

- **Глава 5. Некоторые объекты и**
- **методы математического**
- **моделирования**

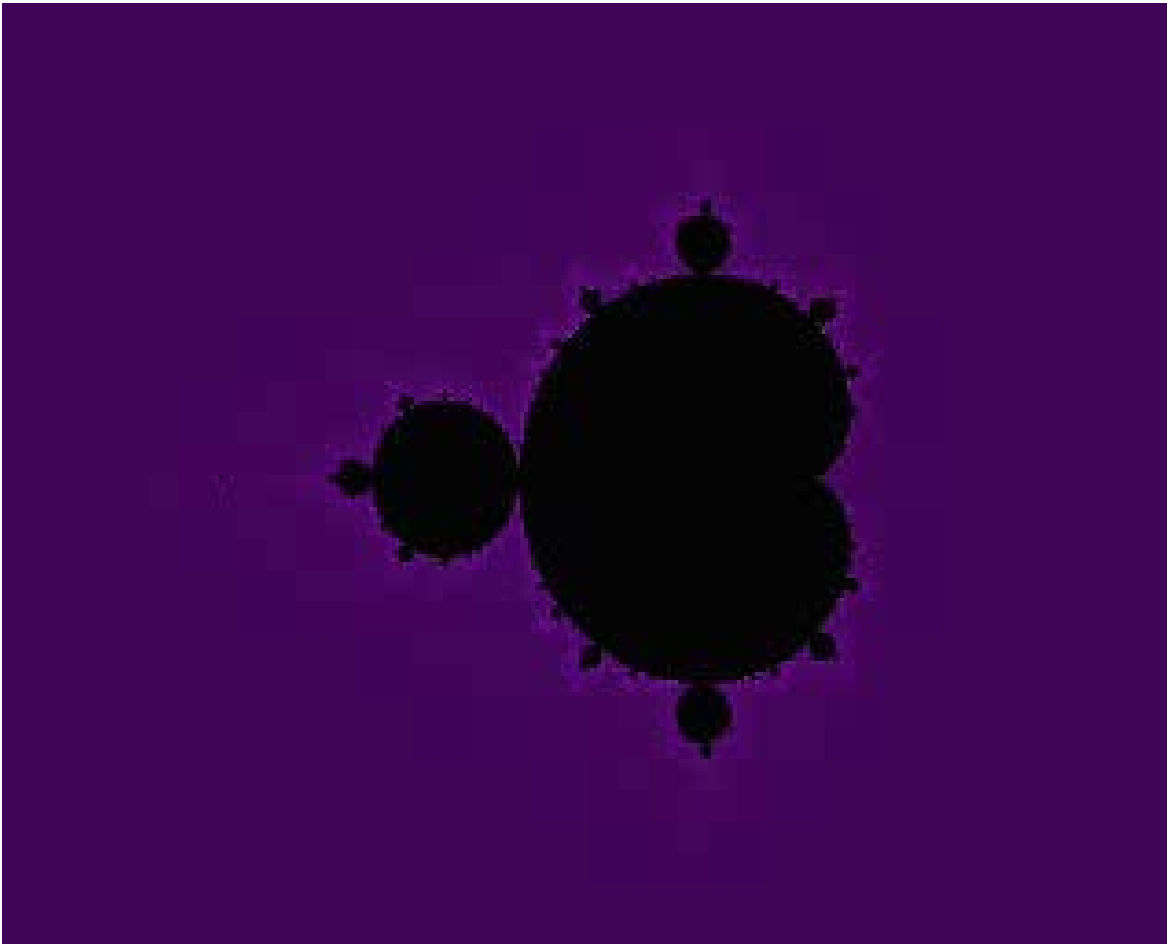
# 1. Фракталы и фрактальные структуры

**ФРАКТАЛ –**

**это геометрическая фигура, в которой один и тот же  
фрагмент повторяется при каждом уменьшении  
масштаба**

На спинках блох блошата есть,  
Кусают блох они там,  
Блошонков у блошат не счесть,  
И так indefinite...

*Даниель Дефо*





**В прошлом математики основное внимание уделяли функциям и множествам, которые могут быть исследованы методами классического анализа.**

**Те функции, которые не являлись достаточно гладкими или регулярными, как правило, не исследовались как не достойные внимания патологические объекты.**

**Однако еще в конце девятнадцатого века были построены математические объекты, которые вызвали значительный интерес у математиков.**



Георг Кантор

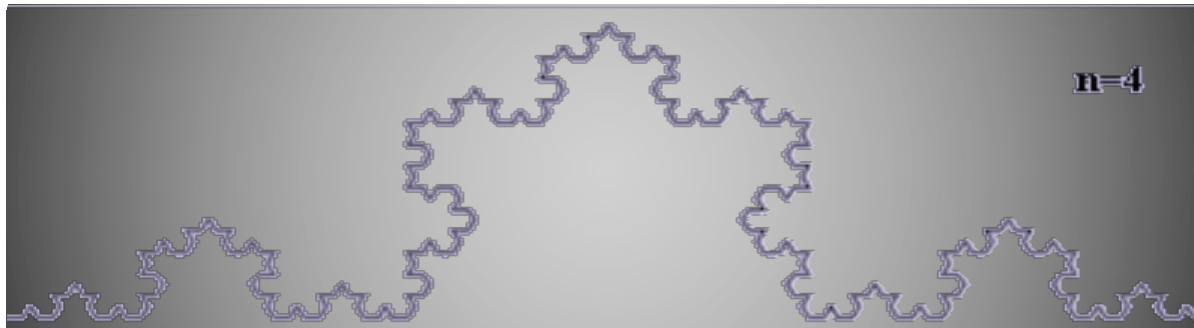
**Канторово множество** есть один из простейших фракталов, подмножество единичного отрезка вещественной прямой, которое является классическим примером «плохого множества» в математическом анализе.

**Георг Кантор описал это множество, которое теперь называют множество Кантора или пыль Кантора, в 1883 году. Это множество имеет мощность континуума, но мера его равна нулю. Каждый из фрагментов множества Кантора выглядит как множество в целом, то есть оно является самоподобным.**



**В 1886 году Карл Вейерштрасс построил функцию, не имевшую производной ни в одной точке. График этой функции – бесконечно изломанная линия. При увеличении любой участок кривой выглядит подобно всей кривой.**

**В 1904 году Хелге фон Кох построил пример непрерывной кривой, которая нигде не имеет касательной. Можно построить снежинку или остров Коха, если в качестве начального объекта взять равносторонний треугольник, а не единичный отрезок. Снежинка или остров Коха будут иметь бесконечный периметр, но при этом будут ограничивать конечную область.**



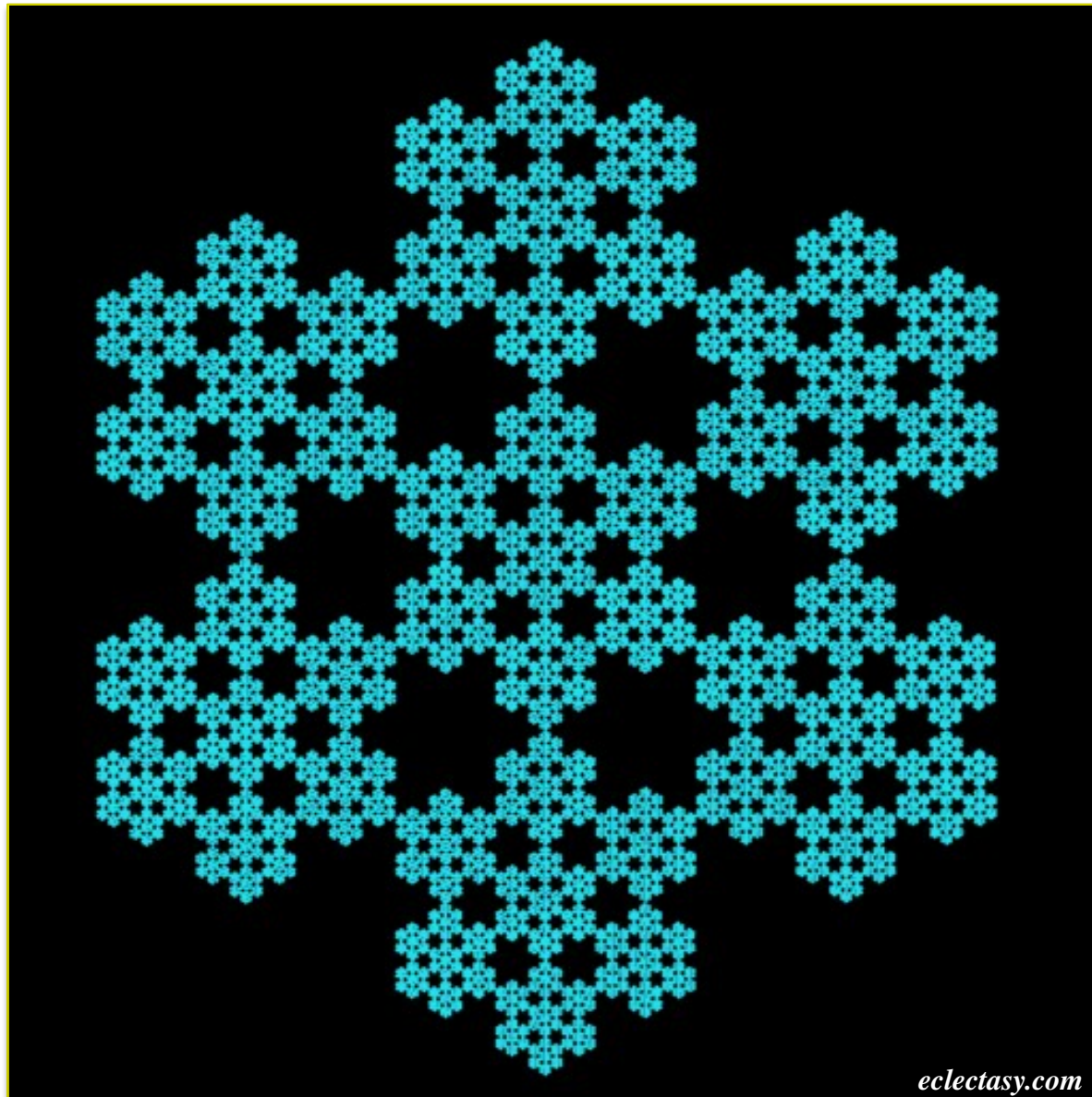




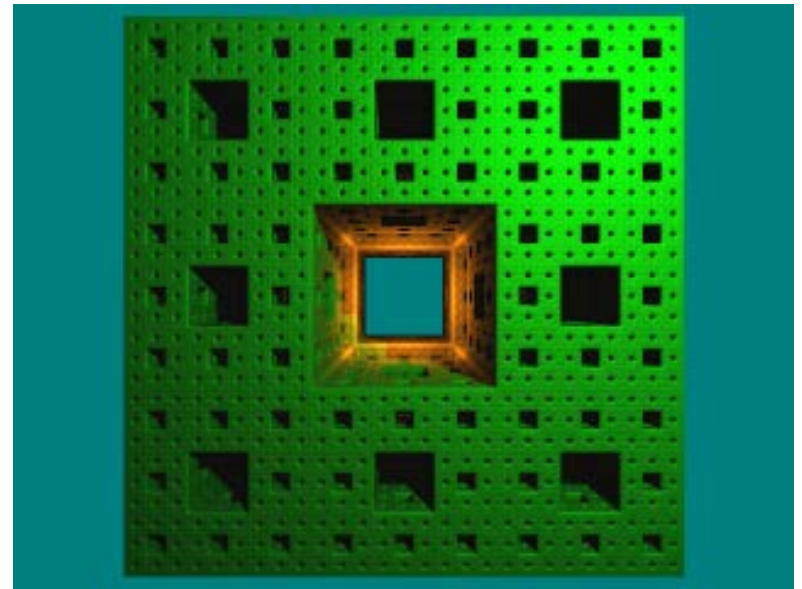
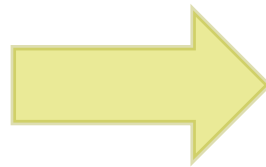
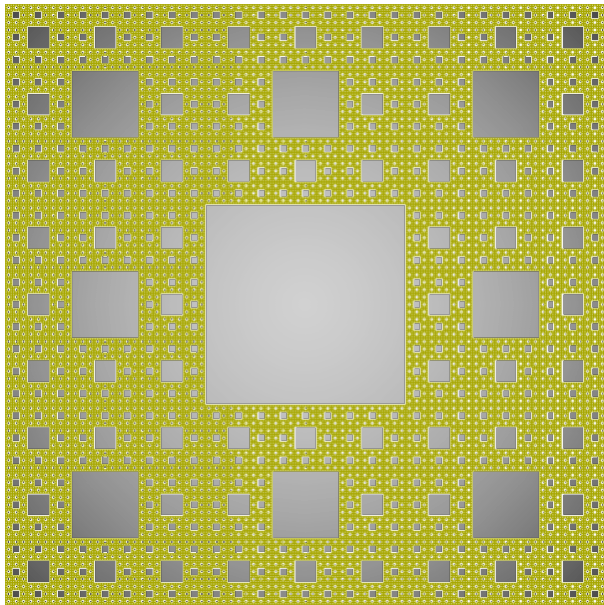
Хельге фон Кох

**Кривая Коха** — фрактальная кривая описанная шведским математиком Хельге фон Кохом(1870-1924). Кривая Коха примечательна тем, что нигде не имеет касательной, т. е. *нигде не дифференцируема*, хотя всюду непрерывна.

