Линейная алгебра

Овчинников Алексей Витальевич

Литература

1. С. Б. Кадомцев. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
2. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Линейная алгебра.
3. Н. Ч. Крутицкая, А. В. Тихонравов, А. А. Шишкин. Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

1. Обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.
$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.
$\mathbb{K}$ — любое из перечисленных множеств.
$\mathbb{K}_0$ — множество $\mathbb{K} \setminus 0$.
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
$\mathbb{K}^n$ — множество столбцов высоты n с элементами из $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}^{m\times n}$ — множество матриц размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{K}$ (m строк, n столбцов).

2. Числовое поле

Числовое поле (**ЧП**) — это множество чисел, в котором корректны арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление на ненулевое число.
Примеры числовых полей: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Не являются числовыми полями: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
$\mathbb{K}$ — любое из перечисленных числовых полей.

3. Умножение матриц

Будем использовать нумерацию элементов матрицы с помощью верхних и нижних индексов; верхний индекс обозначает номер строки, нижний — номер столбца. Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Разбиение этой матрицы на столбцы имеет вид

$$A = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_m],$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_m = \begin{pmatrix} a_m^1 \\ a_m^2 \\ \vdots \\ a_m^n \end{pmatrix}.$$

Разбиение этой матрицы на строки имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A^1 &= (a_1^1 \quad a_2^1 \quad \dots \quad a_m^1), \\ A^2 &= (a_1^2 \quad a_2^2 \quad \dots \quad a_m^2), \\ &\dots \\ A^n &= (a_1^n \quad a_2^n \quad \dots \quad a_m^n). \end{aligned}$$

Рассмотрим матрицы $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times p}$. Их произведение — это матрица $C \in \mathbb{K}^{n\times p}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$\boxed{c_k^j = \sum_{l=1}^{m} a_l^j b_k^l, \qquad \begin{matrix} j = 1, \dots, n, \\ k = 1, \dots, p. \end{matrix}}$$

Рассмотрим разбиение матрицы C на столбцы:

$$C = [C_1 \quad \dots \quad C_p],$$

и обсудим строение k-го столбца:

$$C_k = \begin{pmatrix} c_k^1 \\ \vdots \\ c_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{l=1}^{m} a_l^1 b_k^l \\ \vdots \\ \sum\limits_{l=1}^{m} a_l^n b_k^l \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{m} \begin{pmatrix} a_l^1 \\ \vdots \\ a_l^n \end{pmatrix} b_k^l = \sum_{l=1}^{m} A_l b_k^l = A \cdot B_k.$$

Таким образом,

(1) *k-й столбец матрицы AB равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам k-го столбца матрицы B.*
(2) *k-й столбец матрицы AB равен произведению матрицы A на k-й столбец матрицы B.*

Задача. Сформулируйте и докажите самостоятельно аналогичное утверждение для строк матрицы AB.

4. Группа

Группа $(G, *)$ — это множество G, снабженное операцией

$$* : G \times G \to G, \quad (a, b) \mapsto a * b,$$

удовлетворяющей следующим требованиям:

(1) $\forall a, b, c \in G$: $(a * b) * c = a * (b * c)$ (ассоциативность);
(2) $\exists e \in G\ \forall a \in G$: $e * a = a * e = a$ (существование нейтрального элемента);
(3) $\forall a \in G\ \exists a' \in G$: $a * a' = a' * a = e$ (существование обратного элемента). Обратный элемент обозначается a^{-1}.

5. Примеры групп

1. $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$; $(\mathbb{C}, +)$. Здесь $e = 0$.
2. $(\mathbb{R}_+, \cdot)$. Здесь $e = 1$.
3. $(\mathbb{Q}_0, \cdot)$; $(\mathbb{R}_0, \cdot)$; $(\mathbb{C}_0, \cdot)$. Здесь $e = 1$.
4. $GL(n; \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : \det A \neq 0\}$. Операция — умножение матриц, $e = \mathbf{I}$ (единичная матрица порядка n). (Проверьте!)

Вопрос. Что является обратным элементом?

5. $SL(n; \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : \det A = 1\}$. Операция — умножение матриц, $e = \mathbf{I}$ (единичная матрица порядка n). (Проверьте!)
6. $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Операция — умножение комплексных чисел, $e = 1$. (Проверьте!)

Вопрос. Что является обратным элементом?

7. $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in [0, 2\pi) \right\}$. Операция — умножение матриц. (Проверьте!)

Вопрос. Что является единичным элементом? Что является обратным элементом?

Задача. Рассмотрим множество G монотонных строго возрастающих числовых функций на отрезке $[1, -1]$ и введем на этом множестве операцию композиции функций:

$$\forall f, g \in G: \quad (f * g)(x) = f(g(x)), \quad x \in [-1, 1].$$

Покажите, что $(G, *)$ — группа. Что является нейтральным элементом этой группы? Что представляет собой обратный элемент?

6. Простейшие свойства групп

Теорема. *Пусть $(G, *)$ — группа.*

(1) *Нейтральный элемент в группе единствен.*
(2) $\forall a \in G$ *обратный элемент* a^{-1} *единствен.*
(3) $\forall a \in G$ *имеем* $(a^{-1})^{-1} = a$.
(4) $\forall a, b, c \in G$: $a * b = a * c \Rightarrow b = c; \quad b * a = c * a \Rightarrow b = c$.

Доказательство. 1. Допустим, что $\exists e' \neq e$ такой, что $\forall a \in G$: $e' * a = a = a * e'$. Положим $a = e$; тогда $e' * e = e$. С другой стороны, по определению e, $e' * e = e'$. Итак, $e' = e$.
2. Пусть $b = a^{-1}$. Допустим, что $\exists c$ такой, что $a * c = c * a = e$. Тогда

$$c = c * e = c * (a * b) = (c * a) * b = e * b = b.$$

Завершите доказательство самостоятельно. □

7. Абелевы группы

Группа $(G, *)$ называется *абелевой* (коммутативной), если

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in G.$$

В случае абелевых групп групповая операция часто называется сложением и обозначается знаком $+$, обратный элемент для a называется противоположным и обозначается $-a$, а единичный элемент называется нулем и обозначается 0.

Вопрос. Какие из перечисленных выше групп являются абелевыми?

8. Подгруппы

Пусть $(G, *)$ — группа. Непустое подмножество $S \subset G$ называется *подгруппой* группы G, если выполнены следующие условия:

(1) $\forall s \in S$: $s^{-1} \in S$;
(2) $\forall s, t \in S$: $st \in S$.

