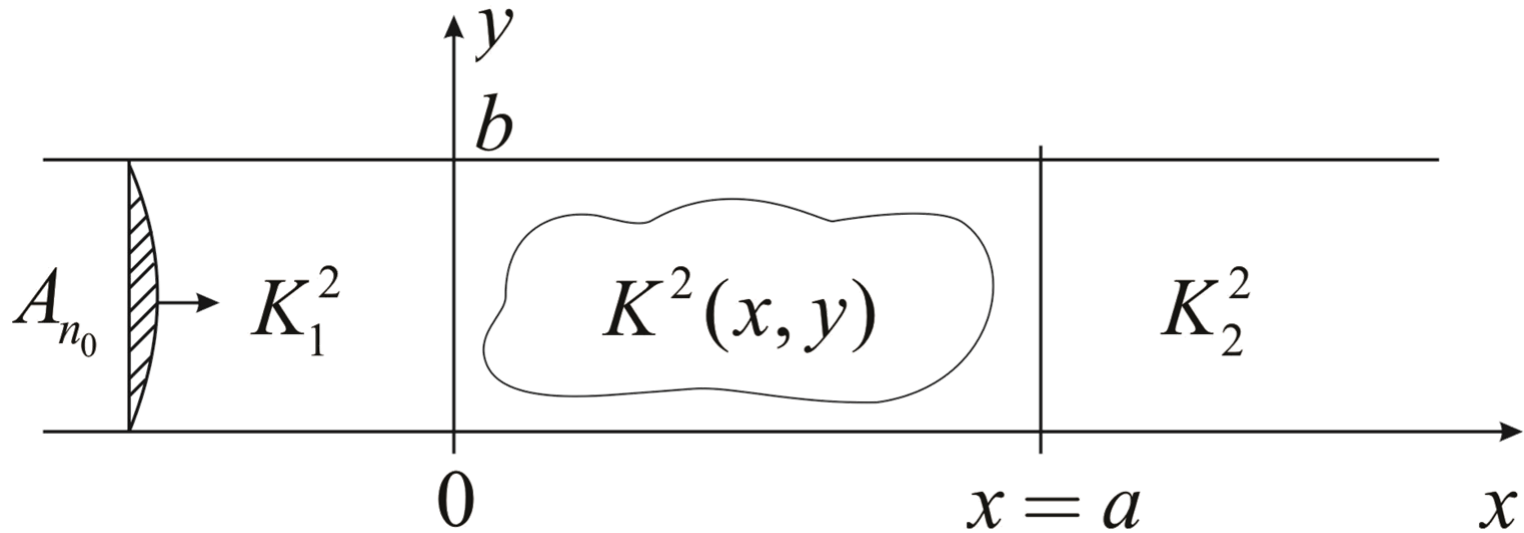
То есть нужно найти решение уравнения Гельмгольца (29), являющееся **предельной амплитудой** для решения уравнения колебаний (25) с начальными условиями (26):

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{K_M^{at}} \frac{F(Q, t - r_{QM}/a)}{r_{QM}} dV_Q = \frac{1}{4\pi} \int_{K_M^{at}} \frac{f(Q)}{r_{QM}} e^{-i\omega t - r_{QM}/a} dV_Q,$$

$f(M)$ – финитная функция, $\text{supp } f \subset D$.

$$V(M) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(M, t) e^{i\omega t} = \frac{1}{4\pi} \int_D f(Q) \frac{e^{ikr_{QM}}}{r_{QM}} dV_Q.$$

6. Парциальные условия излучения



Рассмотрим плоский волновод с **локальной нерегулярностью**.

При $x \leq 0$ и $x \geq a$ волновод **регулярный**: его заполнение однородно и геометрия сечения постоянна.

Нормальные волны (моды) – частные решения вида

$$u(x, y) = e^{i\gamma x} \psi(y), \quad (30)$$

где γ – **постоянная распространения**, $\psi(y)$ – **функция сечения**.