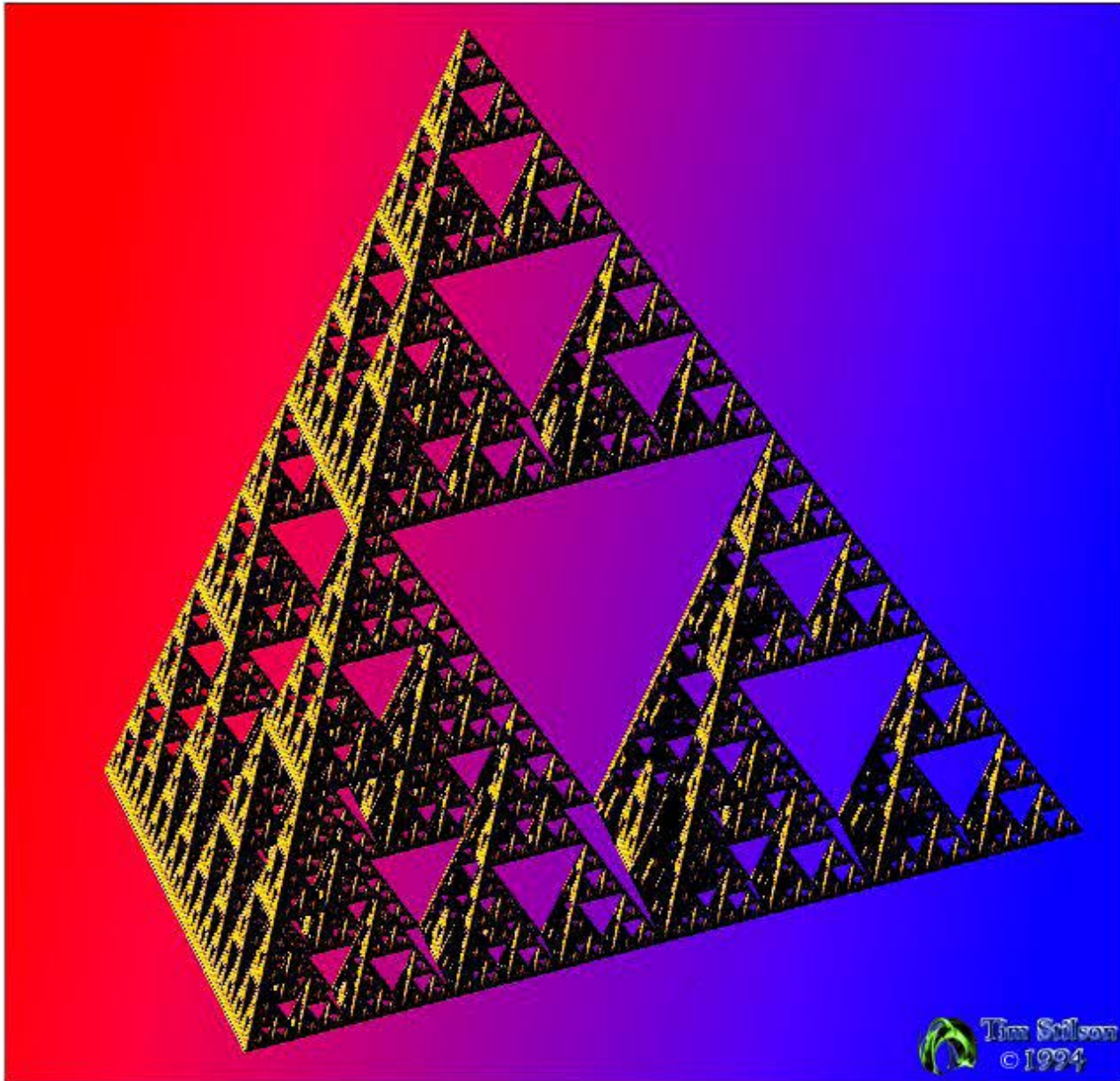
Три копии кривой Коха, расположенные на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую, называемую снежинкой Коха.



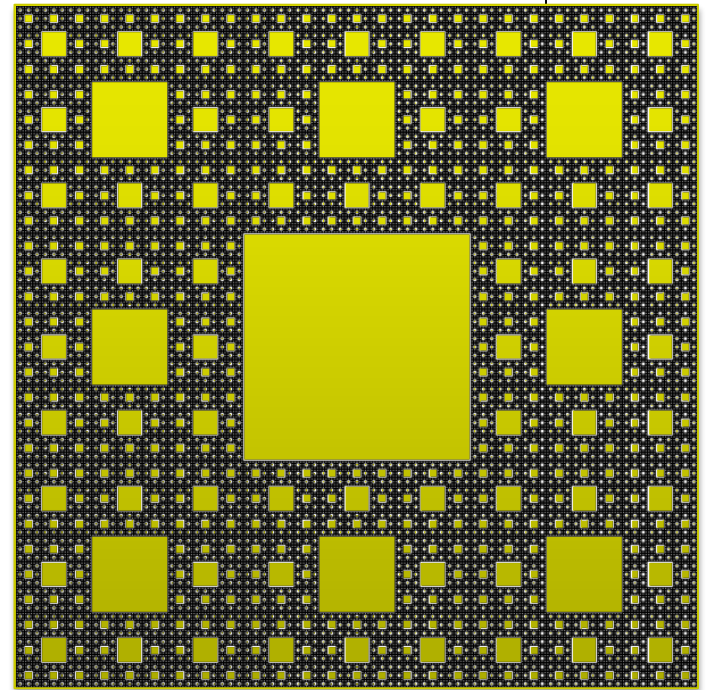
В 1915 году Вацлав Серпинский построил ряд конструкций, в частности, **салфетку Серпинского** и **ковер Серпинского**. Можно построить трехмерные аналоги этих объектов. Их называют **губками**.





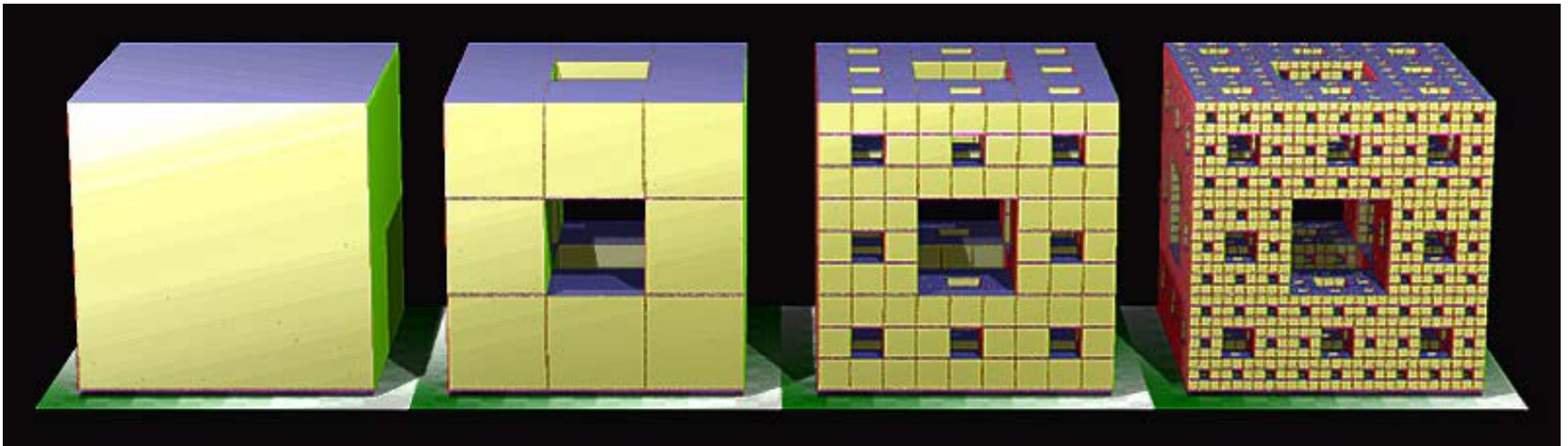


**Ковер Серпинского.** Берётся сплошной квадрат, разрезается на 9 равных квадратов и удаляется внутренность центрального квадрата. На втором шаге удаляется 8 центральных квадратов из 8 оставшихся квадратов и т. д. После бесконечного повторения этой процедуры, от сплошного квадрата остается замкнутое подмножество — **ковер (квадрат) Серпинского.**



# Губка Менгера

Губка Менгера — геометрический фрактал, трёхмерный аналог ковра Серпинского.



**Рассмотренные объекты называют конструктивными фракталами. Они получаются в результате простой рекурсивной процедуры (комбинации линейных преобразований). Именно изучение таких объектов составляет основное содержание фрактальной геометрии.**

**Своей популярностью в последние десятилетия фракталы в значительной степени обязаны появлением в 1983 году книги сотрудника исследовательского центра имени Томаса Дж. Уотсона корпорации IBM франко-американского математика Бенуа Мальденброта «Фрактальная геометрия природы». Мальденброт ввел в 1975 году термин «фрактал» от латинского слова fractus – изломанный, дробный.**



**Бенуа Мандельброт (*фр. Benoit Mandelbrot*)**

**математик, родился 20 ноября 1924 в Польше. С 1958 проживал в США.**

**Является основателем фрактальной геометрии.**

**В его работах использованы результаты других учёных, работавших в той же области (Пуанкаре, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф).**



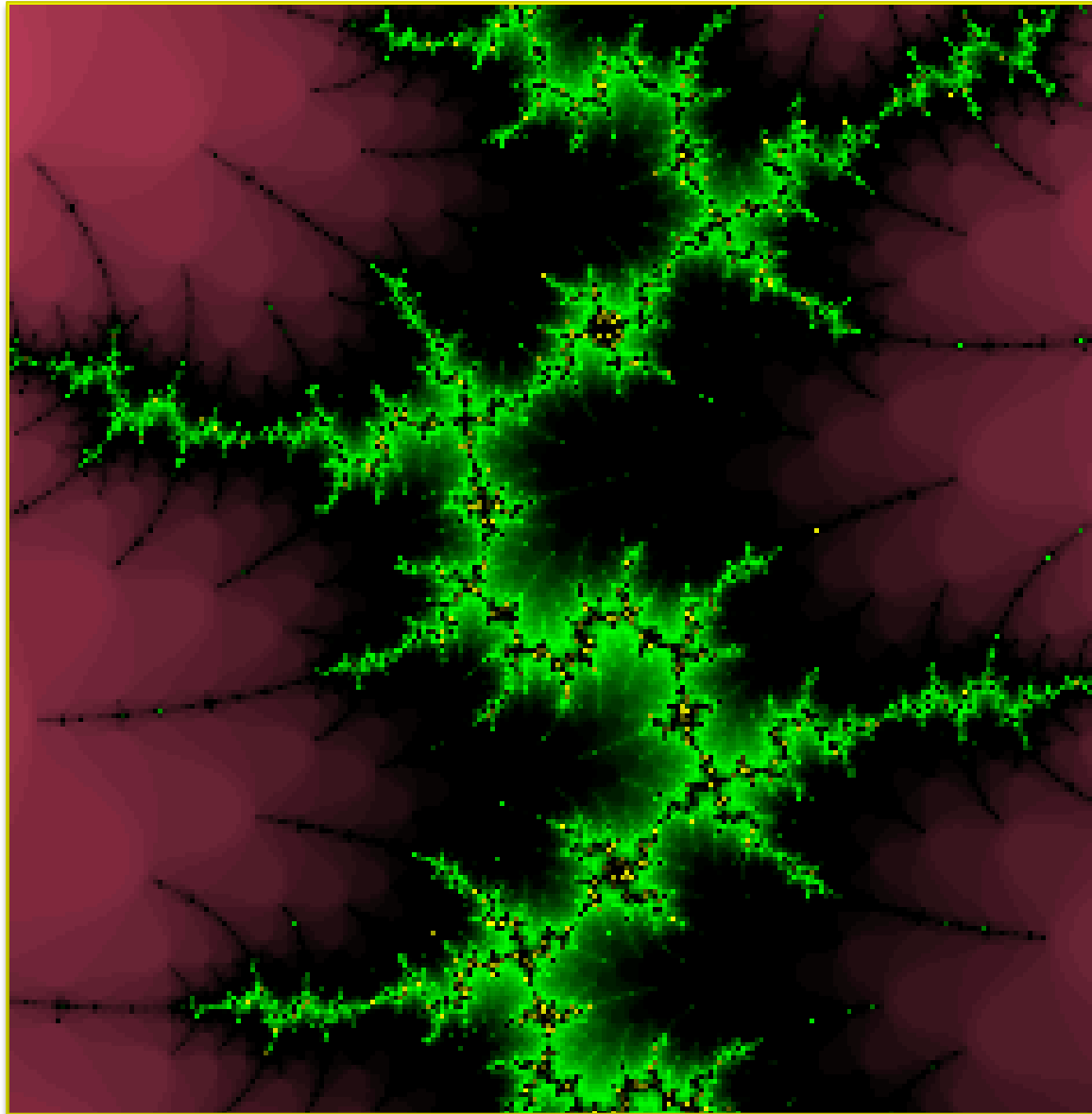
**Большой интерес к фракталам, как и вообще к нерегулярным функциям и множествам объясняется прежде всего тем, что они гораздо лучше обеспечивают представление многих природных явлений нежели объекты классической геометрии. В этом плане интересно сравнить два высказывания, которые разделяет в 350 лет.**