Обозначение:
$S \subset G$ — подмножество группы G;
$S \Subset G$ — подгруппа группы G.

Теорема. *Пусть $(G, *)$ — группа. Если $S \Subset G$, то S является группой относительно операции $*$.*

Задача. Докажите теорему самостоятельно.

9. Примеры подгрупп

1. $(\mathbb{Z}, +) \Subset (\mathbb{Q}, +) \Subset (\mathbb{R}, +) \Subset (\mathbb{C}, +)$.
2. $U(1) \Subset (\mathbb{C}_0, \cdot)$.
3. $SL(n, \mathbb{K}) \Subset GL(n, \mathbb{K})$.
4. $SO(2) \Subset SL(2, \mathbb{R})$; $SO(2) \Subset GL(2, \mathbb{R})$.

10. Гомоморфизм групп

Пусть $(G, *)$ и $(H, \star)$ — две группы. Отображение $f : G \to H$ называется *гомоморфизмом*, если

$$f(a * b) = f(a) \star f(b) \quad \forall a, b \in G.$$

Множество всех гомоморфизмов групп $(G, *)$ и $(H, \star)$ обозначается $\mathrm{Hom}(G, H)$.

Теорема. *Пусть $f : G \to H$ — гомоморфизм групп $(G, *)$ и $(H, \star)$. Тогда:*

(1) $f(e_G) = e_H$;
(2) $\forall g \in G : f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$.

Доказательство.
1. Так как $e_G = e_G * e_G$, то имеем

$$f(e_G) = f(e_G * e_G) = f(e_G) \star f(e_G).$$

Умножим обе части на $f(e_G)^{-1}$; получим

$$e_H = f(e_G) \star f(e_G)^{-1} = f(e_G) \star f(e_G) \star f(e_G)^{-1} = f(e_G).$$

2. Поскольку $g * g^{-1} = e_G = g^{-1} * g$, находим

$$f(g * g^{-1}) = f(e_G) = f(g^{-1} * g) \quad \Rightarrow$$
$$f(g) \star f(g^{-1}) = e_H = f(g^{-1}) \star f(g);$$

отсюда в силу единственности обратного элемента вытекает $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$. □

11. Примеры гомоморфизмов групп

1. $(G, *) = (\mathbb{R}, +)$, $(H, \star) = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $f = \exp$:
$$f(a * b) \equiv e^{a+b} = e^a \cdot e^b \equiv f(a) \star f(b).$$
2. $(G, *) = (\mathbb{C}_0, \cdot)$, $(H, \star) = (\mathbb{R}_0, \cdot)$, $f = |\cdot|$:
$$f(a * b) = |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \equiv f(a) \star f(b).$$
3. $(G, *) = GL(n; \mathbb{K})$, $(H, \star) = (\mathbb{K}_0, \cdot)$, $f = \det$:
$$f(a * b) \equiv \det(a \cdot b) = \det a \cdot \det b \equiv f(a) \star f(b).$$

12. Ядро и образ гомоморфизма

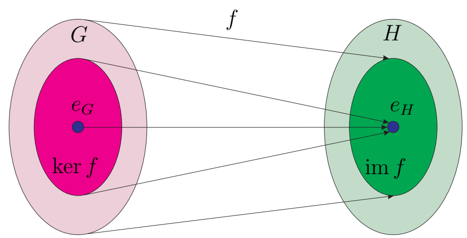
Пусть $(G, *)$ и $(H, \star)$ — две группы, $f : G \to H$ — гомоморфизм.

Ядро $\ker f$ гомоморфизма f — это множество элементов группы G, образом которых является нейтральный элемент в H:

$$\ker f = \left\{ g \in G \;\middle|\; f(g) = e_H \right\}.$$

Образ $\mathrm{im}\, f$ гомоморфизма f — это множество элементов группы H, имеющих прообраз в группе G:

$$\mathrm{im}\, f = \left\{ h \in H \;\middle|\; \exists g \in G : h = f(g) \right\}.$$



Теорема. *Пусть $f : G \to H$ — гомоморфизм групп.*

$$\ker f \Subset G, \qquad \operatorname{im} f \Subset H.$$

Доказательство.

1. Проверим, что $\ker f \Subset G$. Имеем:

$$g_1 \in \ker f \quad \Longleftrightarrow \quad f(g_1) = e_H,$$
$$g_2 \in \ker f \quad \Longleftrightarrow \quad f(g_2) = e_H;$$

поэтому

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \star f(g_2) = e_H \quad \Longleftrightarrow \quad g_1 * g_2 \in \ker f.$$

2. Проверим, что $\operatorname{im} f \Subset H$. Имеем:

$$h_1 \in \operatorname{im} f \quad \Longleftrightarrow \quad \exists g_1 \in G : h_1 = f(g_1),$$
$$h_2 \in \operatorname{im} f \quad \Longleftrightarrow \quad \exists g_2 \in G : h_2 = f(g_2).$$

Получаем

$$h_1 \star h_2 = f(g_1) \star f(g_2) = f(g_1 * g_2) \in H,$$

что и требовалось. □

13. Примеры

Найдем ядро и образ каждого из рассмотренных выше гомоморфизмов.

1. $(G, *) = (\mathbb{R}, +)$, $(H, \star) = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $f = \exp$. Здесь $e_G = 0$, $e_H = 1$. Условие $f(g) = e_H$ принимает вид $e^g = 1$. Поскольку единственным решением уравнения $e^g = 1$ является число 0, имеем $\ker f = 0 = e_G$. Поскольку множество значений функции $g \mapsto e^g$ есть $\mathbb{R}_+$, имеем $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+ = H$.

2. $(G, *) = (\mathbb{C}_0, \cdot)$, $(H, \star) = (\mathbb{R}_0, \cdot)$, $f = |\cdot|$. Здесь $e_G = 1$, $e_H = 1$. Числа, удовлетворяющие условию $f(g) = e_H$, т.е. условию $|z| = 1$, имеют вид $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, поэтому $\ker f = U(1)$. Очевидно, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_0 = H$.

3. $(G, *) = GL(n; \mathbb{K})$, $(H, \star) = (\mathbb{K}_0, \cdot)$, $f = \det$. Здесь $e_G = \mathbf{I}$, $e_H = 1$ ($\mathbf{I}$ — единичная матрица порядка n). Условие $f(g) = e_H$ записывается в виде $\det g = 1$, т.е. $\ker f = SL(n, \mathbb{K})$. Очевидно, $\operatorname{im} f = \mathbb{K}_0 = H$.