Поле $u(x, y)$ в волноводе удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in V \equiv \mathbb{R}^1 \times (0, b), \quad (31)$$

где $k^2(x, y) = \bar{k}^2(x, y) + i\bar{k}^2(x, y)$,

$$k^2(x, y) = \begin{cases} k_1^2 = const, & x < 0, \\ k^2(x, y), & 0 < x < a, \\ k_2^2 = const, & x > a. \end{cases} \quad (32)$$

Электродинамический случай: $k^2(x, y) = k_0^2 \varepsilon(x, y)$, где

$k_0 = \frac{\omega}{c}$ - волновое число, $\varepsilon(x, y)$ - диэлектрическая проницаемость.

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1 - \quad (33)$$

- граничные условия (например, **идеально проводящие** стенки).

(30), (31), (33) =>

$$\begin{cases} \psi''(y) + \lambda\psi(y) = 0, & 0 < y < b, \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} \psi(0) = 0, & \psi(b) = 0, \end{cases} \quad (35)$$

где $\lambda = k^2 - \gamma^2$.

(34), (35) =>

$$\psi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (36)$$

Существует **счетное множество** нормальных волн (мод) вида:

$$u_n(x, y) = e^{i\gamma_n x} \psi_n(y), \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

при $(x \leq 0, x \geq a)$. (37)

Пусть на неоднородность падает правая нормальная волна индекса n_0 с амплитудой A_{n_0} . В сечении $x=0$ **парциальные условия излучения** при временной зависимости $e^{-i\omega t}$ имеют вид:

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \cdot \psi_n(y) dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \cdot \delta_{n,n_0}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (38a)$$

Условие (38) означает отсутствие падающих на это сечение $x=0$ правых волн индекса $n \neq n_0$.

Для таких волн получим: $2i\gamma_n^{(1)} A_n = 0$, откуда $A_n = 0$.

В сечении $x=a$ парциальные условия имеют вид:

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n^{(2)} u \right\}_{x=a} \cdot \psi_n(y) dy = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (38b)$$

и означают отсутствие падающих на сечение левых волн.

Условия излучения (38) – нелокальные условия.

Разложим $u(x,y)$ по функциям сечения:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x) \psi_n(y), \quad (39)$$

$$Z_n(x) = \int_0^b u(x, y) \psi_n(y) dy \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (40)$$

Из (38), (40) следует, что парциальные условия излучения – это условия, которые накладываются на коэффициенты Фурье $Z_n(x)$ в разложении (39):

$$Z'_n(0) + i\gamma_n^{(1)} Z_n(0) = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{n,n_0} \quad (41)$$

Пусть D -область между сечениями $x=0$ и $x=a$:

$\bar{D} \equiv \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$. Краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2(x, y)u = 0, & (x, y) \in D, & (42) \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a, & (43) \\ \int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \psi_n(y) dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{n, n_0} & (n = 1, 2, \dots), & (44) \\ \int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n^{(2)} u \right\}_{x=a} \psi_n(y) dy = 0 & (n = 1, 2, \dots), & (45) \end{cases}$$

где $\gamma_n^{(l)} = \sqrt{k_l^2 - \lambda_n}$ ($n = 1, 2, \dots; l = 1, 2$) – **постоянные распространения нормальных волн.**

Теорема 3. Пусть $k^2 = \bar{k}^2 + i\bar{\bar{k}}^2, \bar{k} \neq 0, \gamma_n^{(l)} = \bar{\gamma}_n^{(l)} + i\bar{\bar{\gamma}}_n^{(l)}, \bar{\gamma}_n^{(l)} > 0 (n=1, \dots; l=1, 2).$

Тогда классическое решение задачи (42)-(45) единственно.

Доказательство

Предположим существование двух решений:

$$u_1(x, y) \neq u_2(x, y) \Rightarrow u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y) \Rightarrow (42) - (45), A_{n_0} = 0.$$

Умножим (42) на u^* и проинтегрируем по области D (интегрирование по частям):

$$\int_0^a \int_0^b (\Delta u u^* + k^2 u u^*) dx dy = \int_0^b u_x u^* \Big|_{x=a} dy - \int_0^b u_x u^* \Big|_{x=0} dy -$$

$$- \int_0^a \int_0^b (|u_x|^2 + |u_y|^2) dx dy + \int_0^a \int_0^b k^2 |u|^2 dx dy = 0, \quad (46)$$

$$u^*(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \psi_n(y), \quad C_n^* = \int_0^b u^*(a, y) \psi_n(y) dy \quad (n=1, 2, \dots) \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \int_0^b u_x u^* \Big|_{x=a} dy &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \int_0^b u_x(a, y) \psi_n(y) dy = \\ &= i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)} C_n^* \int_0^b u(a, y) \psi_n(y) dy = i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)} C_n^* C_n = \\ &= i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)} |C_n|^2. \end{aligned} \quad (48)$$