**«Философия природы написана в величайшей книге – я разумею Вселенную... А написана эта книга на языке математики, и письменна ее – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры».**

*Галилео Галилей, 1623 год.*

**«Почему геометрию называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака – это не сферы, горы – это не конусы, линия берега – это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой... Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно».**

*Бенуа Мандельброт, 1973 год.*



Фрагмент множества Мандельброта, лежащий в районе его границы

**Широчайшее распространение фрактальных структур объясняется их разномасштабностью:** и большие, и малые масштабы фрактальных структур имеют одинаковый закон роста. Это геометрическое подобие и есть основной принцип роста всего живого, который называют также **иерархическим принципом организации**. Законы ветвления самой тонкой веточки дерева абсолютно те же, что и для всех его ветвей, и для всего живого в целом.

**Задать фрактальную структуру-это значить задать не застывшую, неизменную форму , а принцип роста, закон изменения формы.**

Как правило, алгоритмы построения формы гораздо проще, чем полученная с его помощью форма. **Фрактал даёт компактный описания самых замысловатых форм.**

**Фракталы подразделяются на конструктивные и динамические. Конструктивный фрактал – это геометрическая фигура, в которой один и тот же фрагмент повторяется при каждом уменьшении масштаба. Они строятся путем применения простой рекурсивной процедуры (комбинации линейных преобразований). Конструктивный фрактал – это множество, получающееся в результате линейных (аффинных) сжимающих отображений подобия. Результирующее сжимающее отображение обладает устойчивой неподвижной точкой – «фракталом». Задать фрактальную структуру – значит задать не застывшую, неизменную форму, а принцип роста, закон изменения формы.**

**Динамические фракталы, как правило задаются с помощью некоторого отображения. Одним из первых описал динамические фракталы в 1918 году французские математики Гастон Жюлиа и Пьер Фату. Если в отображении**

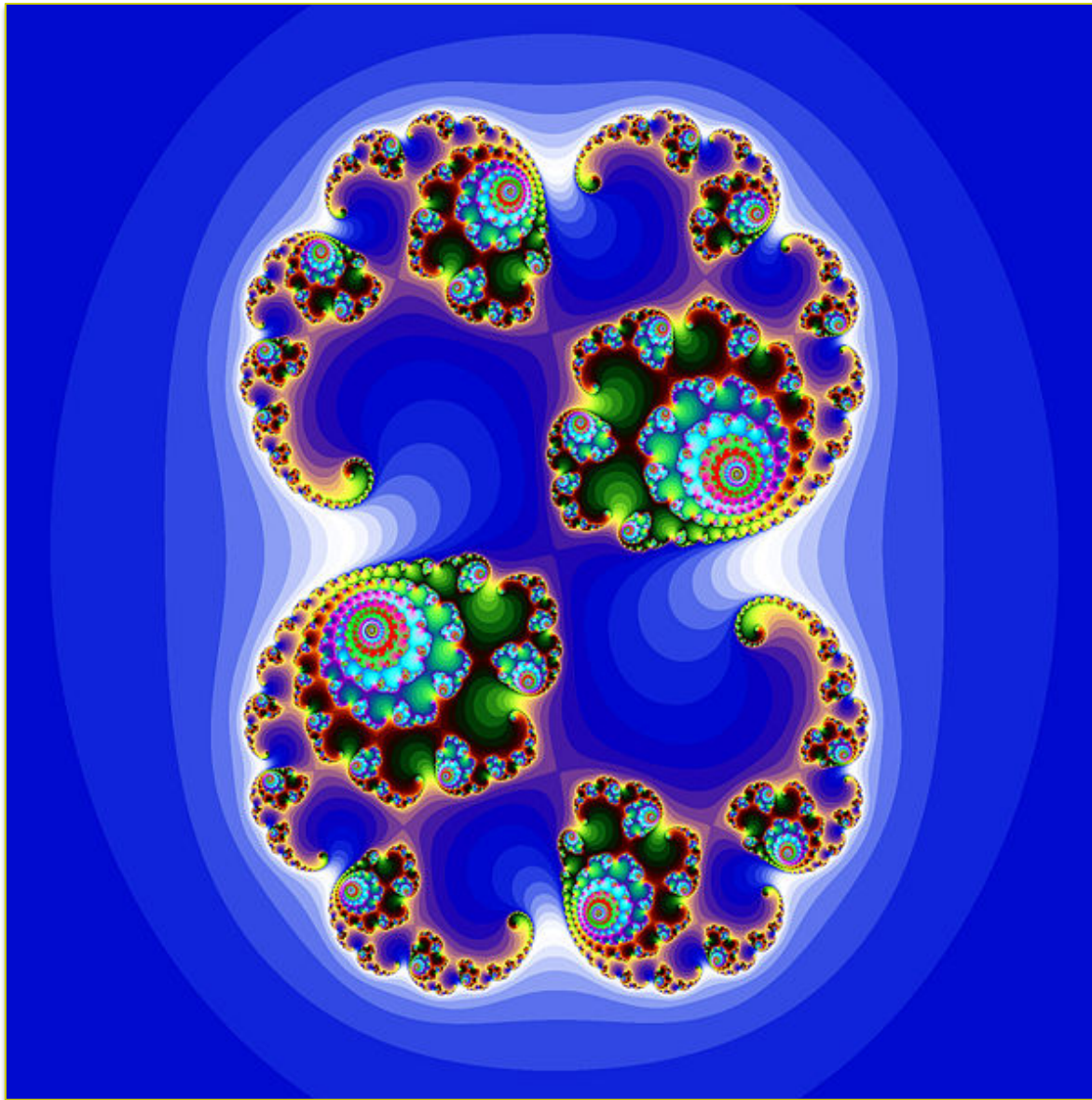
$$z_{n+1} = z_n^2 + C$$

**на комплексной плоскости фиксировать значение постоянной  $C$ , то в зависимости от выбора начального приближения пределом последовательности будут либо ноль, который является аттрактором, (зоной влияния, множеством притяжения), либо бесконечность (также аттрактор).**

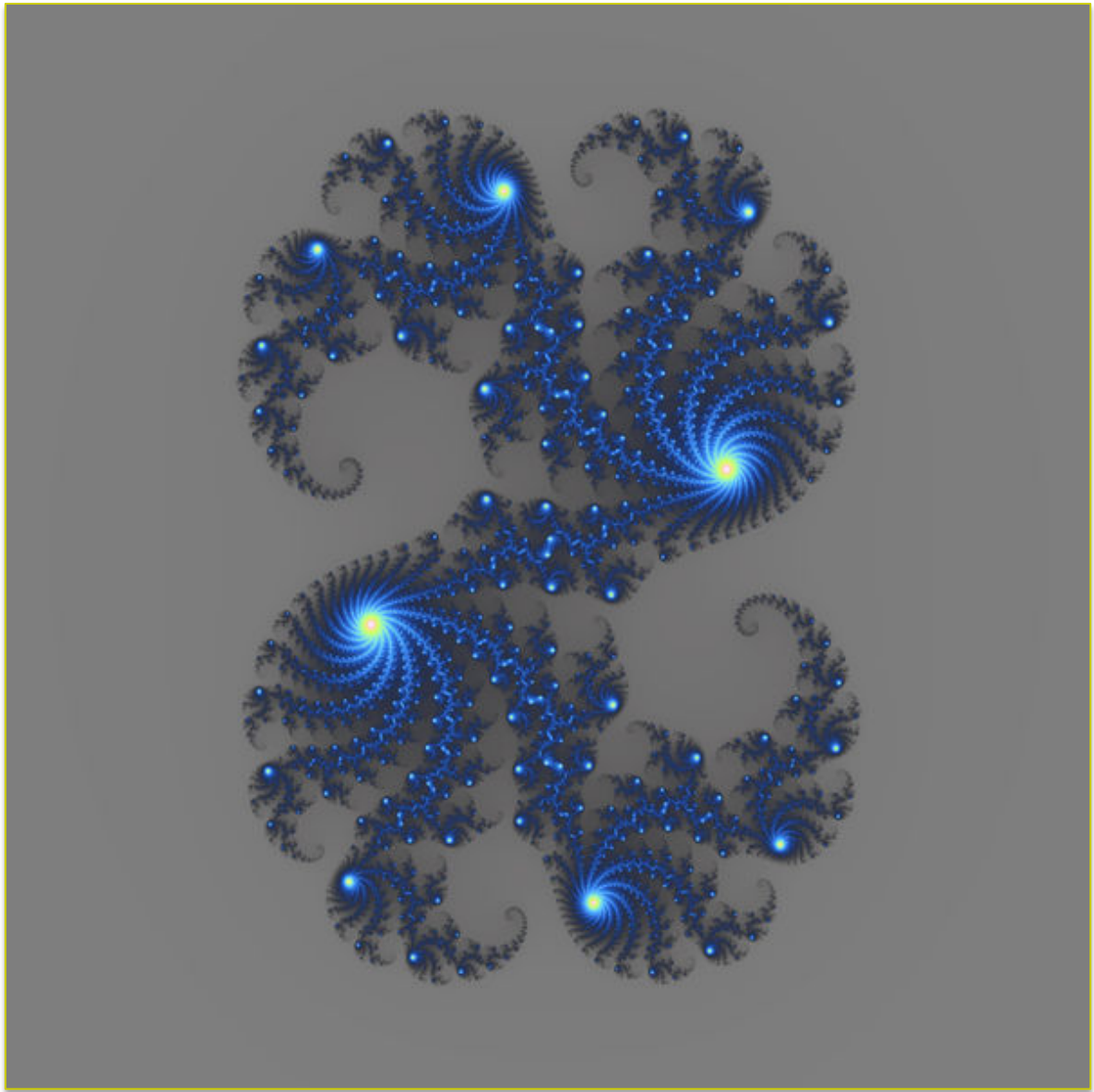
**Граница, разделяющая области притяжения этих двух аттракторов бесконечно изрезана и является фракталом - множеством Жюлиа.**

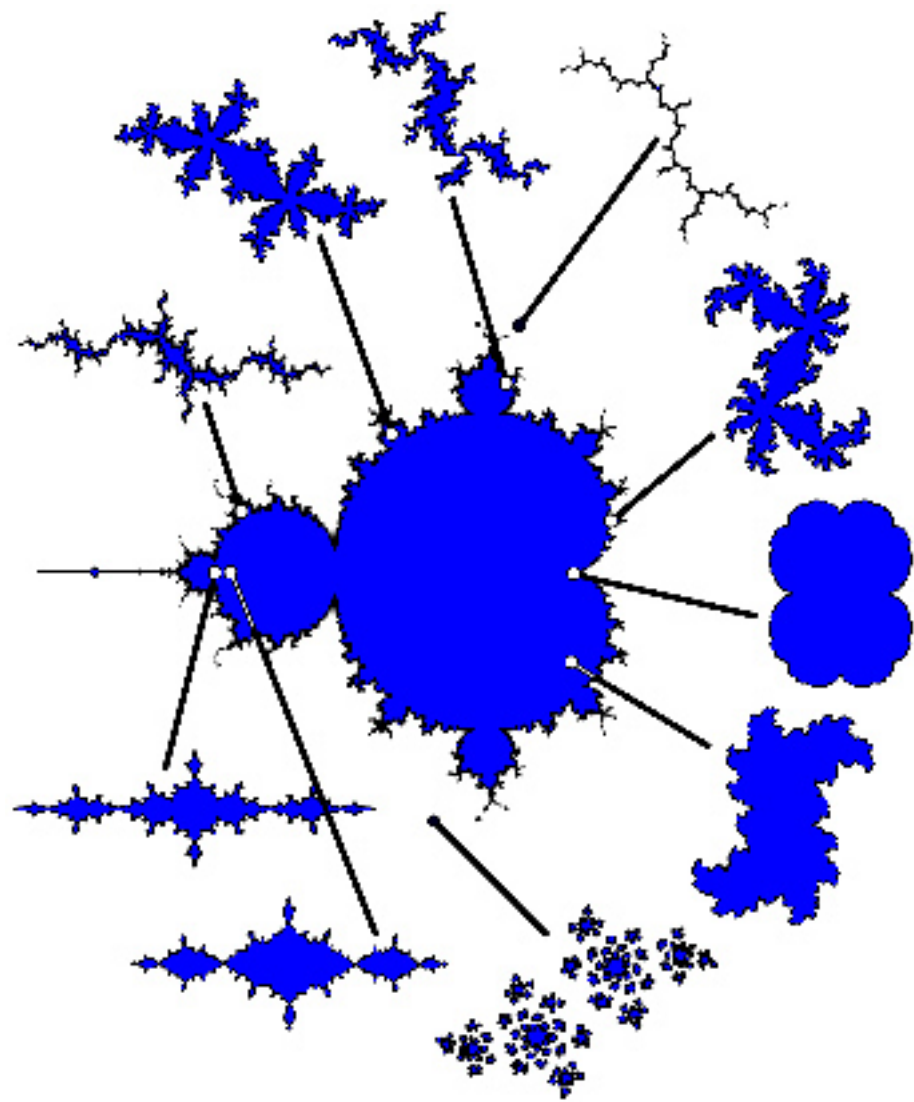
**Одной из характерных особенностей такой линии является самоподобие: если взглянуть на любой ее поворот, то можно обнаружить, что одна и та же форма встречается в различных местах и имеет разные размеры.**