14. Изоморфизм групп

Пусть $(G, *)$ и $(H, \star)$ — две группы. Гомоморфизм $f : G \to H$ называется *изоморфизмом*, если он взаимно однозначен.

Если существует изоморфизм группы $(G, *)$ на группу $(H, \star)$, то эти группы называются изоморфными; обозначение $(G, *) \simeq (H, \star)$ или $G \simeq H$.

Вопрос. Какие из приведенных гомоморфизмов являются изоморфизмами?

Задача. Доказать, что $U(1) \simeq SO(2)$, построив изоморфизм в явном виде.

Изоморфные группы обладают одинаковыми алгебраическими свойствами.

Отметим, что отношение изоморфности групп обладает следующими свойствами:

(1) $G \simeq G$;
(2) $G \simeq H \Rightarrow H \simeq G$;
(3) если $G \simeq H$ и $H \simeq K$, то $G \simeq K$.

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема. *Гомоморфизм групп $f : G \to H$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = e_G$ и $\operatorname{im} f = H$.*

Доказательство.

1. Пусть $f : G \to H$ — изоморфизм. Тогда e_H имеет единственный прообраз в G и

$$f^{-1}(e_H) = e_G = \ker f.$$

Кроме того, любой элемент $h \in H$ имеет прообраз, т.е. $\operatorname{im} f = H$.

2. Пусть $\ker f = e_G$ и $\operatorname{im} f = H$. Докажем, что гомоморфизм f взаимно однозначен. Ясно, что у любого $h \in H$ имеется прообраз в G.

Остается доказать, что

$$\forall g_1, g_2 \in G, \ g_1 \neq g_2 : \quad f(g_1) \neq f(g_2).$$

Допустим противное, т.е.

$$\exists g_1, g_2 \in G, \ g_1 \neq g_2 : \quad f(g_1) = f(g_2).$$

Имеем:

$$f(g_1 * g_2^{-1}) = f(g_1) \star f(g_2^{-1}) = f(g_1) \star f(g_2)^{-1} = f(g_2) \star f(g_2)^{-1} = e_H,$$

т.е. $g_1 * g_2^{-1} \in \ker f$. Поскольку $\ker f = e_G$, получаем $g_1 * g_2^{-1} = e_G$, т.е. $g_2 = g_1$, противоречие. □

Задача. Проиллюстрируйте теорему на примере изоморфизма $U(1) \simeq SO(2)$.

15. Линейное пространство

Линейное пространство (**ЛП**) $V(\mathbb{K})$ над числовым полем $\mathbb{K}$ — это абелева группа V, снабженная операцией умножения элементов группы на числа из поля $\mathbb{K}$ такой, что выполняются следующие требования:

(1) $\forall \mathbf{x} \in V$: $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;
(2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$: $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$;
(3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{x} \in V$: $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$;
(4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{x} \in V$: $(\alpha \cdot \beta)\mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta\mathbf{x})$.

Нейтральный элемент этой абелевой группы называется нулевым вектором и обозначается $\mathbf{0}$.

16. Второе определение ЛП

Линейное пространство (**ЛП**) $V(\mathbb{K})$ над числовым полем $\mathbb{K}$ — это множество V элементов $\mathbf{x}, bfy, \ldots$ произвольной природы (векторов), в котором введены две операции:

(A) сложение векторов

$$+ : V \times V \to V, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

(B) умножение вектора на число

$$\bullet : \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\alpha, \mathbf{x}) \mapsto \alpha\mathbf{x}$$

так, что выполнены следующие аксиомы:

(1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (коммутативность сложения);
(2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$: $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (ассоциативность сложения);
(3) $\exists \mathbf{0} \in V$ $\forall \mathbf{x} \in V$: $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ (существование нулевого вектора);
(4) $\forall \mathbf{x} \in V$ $\exists \mathbf{x}' \in V$: $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ (существование противоположного вектора);
(5) $\forall \mathbf{x} \in V$: $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;
(6) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$: $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$;
(7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{x} \in V$: $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$;
(8) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{x} \in V$: $(\alpha \cdot \beta)\mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta\mathbf{x})$.

Задача. Доказать эквивалентность двух определений **ЛП**.

17. Примеры линейных пространств

1. $\mathbb{Q}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$; $\mathbb{R}(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$; $\mathbb{C}(\mathbb{C})$.
2. $\mathbb{Q}(\mathbb{R})$ — не **ЛП**. Объясните причину и приведите еще несколько аналогичных примеров.
3. Множества «геометрических векторов» на прямой V_1, на плоскости V_2, в пространстве V_3 — **ЛП** над $\mathbb{R}$.
4. $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как **ЛП** над различными **ЧП** (ср. пример 1). Приведите несколько примеров.
5. $\mathbb{K}^{m\times n}$ можно рассматривать как **ЛП** над различными **ЧП** (ср. пример 1). Приведите несколько примеров.
6. Множества $C(X)$, $C^p(X)$, состоящие из всех непрерывных (p раз непрерывно дифференцируемых) на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ функций, можно рассматривать как **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$. Операции:

$$\forall f, g \in C(X),\ \forall x \in X:$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$
$$\forall f \in C(X),\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x \in X:$$
$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

7. Множество $\mathrm{Pol}(n, \mathbb{K})$ всех полиномов степени не выше n с коэффициентами из $\mathbb{K}$, т.е. функций вида

$$x(t) = a_0 + a_1 t^1 + \dots + a_n t^n,$$

где $a_k \in \mathbb{K}$, $k = 0, \dots, n$.

Вопрос. Является ли **ЛП** множество всех полиномов степени n? Ответ обоснуйте.

8. Множество $\mathrm{Trig}(n, \mathbb{K})$ всех тригонометрических полиномов порядка не выше n с коэффициентами из $\mathbb{K}$, т.е. функций вида

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, \dots, n$.

Вопрос. Является ли **ЛП** множество всех тригонометрических полиномов порядка n? Ответ обоснуйте.

9. Патологический пример. $V = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, операции заданы формулами:

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V = \mathbb{R};$$
$$\alpha \odot \mathbf{x} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{x}^\alpha, \quad \mathbf{x} \in V = \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

Проверьте выполнение всех аксиом.