Аналогично получаем:

$$\int_0^b u_x u^* \Big|_{x=0} dy = -i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(1)} |B_n|^2, \quad (49)$$

где

$$u^*(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \psi_n(y), \quad B_n^* = \int_0^b u^*(0, y) \psi_n(y) dy \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (50)$$

$$(46), (48), (49) \Rightarrow i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)} |C_n|^2 + i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(1)} |B_n|^2 - \\ - \int_0^a \int_0^b |\operatorname{grad} u|^2 dx dy + \int_0^a \int_0^b k^2 |u|^2 dx dy = 0 \quad (51)$$

Возьмём в (51) мнимую часть:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_n^{(2)} |C_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_n^{(1)} |B_n|^2 + \int_0^a \int_0^b \bar{k}^2 |u|^2 dx dy = 0 \quad (52)$$

$$(52) \Rightarrow u = 0, \quad (x, y) \in D; \quad C_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow u(a, y) = 0;$$

$$B_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow u(0, y) = 0 \Rightarrow u(x, y) = 0 \Rightarrow u_1(x, y) = u_2(x, y),$$

$$(x, y) \in \bar{D}.$$

Замечание. Пользуясь принципом предельного поглощения, можно показать, что единственность имеет место и в случае **вещественного коэффициента** $k^2(x, y)$.

7. Излучение волн. Квадрупольный излучатель

Поверхность шара радиуса a колеблется так, что радиальная составляющая скорости \tilde{V}_r на поверхности $r = a$ равна

$$\tilde{V}_a = \frac{V_0}{4} (1 + 3 \cos 2\theta) e^{-i\omega t} \quad (53)$$

Вычислить интенсивность и мощность такого **излучателя второго порядка – квадрупольного излучателя.**

Звуковое давление $\tilde{p}(M, t)$ удовлетворяет уравнению колебаний:

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \tilde{p}, \quad \text{где} \quad c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (54)$$

c – скорость звука, p_0 и ρ_0 – давление и плотность среды в невозмущенном состоянии, γ – показатель адиабаты.

Установившийся процесс: $\tilde{p}(M, t) = p(M)e^{-i\omega t}$.

Радиальная составляющая скорости:

$$\frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \Rightarrow V_r = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (55)$$

где $\tilde{V}_r = V_r e^{-i\omega t}$. Для полинома Лежандра $P_2(x)$ имеет место формула:

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \Rightarrow \frac{1 + 3\cos 2\theta}{4} = P_2(\cos \theta) \Rightarrow \quad (56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p + k^2 p = 0, \quad r > a, \end{array} \right. \quad (57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = i\omega\rho_0 V_0 P_2(\cos \theta), \quad r = a, \end{array} \right. \quad (58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right), \end{array} \right. \quad (59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} - ikp = \overline{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad k = \frac{\omega}{c}. \end{array} \right. \quad (60)$$

Симметрия по $\varphi \Rightarrow p(M) = p(r, \theta) \Rightarrow$

$$p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \zeta_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta), \quad (61)$$

где

$$\zeta_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr). \quad (62)$$

$$(58), (61) \Rightarrow C_2 = ic \rho_0 V_0 \frac{1}{\zeta_2^{(1)'}(ka)} \Rightarrow \quad (63)$$

$$p(r, \theta) = ic \rho_0 V_0 \frac{\zeta_2^{(1)}(kr)}{\zeta_2^{(1)'}(ka)} P_2(\cos \theta), \quad (64)$$

$$V_r(r, \theta) = V_0 \frac{\zeta_2^{(1)'}(kr)}{\zeta_2^{(1)'}(ka)} P_2(\cos \theta). \quad (65)$$