**Жюлиа и Фату установили, что эту границу, являющуюся множеством Жюлиа, можно восстановить по любой произвольной ее части. Заметим, что аттрактор, граница которого является фракталом, называется странным аттрактором.**









Во второй половине XX века при измерении длины береговой линии Великобритании английский физик и метеоролог Льюис Ричардсон заменил истинную береговую линию ломаной, состоящей из отрезков, длины которых затем устремлялись к нулю. Однако береговая линия, в отличие от линий, описываемых гладкими функциями, оказалась настолько изрезанной вплоть до самых малых масштабов карты, что с уменьшением длины звеньев длина всей линии не стремилась к конечному пределу, а становилась бесконечно большой.

**Основным свойством фрактала является самоподобие, или масштабная инвариантность, а фундаментальной характеристикой его является фрактальная размерность или размерность самоподобия. Рассмотрим единичный отрезок, единичный квадрат и единичный куб:**

**Единичный отрезок, N частей длины**  $\ell = \frac{1}{N} \Rightarrow 1 = N\ell$

**Единичный квадрат, N квадратов со стороной**  $\ell = \frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow 1 = N\ell^2.$

**Единичный куб, N кубов со стороной**  $\ell = \frac{1}{\sqrt[3]{N}} \Rightarrow 1 = N\ell^3$

**во всех этих случаях получаем  $N\ell^d = 1$  где  $d$  –  
размерность самоподобия:**

$$d = -\frac{\ln N}{\ln \ell}$$

# Чтобы построить множество Кантора нужно взять два

множества длины  $\frac{1}{3} \Rightarrow$



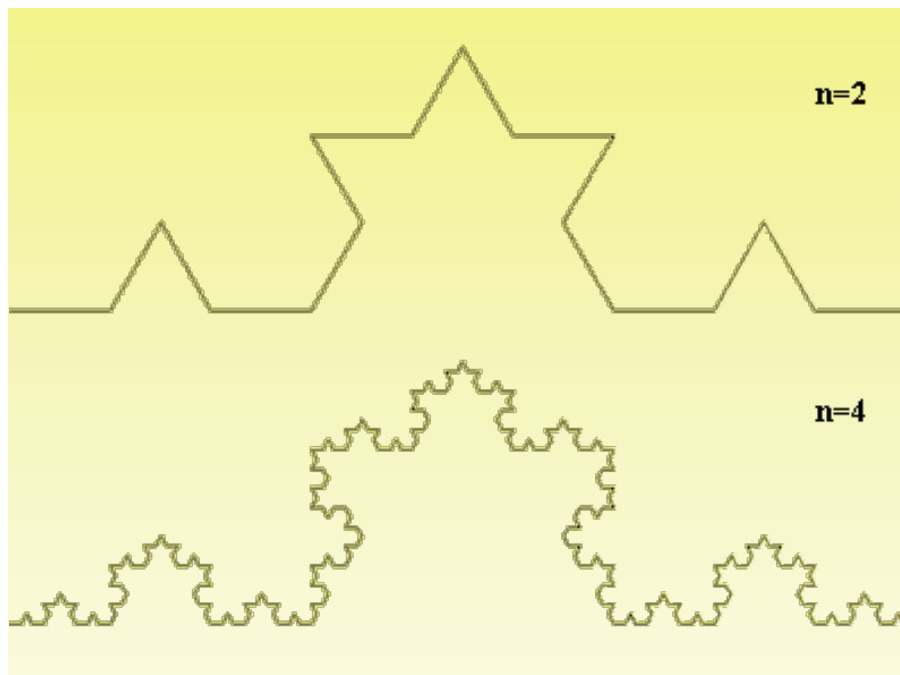
$$\ell = \frac{1}{3^n}, N = 2^n$$

$$d = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309$$

Для кривой Коха требуется четыре отрезка длиной

$$\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$d = -\frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 4}{\ln 2} \approx 1,2618$$

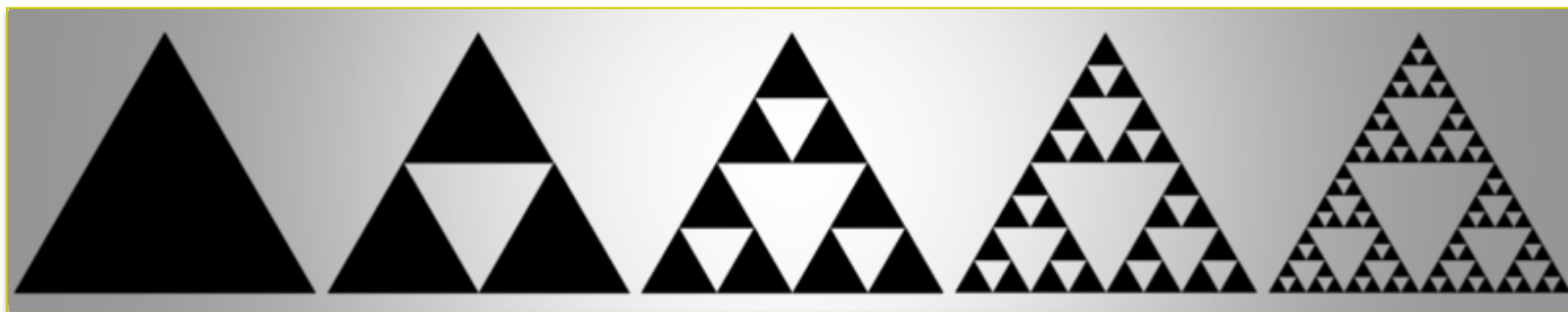


**Еще не фигура но уже не отрезок.**

Одна салфетка Серпинского состоит из трех  
салфеток с размером стороны  $\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$d = -\frac{\ln 3}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5850$$

**Уже не фигура но еще не отрезок.**



**Регулярные фракталы:** на каждом этапе масштабирования в точности повторяют объект в целом.

**Нерегулярные фракталы:** на каждом уровне масштаба структура фрактала подобна, но не идентична объекту в целом.

**Природные фракталы:** деревья, реки, облака, береговая линия.

**Человеческий организм:** структура дыхательной, кровеносной и нервной системы, губчатая структура костей, нейроны (нервные клетки), фронтальные ответвления и складки поверхности кишечника.



**Фрактальные кластеры: комплексные соединения, в основе молекулярной структуры которых лежит объемная ячейка из непосредственно связанных между собой атомов.**

**Образуются при:**

- а) ассоциации твердых аэрозолей в газе при их диффузном движении;**
- б) электролизе;**
- в) кристаллизация жидкости на подложке;**
- г) вытеснение жидкостью с меньшей плотностью жидкости с большей вязкостью (вода вытесняет нефть: «жидкие пальцы»);**
- д) течение в пористых средах.**

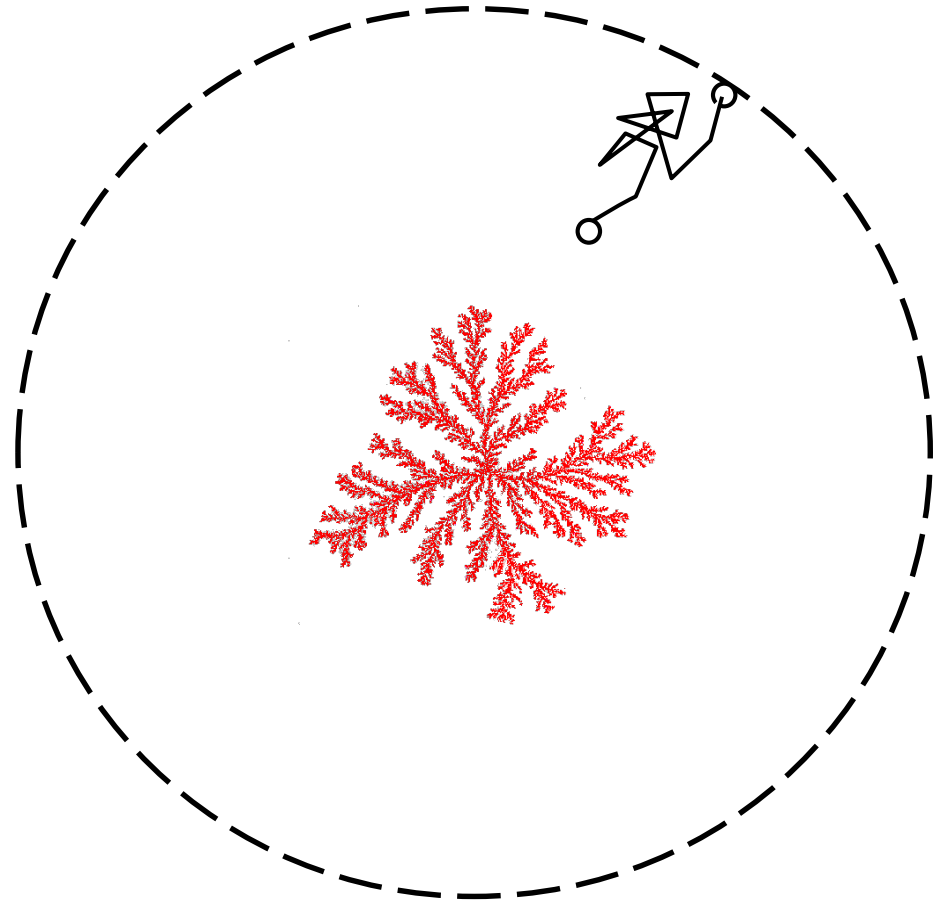
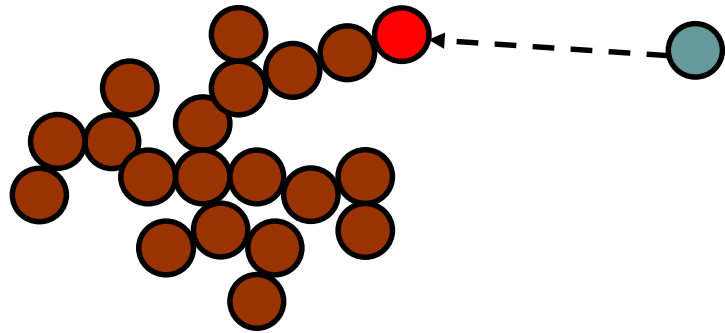
**Дендриты (древовидные фракталы):**  
**кристаллы, молния, трещины, разломы.**

**Одна из широко используемых моделей - модель ОДА - ограниченная диффузией агрегация: случайное движение молекул, которые могут слипаться, образуя кластер. Варианты:**

**а) случайная частица движется случайным образом с окружности круга, в центре которого расположена затравка, достигнув которой, частица сливается с ней. В результате получается «дендритный кристалл».**