18. Пример ЛП: Сопряженное пространство

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП**. *Линейным функционалом* (**ЛФ**) на **ЛП** V называется любая функция $\boldsymbol{\xi} : V \to \mathbb{K}$, обладающая следующими свойствами:

(1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$: $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y})$;
(2) $\forall \mathbf{x} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\boldsymbol{\xi}(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$.

Иными словами, **ЛФ** — это гомоморфизм абелевой группы $(V, +)$ в абелеву группу $(\mathbb{K}, +)$, сохраняющий операцию умножения на числа из $\mathbb{K}$.

Множество всех **ЛФ** на **ЛП** V обозначается V^* и называется пространством, сопряженным к V.

Введем операции сложения **ЛФ** и умножения **ЛФ** на число:

$$\forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in V^* : (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in V;$$
$$\forall \boldsymbol{\xi} \in V^*,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : (\alpha \boldsymbol{\xi})(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in V.$$

Нулевым вектором сопряженного пространства V^* является **ЛФ** $\boldsymbol{\theta}$ такой, что $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) = 0$ $\forall \mathbf{x} \in V$.

Теорема. *Если V — **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{K}$, то V^* также является **ЛП** над $\mathbb{K}$.*

Задача. Докажите теорему самостоятельно.

Задача. $V = \mathrm{Pol}(n, \mathbb{R})$. Для любого $\mathbf{x} = x(t) \in V$ положим

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \int_0^1 x(t)dt.$$

Докажите, что $\boldsymbol{\xi}$ — **ЛФ**.

19. Простейшие свойства ЛП

Теорема. *Пусть $V(\mathbb{K})$ — произвольное **ЛП**.*

(1) *Нулевой элемент $\mathbf{0}$ единствен.*
(2) $\forall \mathbf{x} \in V$ *противоположный элемент $\mathbf{x}'$ единствен.*
(3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$: $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
(4) $\forall \mathbf{x} \in V$: $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
(5) $\forall \mathbf{x} \in V$ *противоположный элемент $\mathbf{x}'$ равен* $-1 \cdot \mathbf{x} \equiv -\mathbf{x}$.

Доказательство. 1, 2, 3 следуют из аналогичной теоремы для групп.
4. $0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} + 1 \cdot \mathbf{x} = (0+1)\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x} \Rightarrow 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
5. Положим $\mathbf{y} = (-1) \cdot \mathbf{x}$. Тогда

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = 1 \cdot \mathbf{x} + (-1) \cdot \mathbf{x} = (1 + (-1))\mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow \mathbf{y}$ — противоположный для $\mathbf{x}$. □

20. Линейная комбинация

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП**, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$.

Линейная комбинация (**ЛК**) векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$ с коэффициентами $\alpha^1, \dots, \alpha^p \in \mathbb{K}$ — это выражение

$$\alpha^1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^p \mathbf{x}_p \equiv \sum_{k=1}^{p} \alpha^k \mathbf{x}_k.$$

ЛК векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$ называется *тривиальной*, если все коэффициенты этой **ЛК** равны нулю, и *нетривиальной*, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Очевидно, тривиальная **ЛК** всегда равна нулевому вектору.

21. Линейная зависимость и независимость

Векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$ называются *линейно зависимыми* (**ЛЗ**), если существует их нетривиальная ЛК, равная нулевому вектору.

Пример: Рассмотрим **ЛП** $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

Элементы $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ **ЛЗ**, так как существует нетривиальная **ЛК** этих векторов, равная $\mathbf{0}$:

$$-2 \cdot \mathbf{x}_1 + 1 \cdot \mathbf{x}_2 = -2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$ называются *линейно независимыми* (**ЛН**), если из равенства их **ЛК** нулевому вектору следует, что эта **ЛК** тривиальна.

Пример: Рассмотрим **ЛП** $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

Векторы $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ **ЛН**. Действительно,

$$\alpha^1 \mathbf{y}_1 + \alpha^2 \mathbf{y}_2 = \alpha^1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^1\\\alpha^2\end{pmatrix}.$$

Последний столбец может быть нулевым тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$.

22. Гомоморфизм и изоморфизм **ЛП**

Пусть $(V, \mathbb{K})$ (операции $+, \cdot$) и $(W, \mathbb{K})$ (операции $\oplus, \odot$) — два **ЛП** *над одним и тем же* ***ЧП*** $\mathbb{K}$.

Отображение $f : V \to W$ называется *гомоморфизмом*, если

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y) \quad \forall x, y \in V,$$
$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \odot f(x) \quad \forall x \in V, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Множество всех гомоморфизмов **ЛП** V, W обозначается $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Теорема. *Пусть* $f : V \to W$ — *гомоморфизм.*

(1) $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$;
(2) $\forall \mathbf{x} \in V$: $f(-x) = -f(x)$.

Задача. Докажите теорему самостоятельно.

Изоморфизм **ЛП** V и W — это взаимно однозначный гомоморфизм. **ЛП** V и W называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f : V \to W$; в этом случае пишут $V \simeq W$.

Теорема. *Пусть* $V \simeq W$, $f : V \to W$ — *изоморфизм.*

(1) $\forall \mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_V$: $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}_W$.
(2) *Если* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$ — ***ЛН*** *векторы, то векторы* $f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p) \in W$ *также* ***ЛН***.
(3) *Если* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$ — ***ЛЗ*** *векторы, причем нетривиальная* ***ЛК*** *этих векторов, равная* $\mathbf{0}_V$, *имеет коэффициенты* $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$, *то векторы* $f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p) \in W$ *также* ***ЛЗ***, *причем нетривиальная* ***ЛК*** *этих векторов, равная* $\mathbf{0}_W$, *имеет те же коэффициенты* $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$.

Доказательство. 1. Пусть $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_V$. Предположим, что $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$. Имеем:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W = 0 \cdot \mathbf{y} = 0 \cdot f(\mathbf{z}) = f(0 \cdot \mathbf{z}) = f(\mathbf{0}_V).$$

Таким образом, в силу взаимной однозначности отображения f, получаем $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$; противоречие.

2. Пусть $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$ — **ЛН** векторы. Предположим, что векторы $f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_p) \in W$ **ЛЗ**, т.е. $\exists \beta^1, \ldots, \beta^p \in \mathbb{K}$, не все равные 0, такие, что

$$\beta^1 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + \beta^p f(\mathbf{x}_p) = \mathbf{0}_W.$$

Имеем

$$\beta^1 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + \beta^p f(\mathbf{x}_p) = \mathbf{0}_W = f(\beta^1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \beta^p \mathbf{x}_p),$$

откуда

$$\beta^1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \beta^p \mathbf{x}_p = \mathbf{0}_V,$$

т.е. векторы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ **ЛЗ**; противоречие.