Рассмотрим **длинноволновый случай** ($ka \ll 1$) и **дальнюю (волновую) зону** ($kr \gg 1$):

$$\begin{aligned}
 x \rightarrow 0 \quad \zeta_2^{(1)}(x) &\simeq -i \frac{3}{x^3}, \quad \zeta_2^{(1)'}(x) \simeq i \frac{9}{x^4}, \\
 x \rightarrow \infty \quad \zeta_2^{(1)}(x) &\simeq -\frac{1}{x} e^{ix} e^{-i\frac{\pi}{2}}, \\
 \zeta_2^{(1)'}(x) &\simeq -\frac{i}{x} e^{ix} e^{-i\frac{\pi}{2}}.
 \end{aligned} \tag{66}$$

$$p(r, \theta) = ic\rho_0 V_0 \frac{-1 e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}}}{i \frac{9}{(ka)^4}} P_2(\cos \theta) = -\frac{c\rho_0 V_0 k^3 a^4}{9r} e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}} P_2(\cos \theta), \tag{67}$$

$$V_r(r, \theta) = -\frac{V_0 k^3 a^4}{9r} e^{ikr} e^{-i\frac{\pi}{2}} P_2(\cos \theta), \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\bar{P}(r, \theta, t) &= \operatorname{Re}\left(p(r, \theta)e^{-i\omega t}\right) = \\ &= -\frac{c\rho_0 V_0 k^3 a^4}{9r} P_2(\cos \theta) \cos(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}),\end{aligned}\quad (69)$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_r(r, \theta, t) &= \operatorname{Re}\left(V_r(r, \theta)e^{-i\omega t}\right) = \\ &= -\frac{V_0 k^3 a^4}{9r} P_2(\cos \theta) \cos(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}).\end{aligned}\quad (70)$$

Интенсивность излучения квадруполья \bar{Y} :

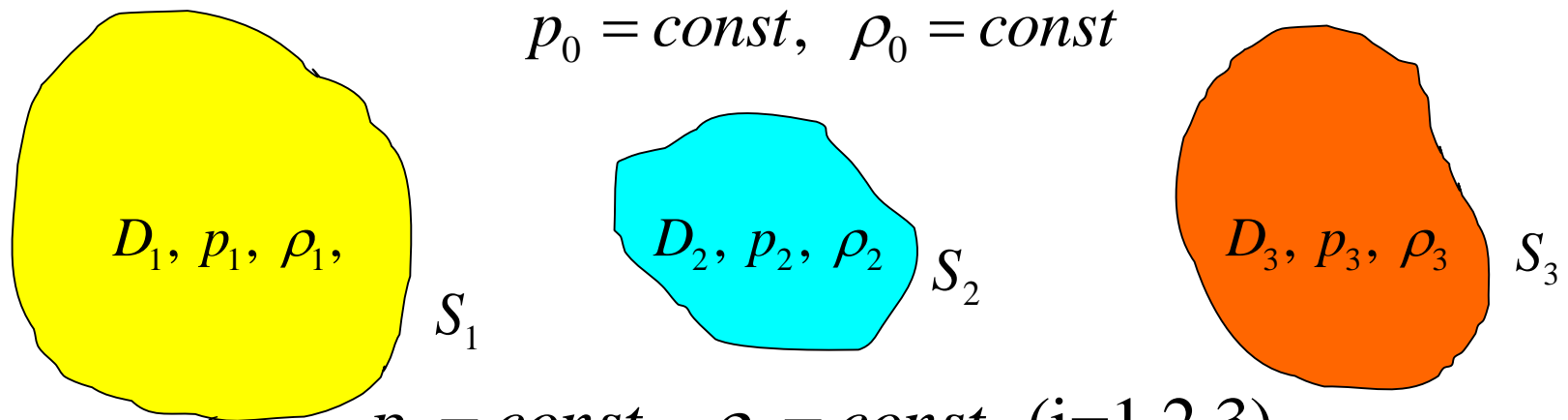
$$\bar{Y} = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{P}(r, \theta, t) \bar{V}_r(r, \theta, t) dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (71)$$

$$\bar{Y} = \frac{c\rho_0 V_0^2 k^6 a^8 P_2^2(\cos \theta)}{162r^2} \quad (72)$$

Мощность излучения квадруполья Π :

$$\Pi = r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{Y} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{2\pi c\rho_0 V_0^2 k^6 a^8}{405} \quad (73)$$