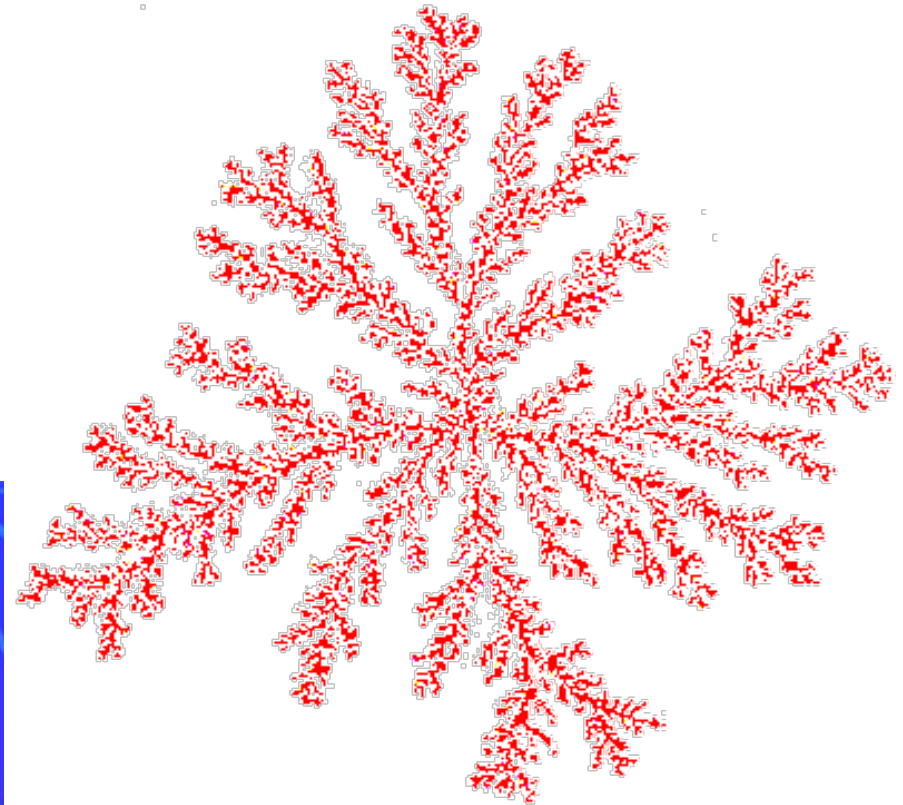
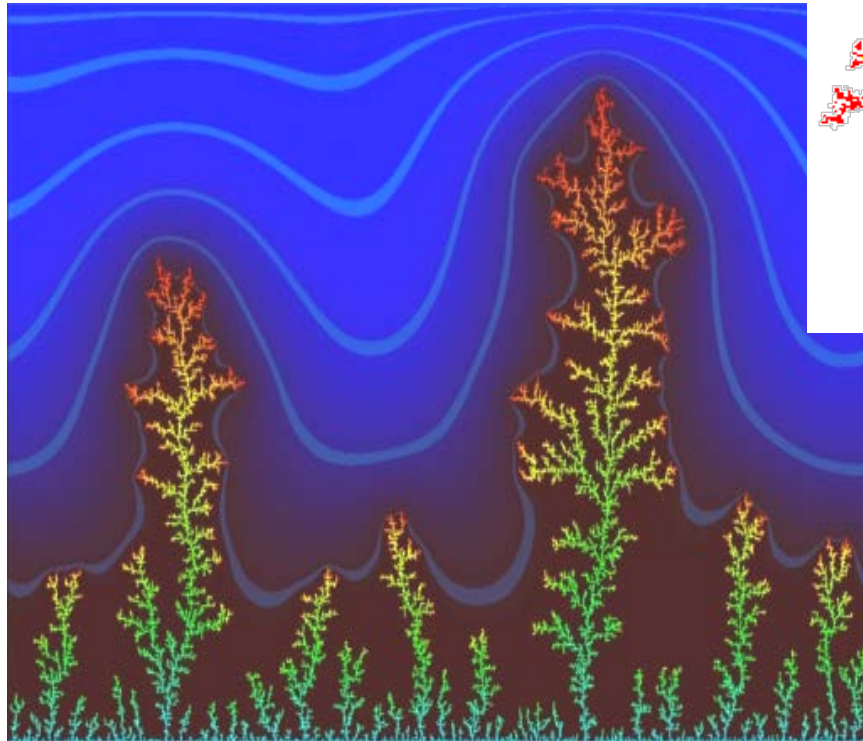
**б) случайная частица движется случайным образом с верхней границы прямоугольника. При достижении боковых границ она упруго отражается, а при достижении нижней границы прилипает. В результате образуются «фрактальные водоросли».**