3. Докажите самостоятельно.

□

Отметим, что отношение изоморфности **ЛП** обладает следующими свойствами:

(1) $V \simeq V$;
(2) $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$;
(3) если $V \simeq W$ и $W \simeq U$, то $V \simeq U$.

Задача. Докажите самостоятельно.

23. Линейная оболочка

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП**, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$.

Линейная оболочка (**ЛО**) векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$ — это множество всех **ЛК** этих векторов, т.е. множество

$$L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) = \Big\{ \sum_{k=1}^{p} \alpha^k \mathbf{x}_k \;\Big|\; \alpha^k \in \mathbb{K},\ k = 1, \ldots, p \Big\}.$$

Теорема.

(1) *Если среди векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ *имеется нулевой вектор, то эти векторы* ***ЛЗ***.
(2) *Если система векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q+1}, \ldots, \mathbf{x}_p$ *содержит* ***ЛЗ*** *подсистему* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$, *то вся система* ***ЛЗ***.
(3) *Если векторы* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ ***ЛЗ***, *то среди них имеется вектор, являющийся* ***ЛК*** *остальных векторов.*
(4) *Если* $\mathbf{x} \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$, *то*
$$L(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) = L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p).$$
(5) *Если* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$, *то*
$$L(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k) \subset L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p).$$

Доказательство.

1. Пусть $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$; тогда

$$1 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_p$$

— нетривиальная **ЛК**, равная нулевому вектору.

2. Если векторы $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_q$ **ЛЗ**, то это означает, что $\exists \alpha^1, \ldots, \alpha^q$, не все равные 0 и такие, что

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Тогда, очевидно, **ЛК**

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha^k \mathbf{x}_k + \sum_{k=q+1}^{p} 0 \cdot \mathbf{x}_k$$

нетривиальна и равна $\mathbf{0}$.

3. Так как векторы $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_p$ **ЛЗ**, то $\exists \alpha^1, \ldots, \alpha^p$, не все равные 0, такие, что

$$\alpha^1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha^p \mathbf{x}_p = \mathbf{0}.$$

Предположим, что $\alpha^p \neq 0$. Тогда

$$\mathbf{x}_p = -\frac{\alpha^1}{\alpha^p} \mathbf{x}_1 - \cdots - \frac{\alpha^{p-1}}{\alpha^p} \mathbf{x}_{p-1},$$

что и требовалось.

4. Обозначим

$$L_1 = L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p), \quad L_2 = L(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p).$$

Требуется доказать, что $L_1 = L_2$, т.е. что

$$L_1 \subseteq L_2 \quad \text{и} \quad L_2 \subseteq L_1.$$

Первое вложение очевидно:

$$\mathbf{y} \in L_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{y} = \alpha^1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha^p \mathbf{x}_p =$$
$$= 0 \cdot \mathbf{x} + \sum_{k=1}^{p} \alpha^k \mathbf{x}_k \;\Rightarrow\; \mathbf{y} \in L_2.$$

Докажем второе. Имеем:

$$\begin{gathered}\mathbf{x} \in L_1 \ \Rightarrow \ \mathbf{x} = \beta^1\mathbf{x}_1 + \dots + \beta^p\mathbf{x}_p,\\ \mathbf{y} \in L_2 \ \Rightarrow \ \mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} + \alpha^1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^p\mathbf{x}_p =\\ = \alpha(\beta^1\mathbf{x}_1 + \dots + \beta^p\mathbf{x}_p) + \alpha^1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^p\mathbf{x}_p =\\ = (\alpha\beta^1 + \alpha^1)\mathbf{x}_1 + \dots + (\alpha\beta^p + \alpha^p)\mathbf{x}_p\\ \Rightarrow \ \mathbf{y} \in L_1.\end{gathered}$$

5. Докажите самостоятельно.

□

24. Размерность и базис ЛП

Размерность **ЛП** $V(\mathbb{K})$ — это целое неотрицательное число n, обладающее следующими свойствами:

(1) в V $\exists n$ **ЛН** векторов;
(2) любые $n+1$ векторов **ЛЗ**.

Обозначение: $n = \dim V$; пространство V называется n-мерным.

Если в **ЛП** V имеется как угодно много **ЛН** векторов, то V называется бесконечномерным, $\dim V = \infty$.

Базис **ЛП** $V(\mathbb{K})$ — это упорядоченный набор векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, обладающий следующими свойствами:

(1) векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ **ЛН**;
(2) $\forall \mathbf{x} \in V$ $\exists x^1, \dots, x^n \in \mathbb{K}$ такие, что

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \dots + x^n\mathbf{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x^k\mathbf{e}_k. \tag{1}$$

Числа $x^1, \dots, x^n$ называются координатами (компонентами) вектора $\mathbf{x}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, а формула (1) — разложением вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Правило суммирования Эйнштейна: Если в некотором одночлене индекс появляется ровно два раза, один раз вверху и один раз внизу, то считается, что по этому индексу производится суммирование; пределы изменения индекса либо указываются, либо ясны из контекста. Пример: запись $x^k\mathbf{e}_k$ $(k = 1, \dots, n)$ эквивалентна сумме (1).

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{p} x^k\mathbf{e}_k = \sum_{l=1}^{p} x^l\mathbf{e}_l,$$

имеем

$$x^k\mathbf{e}_k \equiv x^l\mathbf{e}_l, \quad k = 1, \dots, p; \quad l = 1, \dots, p.$$

Суммирование с символом Кронекера.