8. Задачи математической теории дифракции



$$p_i = \text{const}, \rho_i = \text{const} \quad (i=1,2,3)$$

$$\Delta V_i + k_i^2 V_i = -f_i, \quad M \in D_i \quad (i=0,1,2,3) \quad (74)$$

$$V_i = V_0, \quad M \in S_i, \quad (75)$$

$$p_i \frac{\partial V_i}{\partial n} = p_0 \frac{\partial V_0}{\partial n}, \quad M \in S_i \quad (i=1,2,3), \quad (76)$$

$$V_0(M) = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (77)$$

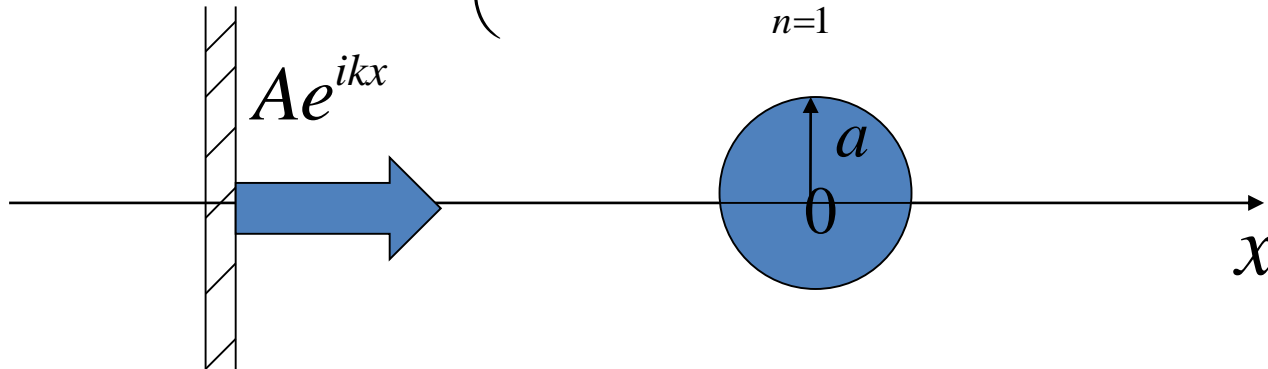
$$\frac{\partial V_0}{\partial r} - ik_0 V_0 = \bar{\bar{O}}\left(\frac{1}{r}\right), \quad k_i^2 = \frac{\rho_i}{p_i} \omega^2 \quad (i=0,1,2,3) \quad (78)$$

Дифракция звуковой волны на бесконечном жёстком цилиндре

На цилиндр радиуса a падает плоская звуковая волна, давление $p_0(x)$

в которой можно представить в виде:

$$p_0 = Ae^{ikx} = Ae^{ikr \cos \varphi} = A \left(J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(kr) \cos n\varphi \right) \quad (79)$$



Обозначим: $p(r, \varphi) = p_0(r, \varphi) + p_s(r, \varphi)$ - **полное давление**, $p_0(r, \varphi)$ - **давление в падающей волне**, $p_s(r, \varphi)$ - **давление в отраженной волне**.

Тогда получим задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_s + k^2 p_s = 0, \quad r > a, \quad (80) \\ \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p_s}{\partial r} = -\frac{\partial p_0}{\partial r}, \quad r = a, \quad (81) \\ p_s = \underline{O}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad (82) \\ \frac{\partial p_s}{\partial r} - ikp_s = \overline{O}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \quad (83) \end{array} \right.$$

$$p_s(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\varphi. \quad (84)$$

$$(79), (81), (84) \Rightarrow$$

$$C_0 = \frac{J_1(ka)}{H_0^{(1)'}(ka)} A, \quad C_n = -\frac{2(-i)^n J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} A, \quad (85)$$

$$(n=1, 2, \dots).$$

Радиальная составляющая скорости в рассеянной волне:

$$V_{sr}(r, \varphi) = \frac{1}{ic\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)'}(kr) \cos n\varphi \quad (86)$$

Волновая (дальняя зона) $(kr \gg 1)$:

$$H_n^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})} \quad (87)$$

$$p_s(r, \varphi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (-i)^n \cos n\varphi \quad (88)$$