# Агрегация:



**DLA – агрегация,  
протекающая в  
условиях случайного  
блуждания**

**Центрально  
симметричный  
случай**



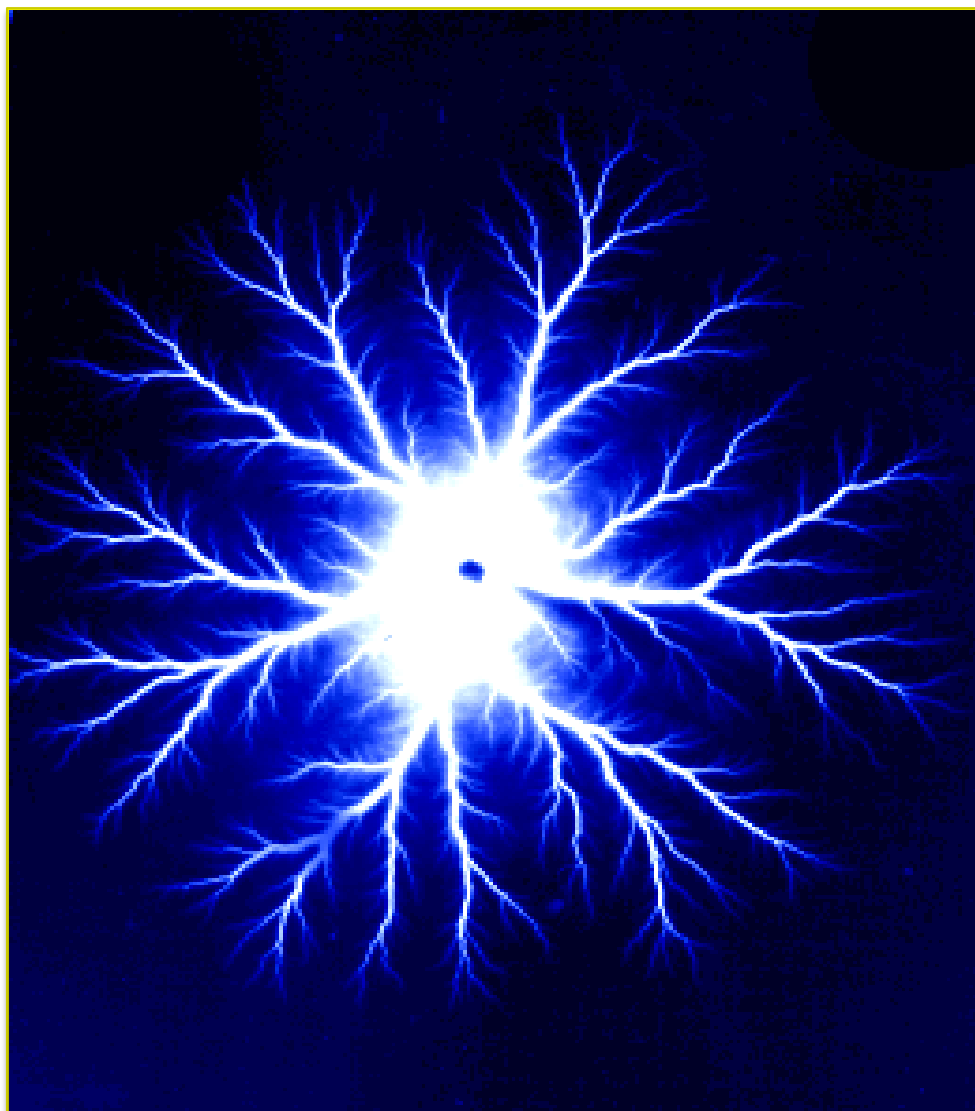
**Прямоугольная  
ячейка**



Пример разряда в 3D ячейке



Природная молния



Фигура Лихтенберга

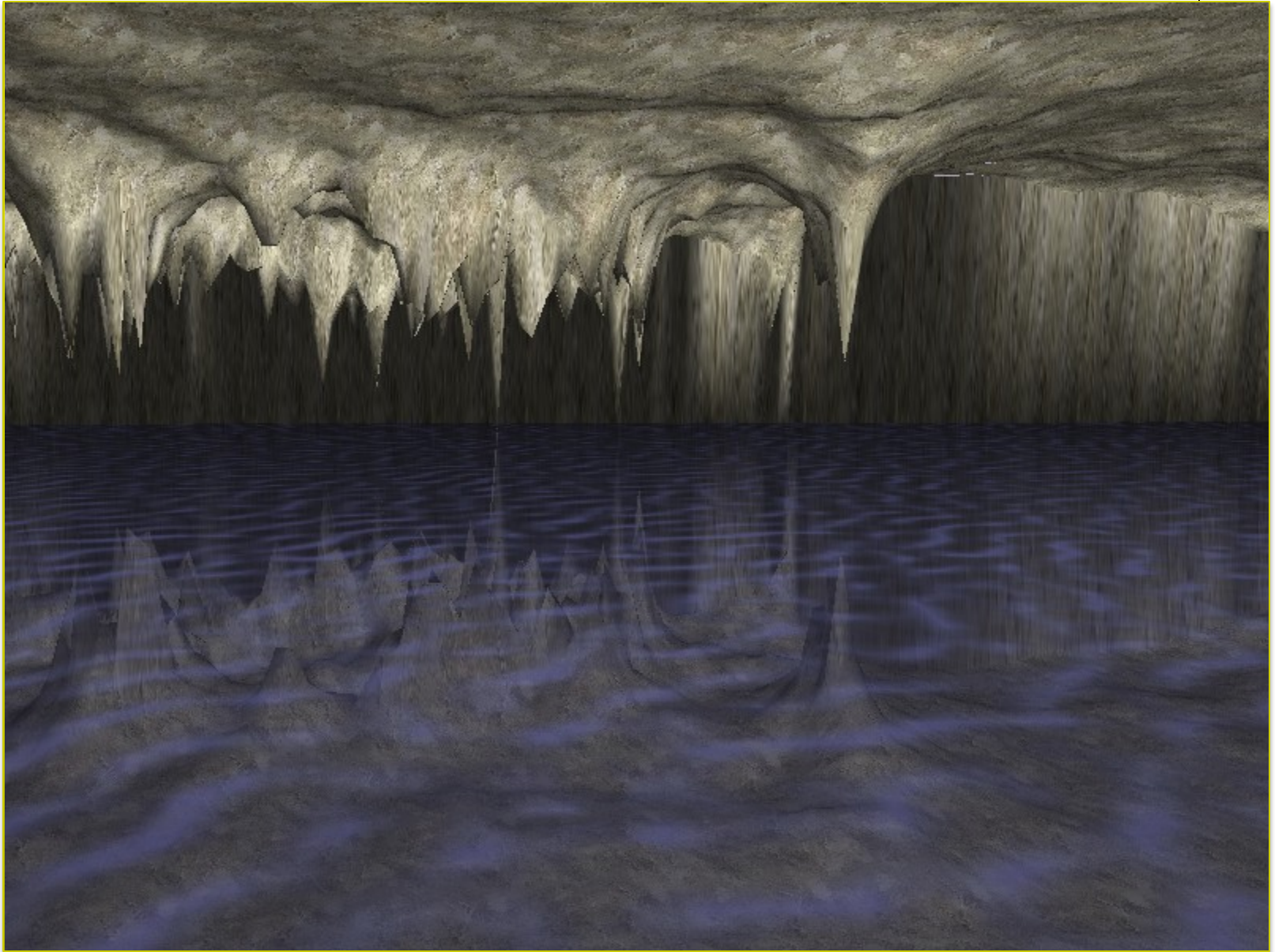


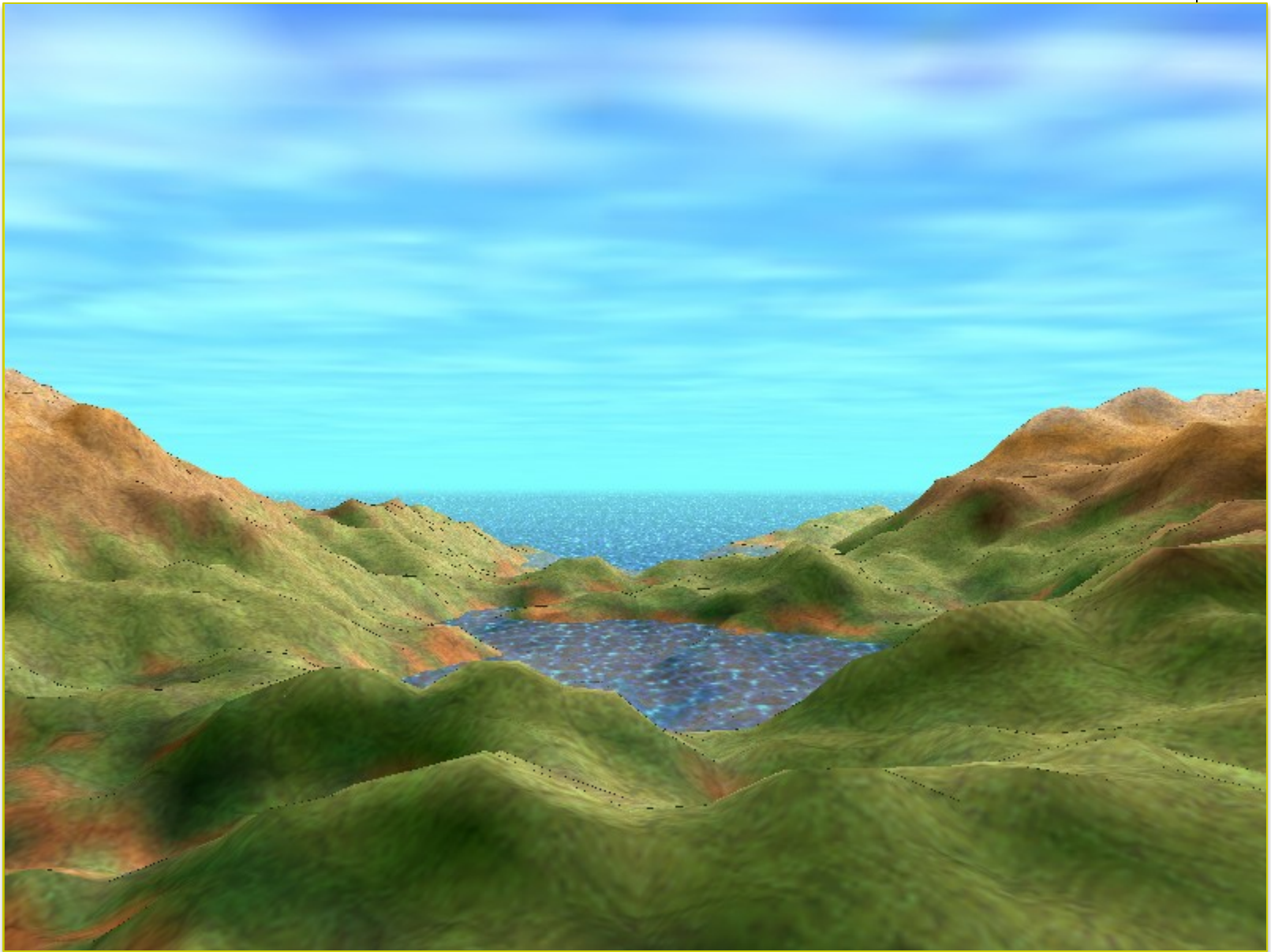












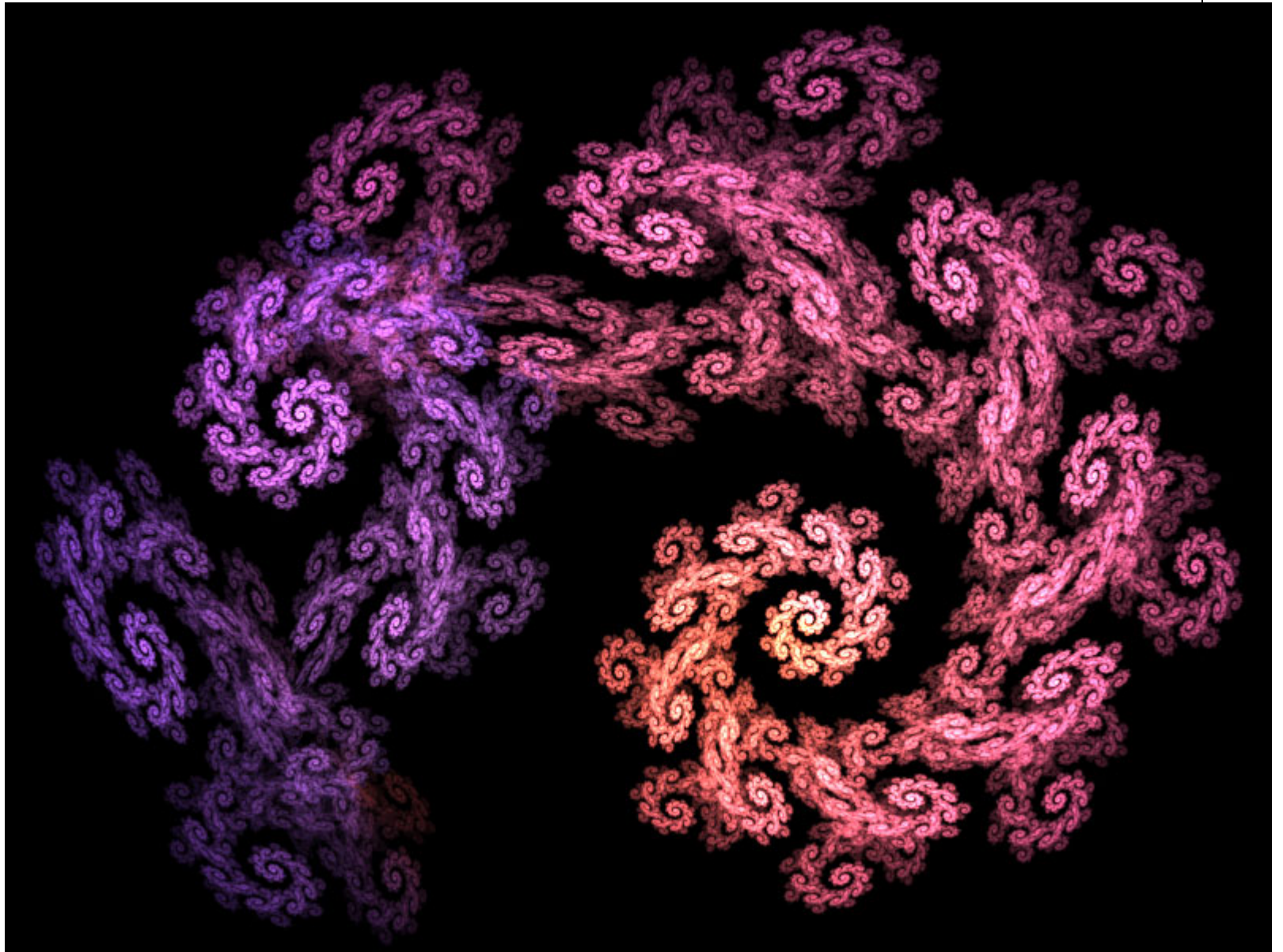
## Применения фракталов.

1. Теория турбулентных процессов (газодинамика, гидродинамика): связь с теорией масштабной инвариантности Колмогорова.
2. Вытеснение нефти водой в пористой среде и запирание нефти в водяных ловушках. Фронт вытеснения образует «вязкие пальцы», имеющие фрактальную структуру.
3. Исследование фазовых переходов: фрактальные границы раздела сред.
4. Исследование переходных процессов от упорядоченного состояния к хаосу, границы между которыми носят фрактальный характер.
5. Сжатие изображения: нахождение подобных областей и сохранение в файле только коэффициентов подобия.



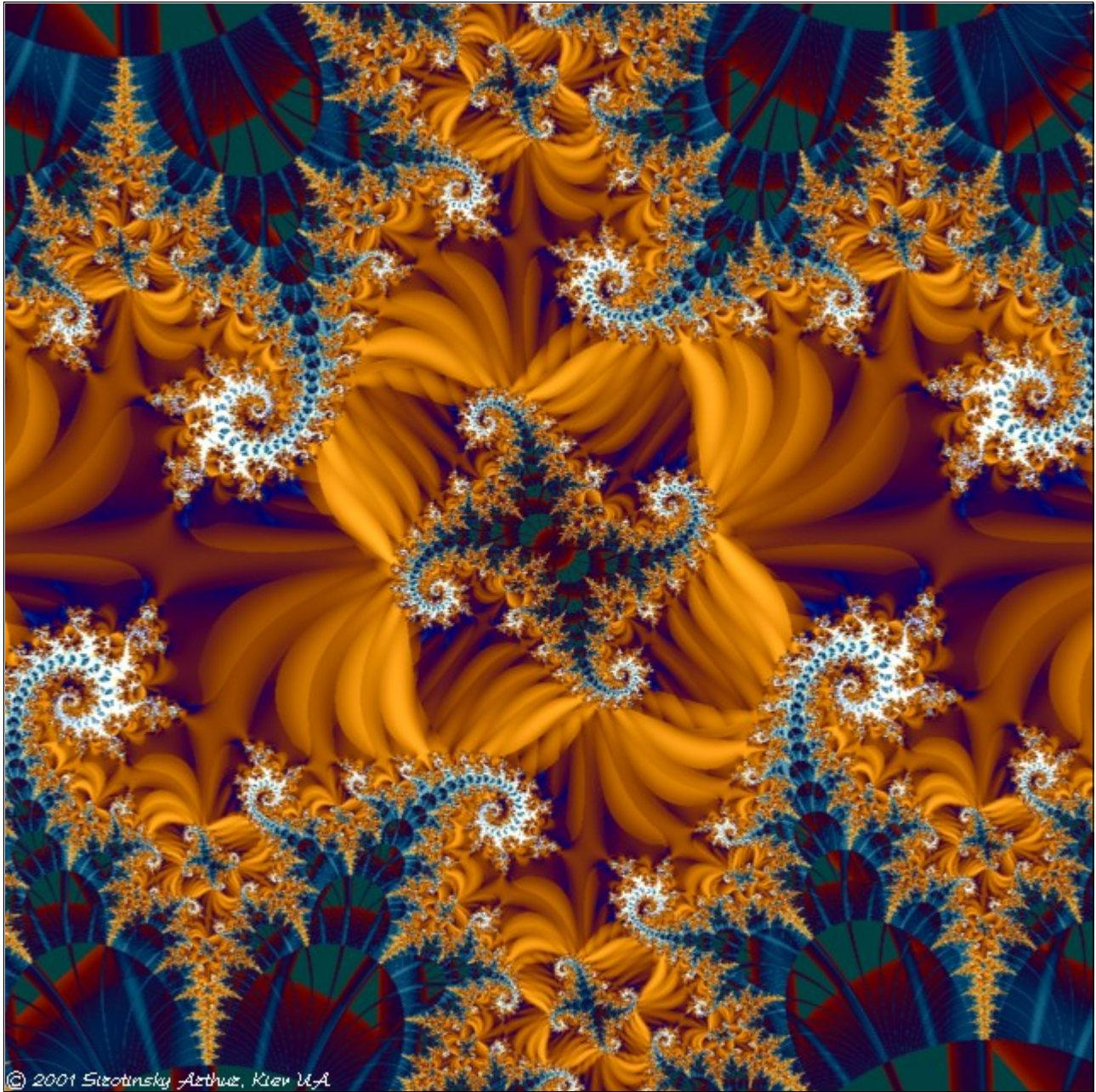
6. Задачи распознавания (радиолокация и т.д.).
7. Создание волноведущих систем с высокими эксплуатационными свойствами на основе фрактальных элементов.
8. Создание малогабаритных фрактальных антенн с высоким качеством диаграммы направленности.
9. Дифракция на фракталах: проектирование отражательных фазовых решеток с интенсивным рассеиванием фазовой энергии в широких частотных диапазонах.
10. Дифракция на фракталах: изучение агрегаций фрактальных кластеров частиц в коллоидах.
11. Дифракция на фракталах: изучение фрактального строения пористых структур.