Символ Кронекера — это обозначение элементов единичной матрицы:

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k,\\ 0, & \text{если } j \neq k.\end{cases}$$

Часто встречаются суммы вида $a_j\delta^j_k$, $b^k\delta^j_k$ и т. п. В развернутом виде первая из этих сумм имеет вид

$$a_1\delta^1_k + a_2\delta^2_k + \dots + a_k\delta^k_k + \dots + a_n\delta^n_k.$$

Из n слагаемых в этой сумме отлично от нуля лишь одно, а именно k-е, поэтому вся сумма равна a_k. Таким образом,

$$a_j\delta^j_k = a_k.$$

Теорема. *Разложение по базису единственно, т.е. $\forall \mathbf{x} \in V$ его координаты $x^1, \dots, x^n$ определены однозначно.*

Доказательство. Предположим, что вектор $\mathbf{x}$ можно разложить по базису $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ двумя способами:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \dots + x^n\mathbf{e}_n = y^1\mathbf{e}_1 + \dots + y^n\mathbf{e}_n.$$

Вычитая из первого разложения второе, получим

$$(x^1 - y^1)\mathbf{e}_1 + \dots + (x^1 - y^1)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}.$$

Так как базисные векторы **ЛН**, заключаем, что в последнем разложении все коэффициенты равны нулю, т.е. $x^k = y^k$, $k = 1, \dots, n$. □

Условимся записывать координаты $x^1, \dots, x^n$ вектора $\mathbf{x}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в виде столбца:

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix} \ \leftrightarrow \ \mathbf{x} \text{ в базисе } \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n.$$

Теорема. *Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ **ЛП** $V(\mathbb{K})$ имеем*

$$\mathbf{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y^1\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 + y^1\\ \vdots\\ x^n + y^n\end{pmatrix}, \quad \alpha\mathbf{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha x^1\\ \vdots\\ \alpha x^n\end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Теорема. *Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{K}$, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис в V. Отображение $f : V \to \mathbb{K}^n$, сопоставляющее каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ столбец его координат, является изоморфизмом **ЛП** V и $\mathbb{K}^n$, $V \simeq \mathbb{K}^n$.*

Теорема. *Все **ЛП** одной размерности над одним и тем же **ЧП** изоморфны.*

Задача. Докажите эти теоремы самостоятельно.

Задача. Докажите, что если $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис в **ЛП** V, то $V = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Обратное утверждение неверно: если $V = L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)$, то нельзя утверждать, что векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ образуют базис в V. Объясните почему.

Теорема. ***ЛП** $V(\mathbb{K})$ является n-мерным тогда и только тогда, когда оно имеет базис, состоящий из n векторов.*

Доказательство. 1. Пусть $\dim V = n$. Тогда $\exists \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ — **ЛН**, но $\forall \mathbf{x} \in V$ векторы $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ — **ЛЗ**, т.е. $\exists \alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha\mathbf{x} + \alpha^1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Ясно, что $\alpha \neq 0$; в противном случае получили бы

$$\alpha^1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^n\mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

что возможно лишь при $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$ (при этом $\alpha = 0$), противоречие. Таким образом,

$$\mathbf{x} = -\frac{\alpha^1}{\alpha}\mathbf{x}_1 - \dots - \frac{\alpha^n}{\alpha}\mathbf{x}_n,$$

т.е. упорядоченный набор $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ является базисом в V.

2. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис в V. Докажем, что любые $n+1$ векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$ в V **ЛЗ**. Разложим каждый из этих векторов по базису:

$$\begin{gathered}\mathbf{x}_1 = x^1_1\mathbf{e}_1 + x^2_1\mathbf{e}_2 + \dots + x^n_1\mathbf{e}_n,\\ \dots\\ \mathbf{x}_{n+1} = x^1_{n+1}\mathbf{e}_1 + x^2_{n+1}\mathbf{e}_2 + \dots + x^n_{n+1}\mathbf{e}_n.\end{gathered}$$

Составим матрицу, столбцами которой являются столбцы координат этих векторов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{n+1}^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Это матрица размера $n \times (n+1)$ (n строк, $n+1$ столбцов), поэтому ее ранг

$$\operatorname{rk} X \le n.$$

Отсюда следует, что столбцы матрицы (их количество $n+1$) **ЛЗ**; следовательно, векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$ также **ЛЗ**. □

25. Примеры

1. $\dim \mathbb{K}(\mathbb{K}) = 1$; базис состоит из одного элемента, в качестве которого можно взять любое ненулевое число из $\mathbb{K}$. Число 1 образует так называемый стандартный базис.

2. $\dim \mathbb{R}(\mathbb{Q}) = \infty$.

Задача. Объясните почему.

3. $\dim \mathbb{C}(\mathbb{R}) = 2$; базис состоит из двух элементов, в качестве которых можно взять два любых ненулевых комплексных числа, сумма которых не равна нулю. Стандартный базис образуют числа $1, i$.

Задача. Докажите.

4. $\dim \mathbb{K}^n(\mathbb{K}) = n$. Стандартный базис образуют столбцы

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. $\dim \mathbb{C}^n(\mathbb{R}) = 2n$. Стандартный базис состоит из столбцов

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_{n+1} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_{2n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}.$$

6. $\dim \mathbb{K}^{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$. Стандартный базис состоит из mn матриц

$$\mathbf{e}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n, \end{array}$$

где единица стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца.

7. $\dim \operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) = n+1$. Стандартный базис состоит из многочленов

$$\mathbf{e}_0 = 1, \quad \mathbf{e}_1 = t, \quad \mathbf{e}_2 = t^2, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = t^n.$$

8. $\dim \operatorname{Trig}(n, \mathbb{K}) = 2n+1$. Стандартный базис состоит из тригонометрических многочленов

$$\mathbf{e}_0 = 1, \quad \begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 = \cos t, & \dots, & \mathbf{e}_n = \cos nt, \\ \mathbf{e}_{-1} = \sin t, & \dots, & \mathbf{e}_{-n} = \sin nt. \end{array}$$

26. Матрица гомоморфизма

Рассмотрим гомоморфизм $f : V \to W$, где $\dim V = m$, $\dim W = n$.

Выберем какие-либо базисы в этих **ЛП**: $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ — базис в V, $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ — базис в V.

Найдем образы векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$:

$$f(\mathbf{e}_1), \quad \dots, \quad f(\mathbf{e}_m).$$

Эти векторы лежат в W и, следовательно, их можно разложить по базису $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= a_1^1 \mathbf{f}_1 + \dots + a_1^n \mathbf{f}_n, \\ &\dots, \\ f(\mathbf{e}_m) &= a_m^1 \mathbf{f}_1 + \dots + a_m^n \mathbf{f}_n. \end{aligned} \qquad f(\mathbf{e}_k) = a_k^l \mathbf{f}_l,$$

где $k = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, n$.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

называется *матрицей гомоморфизма f в паре базисов* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ и $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$.

Найдем теперь образ $\mathbf{y}$ произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Пусть

$$\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(\mathbf{x}) = f(x^k \mathbf{e}_k) = x^k f(\mathbf{e}_k) = x^k a_k^l \mathbf{f}_l.$$

Таким образом, координаты вектора $\mathbf{y}$ равны

$$y^l = x^k a_k^l, \qquad \begin{array}{l} k = 1, \dots, m, \\ l = 1, \dots, n. \end{array}$$

В матричной форме:

$$Y = AX.$$

27. Ранг произведения матриц

Рассмотрим произведение двух матриц $C = AB$, где $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $C \in \mathbb{K}^{n\times p}$. Поскольку столбцы матрицы C суть линейные комбинации столбцов матрицы A, получаем

$$L(C_1, \dots, C_p) \subset L(A_1, \dots, A_m) \quad \Rightarrow$$
$$\dim L(C_1, \dots, C_p) \le \dim L(A_1, \dots, A_m).$$

Таким образом,

$$\operatorname{rk}(AB) \le \operatorname{rk} A.$$

Задача. Докажите самостоятельно неравенство

$$\operatorname{rk}(AB) \le \operatorname{rk} B.$$

28. Сопряженный базис

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП**, $\dim V = n$, $V^*(\mathbb{K})$ — сопряженное **ЛП**. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис в V. Рассмотрим **ЛФ** $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$, действующие по правилу

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{e}_j) = \delta_j^k.$$

Тогда $\forall \mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j \in V$ имеем:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^k(x^j \mathbf{e}_j) = x^j \boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{e}_j) = x^j \delta_j^k = x^k.$$

Теорема. $\dim V^* = n$. *Базис в V^* образуют **ЛФ** $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$.*

Доказательство.
1. Проверим, что **ЛФ** $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$ **ЛН**. Пусть

$$\alpha_k \boldsymbol{\varepsilon}^k = \boldsymbol{\theta},$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — **ЛФ** такой, что $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) = 0$ $\forall \mathbf{x} \in V$. Тогда

$$0 = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{e}_j) = (\alpha_k \boldsymbol{\varepsilon}^k)(\mathbf{e}_j) = \alpha_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{e}_j) = \alpha_k \delta_j^k = \alpha_j,$$

т.е. $\alpha_j = 0$.
2. Проверим, что любой **ЛФ** можно представить в виде **ЛК** функционалов $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$. Если $\boldsymbol{\xi} \in V^*$ и $\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k \in V$, то

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(x^k \mathbf{e}_k) = x^k \boldsymbol{\xi}(\mathbf{e}_k) = \boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{x}) \xi_k,$$

где введено обозначение

$$\xi_k = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{e}_k).$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_k \boldsymbol{\varepsilon}^k = \xi_k \boldsymbol{\varepsilon}^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

□

Базис $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$ в сопряженном **ЛП** V^* называется сопряженным по отношению к базису $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в исходном **ЛП** V. Числа ξ_k называются координатами **ЛФ** $\boldsymbol{\xi}$ относительно сопряженного базиса $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$.

29. Линейное подпространство

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП**. Подмножество $P \subset V$ называется *линейным подпространством* (**ЛПП**) пространства V, если выполнены следующие условия:
(1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$: $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in P$;
(2) $\forall \mathbf{x} \in P$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\alpha \mathbf{x} \in P$.

В любом **ЛП** V имеются *тривиальные* **ЛПП**: $\{\mathbf{0}\}$ и V.
Обозначения:
- $P \subset V \iff P$ является подмножеством V;
- $P \Subset V \iff P$ является нетривиальным **ЛПП** V.

Теорема. *Пусть V — **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{K}$ и $P \Subset V$. Тогда P тоже является **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{K}$.*
Задача. Докажите теорему самостоятельно.

Примеры ЛПП

1. $V_1 \Subset V_2 \Subset V_3$.
2. $\mathbb{R}(\mathbb{R}) \Subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$; $\mathbb{R}^n(\mathbb{R}) \Subset \mathbb{C}^n(\mathbb{R})$.
Задача. Найдите размерность и базис этих **ЛПП**.
3. Подмножество в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$, состоящее из столбцов, сумма элементов которых равна нулю, является **ЛПП** в $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$.
Задача. Найдите размерность и базис этого **ЛПП**.
4. В **ЛП** $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$ квадратных матриц порядка n линейными подпространствами являются следующие подмножества.

(1) Подмножество симметричных матриц

$$S\mathbb{K}^{n\times n} = \left\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; A^T = A \right\}$$

(символ ^{T} означает транспонирование).
(2) Подмножество кососимметричных матриц

$$A\mathbb{K}^{n\times n} = \left\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; A^T = -A \right\}.$$

(3) Подмножество, состоящее из матриц с нулевым следом:

$$P = \left\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \;\middle|\; \operatorname{tr} A = 0 \right\}.$$

Задача. Найдите размерность и базис каждого из указанных **ЛПП**.
Задача. Докажите, что $P \Subset A\mathbb{K}^{n\times n}$.
5. В **ЛП** $\operatorname{Pol}(n, \mathbb{K})$ подпространствами являются множества

$$S\operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) = \left\{ x(t) \in \operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) \;\middle|\; x(-t) = x(t) \right\},$$

$$A\operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) = \left\{ x(t) \in \operatorname{Pol}(n, \mathbb{K}) \;\middle|\; x(-t) = -x(t) \right\},$$

состоящие из четных и нечетных многочленов.
Задача. Найдите размерность и базис каждого из указанных **ЛПП**.

30. Пополнение базиса

Теорема. *Пусть*

$$P \Subset V, \quad \dim P = p < \dim V = n,$$

$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ *— базис в P. Тогда $\exists \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n \in V \setminus P$ такие, что*

$$\mathbf{e}_1, \ \dots, \ \mathbf{e}_p, \ \mathbf{e}_{p+1}, \ \dots, \ \mathbf{e}_n$$

— базис в V.