- **И, наконец, фракталы – это  
очень красивые  
математические объекты!**



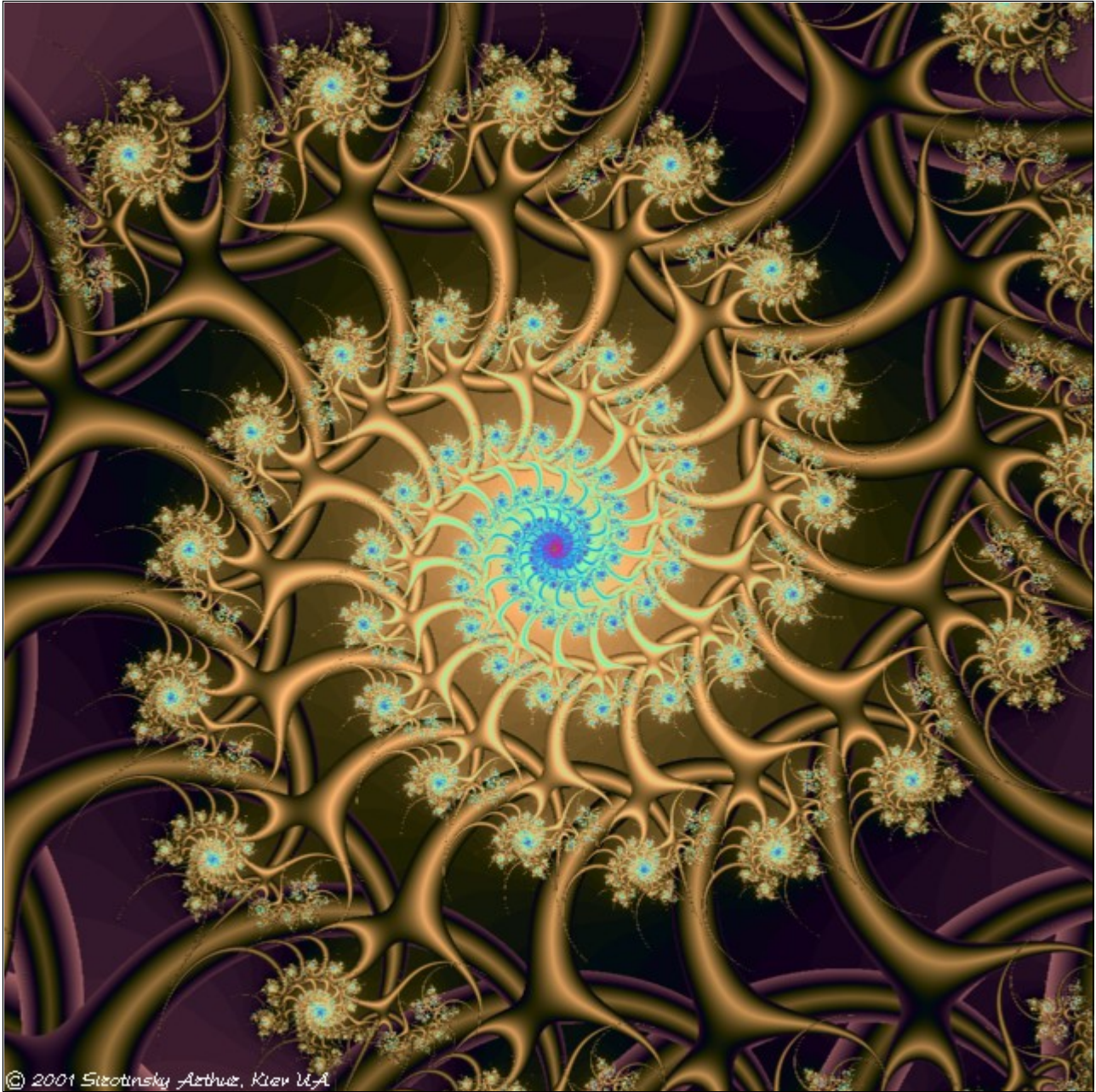




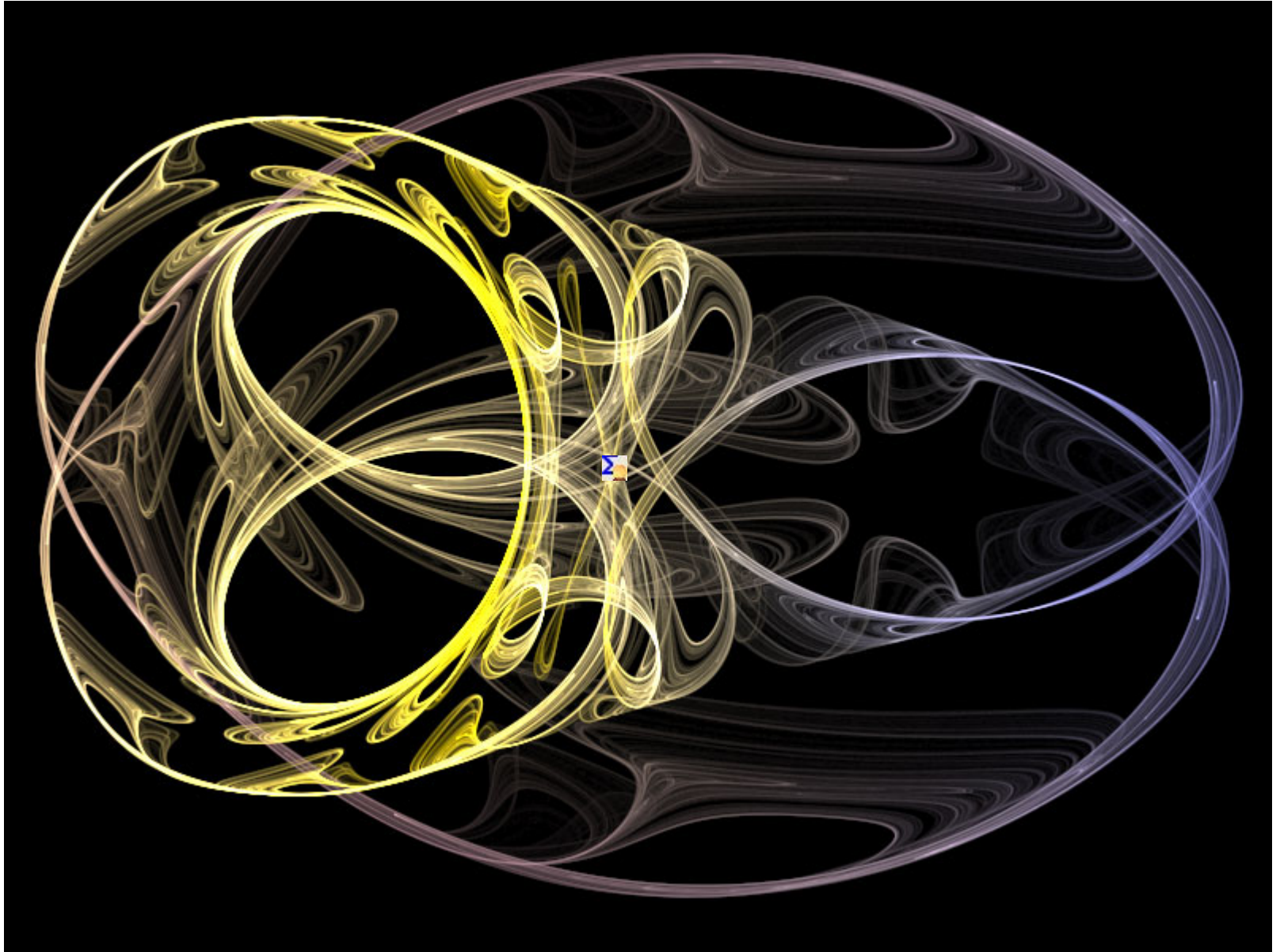


© 2001 Sizotinsky Artuz, Kiev U.A.

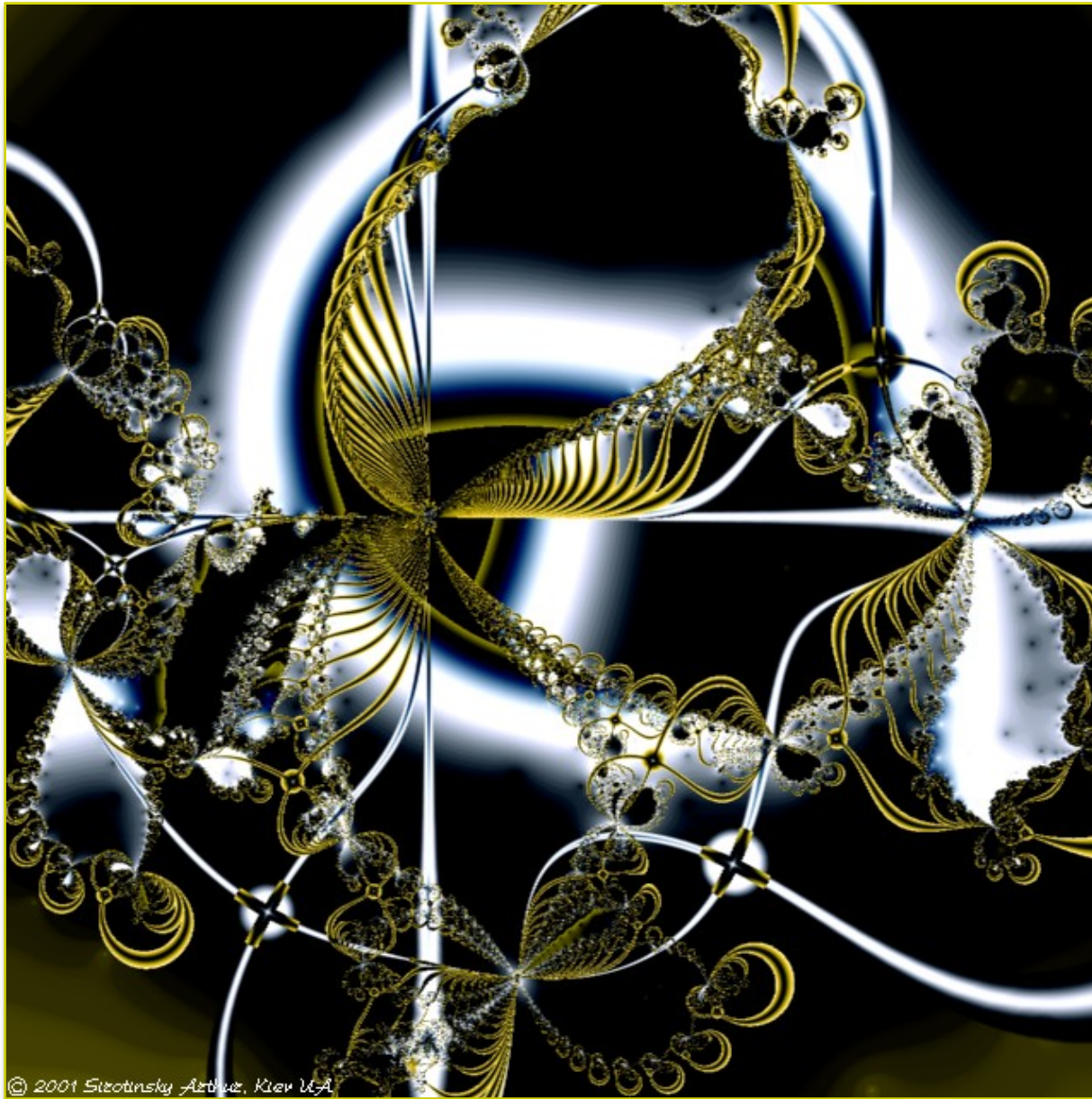




© 2001 Sizotinsky, Arthur, Kiev, U.A.



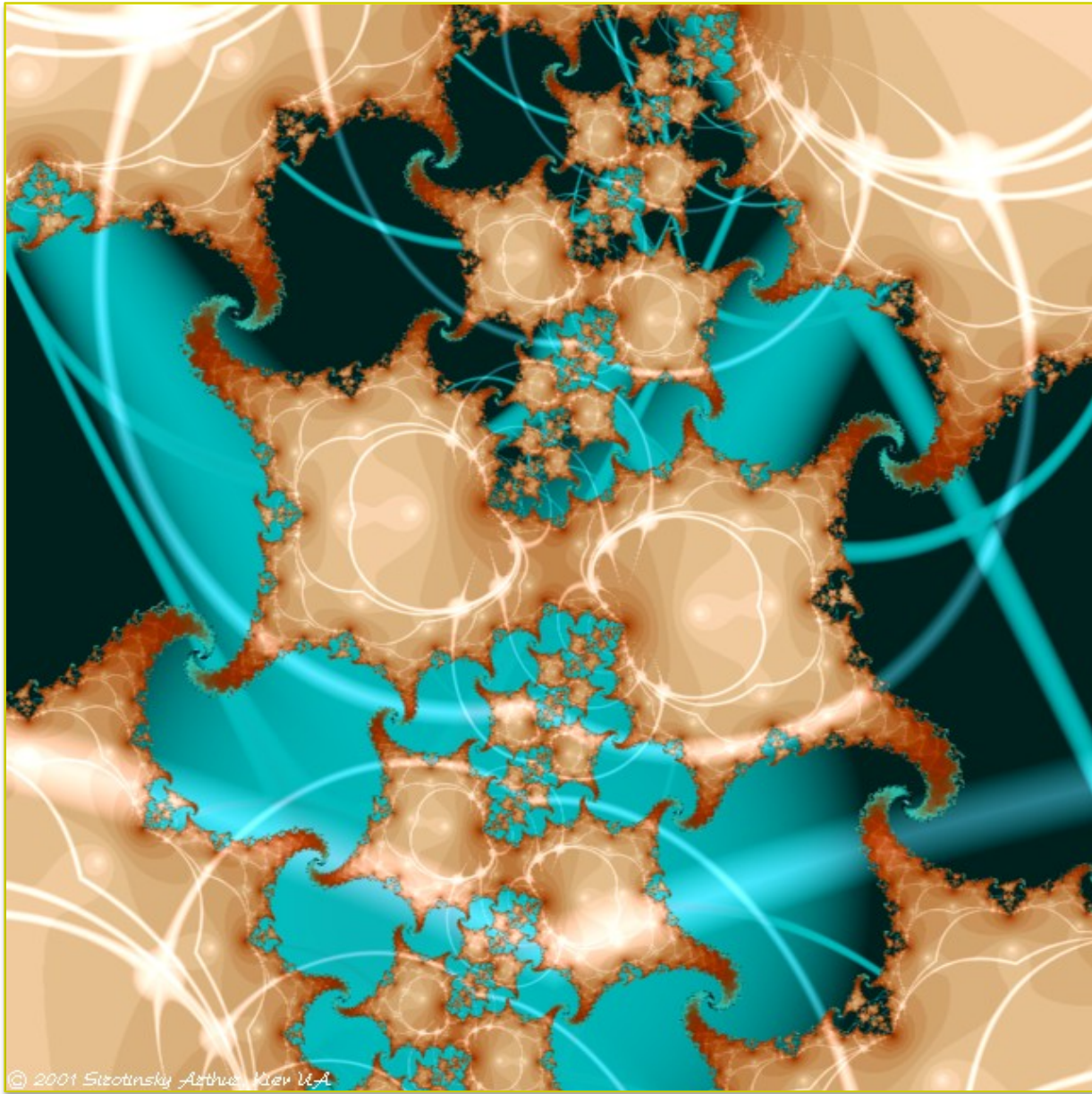




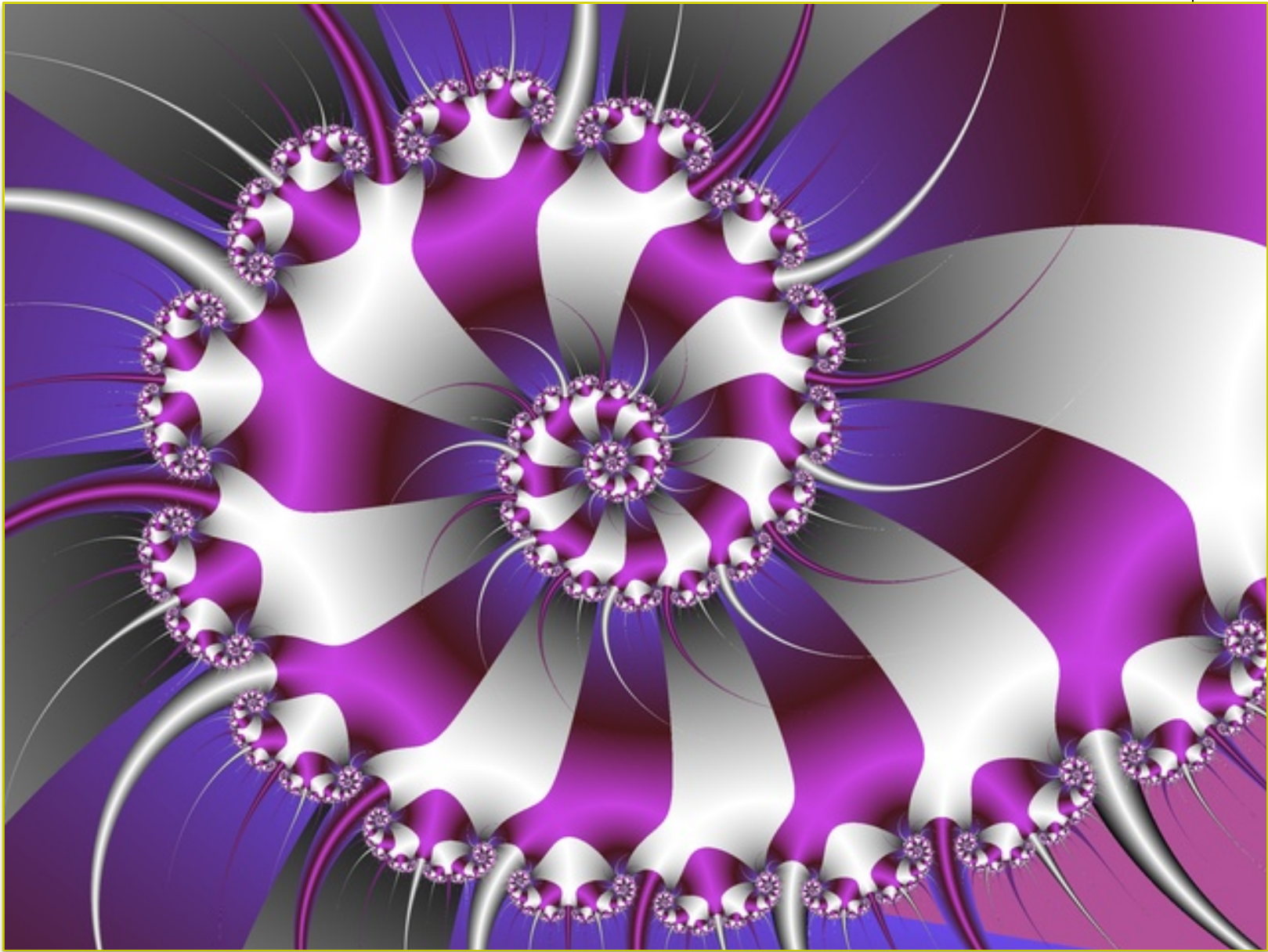
© 2001 Sizotinsky Arthur, Kiev UA







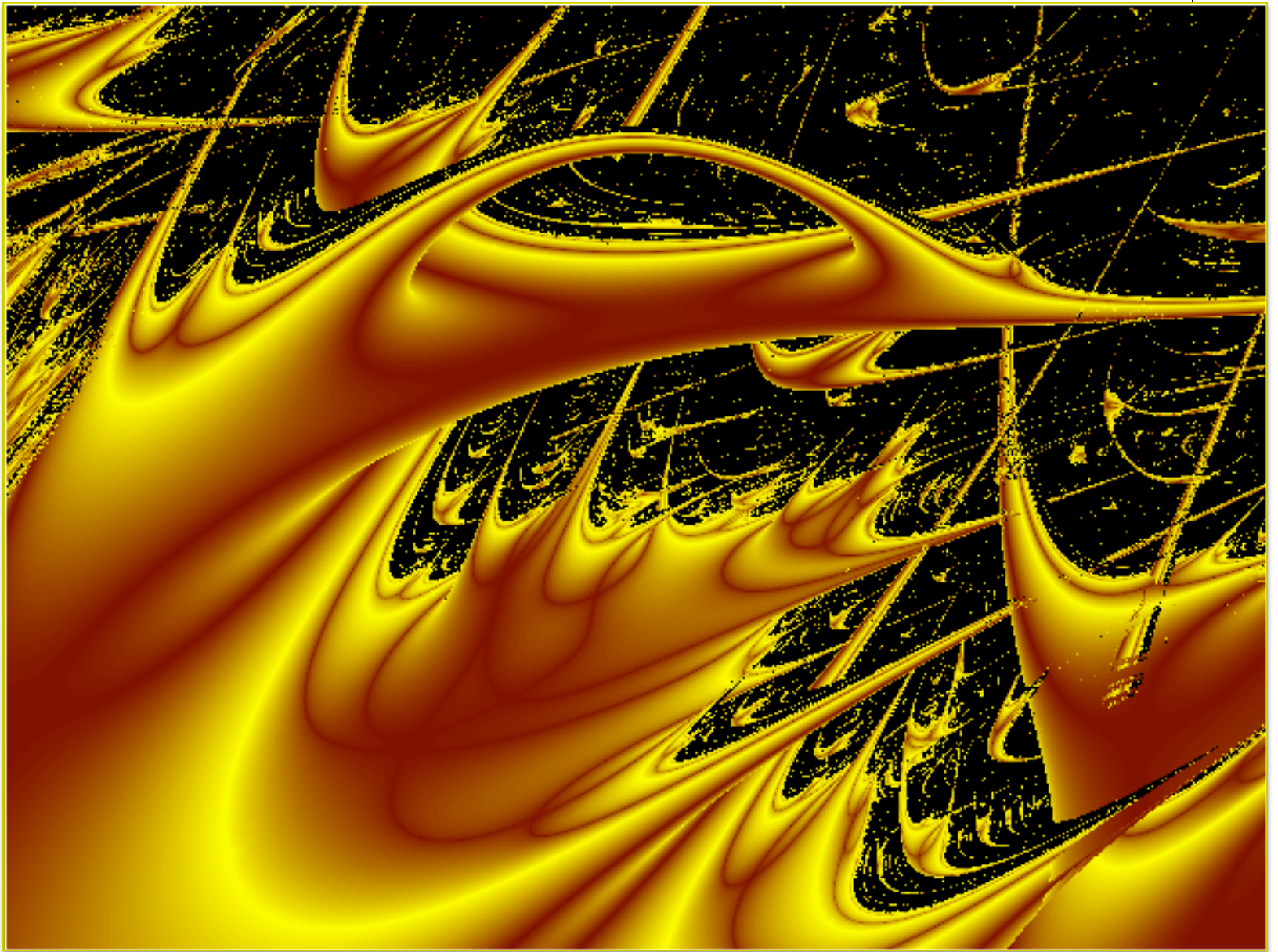
© 2001 Sizotinsky Arthur Kiev U.A

















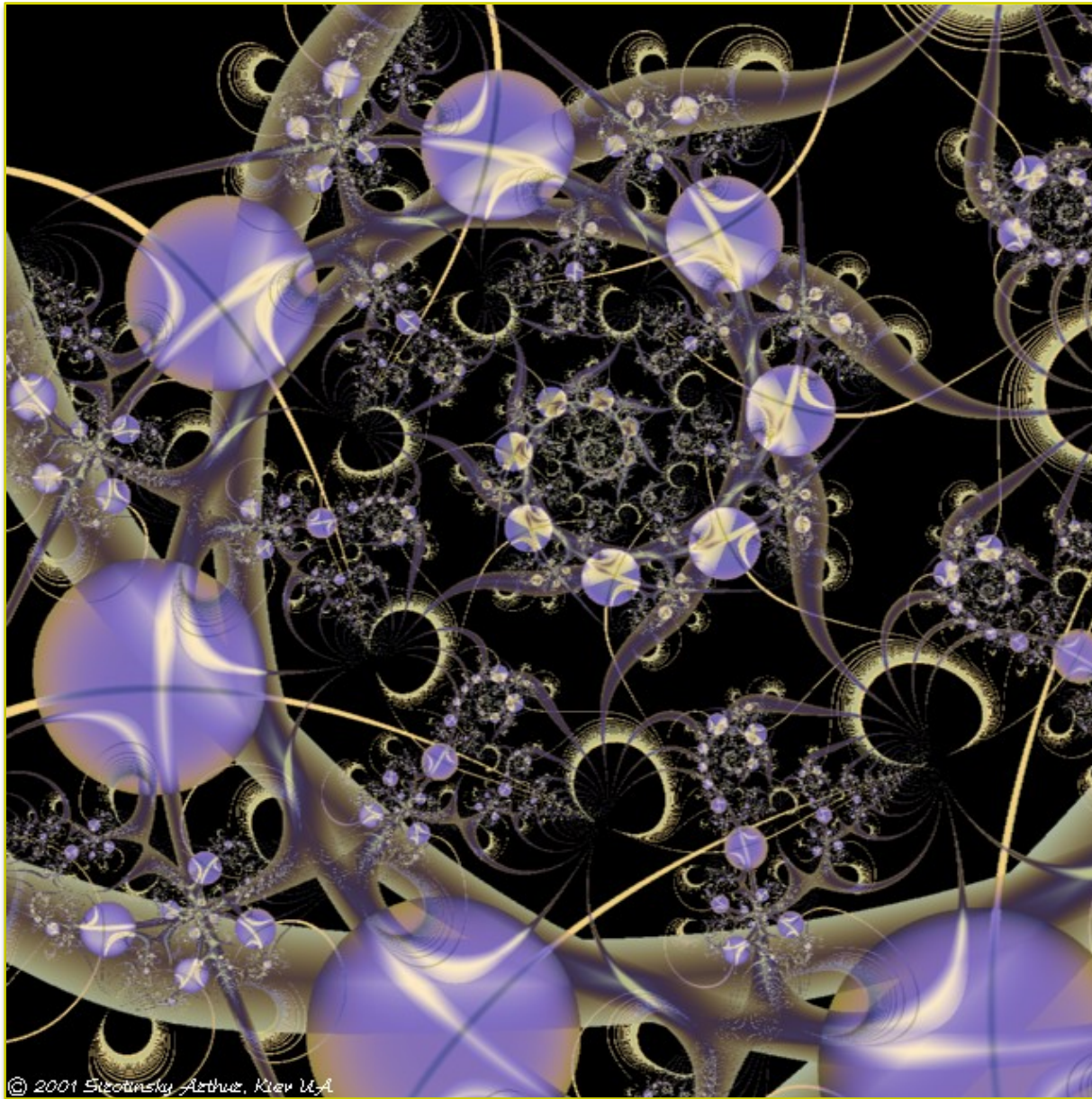






© 2001 Sitotinsky Arthur, Kiev UA





© 2001 Sitovinsky, Arthur, Kiev, U.A.