Доказательство. Так как $p < n$, то $\exists \mathbf{e}_{p+1} \in V$ такой, что векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}$ **ЛН**; при этом $\mathbf{e}_{p+1} \notin P$, так как в противном случае получили бы $\dim P > p$.
Если $p + 1 = n$, пополнение базиса завершено. Если $p + 1 < n$, продолжаем процесс. □

31. Пересечение и сумма ЛПП

Теорема. *Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P \cap Q \Subset V$.*

Доказательство. Проверим выполнение требований определения:

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P \cap Q \iff \begin{cases} \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q \end{cases}$$

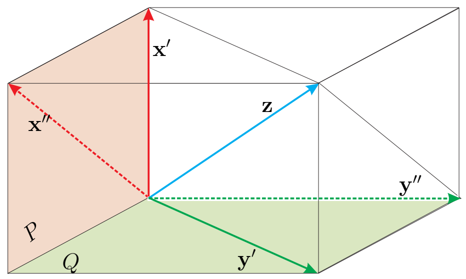
$$\iff \begin{cases} \mathbf{x} + \mathbf{y} \in P \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in Q \end{cases} \iff \mathbf{x} + \mathbf{y} \in P \cap Q.$$

Второе условие проверяется аналогично. □

Замечание. Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P \cup Q$ не является, вообще говоря, **ЛПП**.
Задача. Приведите соответствующий пример.
Суммой $P + Q$ **ЛПП** $P, Q \Subset V$ называется **ЛО** всевозможных векторов вида $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, где $\mathbf{x} \in P$, $\mathbf{y} \in Q$, т.е.

$$P + Q = \left\{ \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \mathbf{x} \in P, \ \mathbf{y} \in Q \right\}.$$

Таким образом, $\forall \mathbf{z} \in P + Q$: $\exists \mathbf{x} \in P$, $\exists \mathbf{y} \in Q$ такие, что $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$.
Теорема. *Если $P \Subset V$, $Q \Subset V$, то $P + Q \Subset V$.*
Задача. Докажите теорему.



$$\mathbf{z} = \mathbf{x}' + \mathbf{y}' = \mathbf{x}'' + \mathbf{y}''.$$

Теорема. *Пусть V — **ЛП**, $P \Subset V$, $Q \Subset V$. Тогда*

$$\boxed{\dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q).} \qquad (2)$$

Доказательство.
Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$ — базис в $P \cap Q$, $\dim(P \cap Q) = r$;
$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p$ — его дополнение до базиса в P, $\dim P = r + p$;
$\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_q$ — его дополнение до базиса в Q, $\dim Q = r + q$.
Тогда все эти векторы образуют базис в $P + Q$ (объясните почему), и

$$\begin{aligned} \dim(P+Q) &= r + p + q = (p+r) + (q+r) - r = \\ &= \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q). \end{aligned}$$

□

32. Прямая сумма ЛПП

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП**, $P \Subset V$, $Q \Subset V$. Тогда для любого вектора $\mathbf{z} \in P + Q$ существуют такие $\mathbf{x} \in P$, $\mathbf{y} \in Q$, что $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Такое разложение, вообще говоря, не единственно. Если же оно единственно, то сумма **ЛПП** называется *прямой суммой*; $P \oplus Q$.

Теорема. *Сумма **ЛПП** P и Q является прямой суммой тогда и только тогда, когда* $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$.

Доказательство.
1. Пусть $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$. Тогда базис в $P \cap Q$ пуст, и его дополнения до базисов в P и Q суть

$$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p, \qquad \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_q,$$

где $p = \dim P$, $q = \dim Q$. Базис в $P+Q$ состоит из всех этих векторов, поэтому $\forall \mathbf{z} \in P+Q$ имеем

$$\mathbf{x} = \underbrace{x^1\mathbf{f}_1 + \dots + x^p\mathbf{f}_p}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{y^1\mathbf{g}_1 + \dots + y^q\mathbf{g}_q}_{=\mathbf{y}}.$$

Это разложение единственно (единственность разложения по базису) $\Rightarrow$ $P + Q = P \oplus Q$.
2. Пусть $P + Q = P \oplus Q$. Докажем, что $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$.
Предположим противное, т.е. допустим, что $\exists \mathbf{v} \in P \cap Q$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Тогда $\mathbf{v} \in P$, $\mathbf{v} \in Q$ и $\forall \mathbf{z} \in P \oplus Q$ имеем

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{x} + \mathbf{v}}_{\in P} + \underbrace{\mathbf{y} - \mathbf{v}}_{\in Q},$$

т.е. разложение вида $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ не единственно; противоречие. □

Задача. Докажите, что

$$\mathbb{K}^{n\times n} = S\mathbb{K}^{n\times n} \oplus A\mathbb{K}^{n\times n}.$$

Задача. Докажите, что

$$\mathrm{Pol}(n) = S\,\mathrm{Pol}(n) \oplus A\,\mathrm{Pol}(n).$$

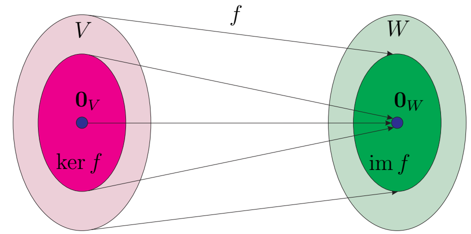
33. Ядро и образ гомоморфизма

Пусть $V(\mathbb{K})$ и $W(\mathbb{K})$ — два **ЛП** над **ЧП** $\mathbb{K}$, $f : V \to W$ — гомоморфизм.
Ядро $\ker f$ гомоморфизма f — это множество векторов из V

$$\ker f = \left\{ \mathbf{x} \in V \;\middle|\; f(x) = \mathbf{0}_W \right\}.$$

Образ $\operatorname{im} f$ гомоморфизма f — это множество векторов из W

$$\operatorname{im} f = \left\{ \mathbf{y} \in W \;\middle|\; \exists \mathbf{x} \in V : \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \right\}.$$



Теорема. *Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм **ЛП**.*

$$\ker f \Subset V, \qquad \operatorname{im} f \Subset W.$$

Доказательство. 1. Проверим, что $\ker f \Subset V$. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \ker f \quad &\Longleftrightarrow \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W, \\ \mathbf{y} \in \ker f \quad &\Longleftrightarrow \quad f(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_W; \end{aligned}$$

поэтому

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_W \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \ker f.$$

Завершите доказательство самостоятельно. □

Теорема. *Пусть $f : V \to W$ — гомоморфизм **ЛП**.*

$$\boxed{\dim\ker f + \dim\operatorname{im} f = \dim V.} \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть $\dim V = n$, $\dim\ker f = p$, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ — базис в $\ker f$, $\mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ — его дополнение до базиса в V.
Имеем $f(\mathbf{e}_1) = \dots = f(\mathbf{e}_p) = \mathbf{0}_W$.
Докажем, что векторы $\mathbf{f}_{p+1} = f(\mathbf{e}_{p+1})$, …, $\mathbf{f}_n = f(\mathbf{e}_n)$ образуют базис в $\operatorname{im} f$.
Предположим, что эти векторы **ЛЗ**, т.е. $\exists \alpha^{p+1}, \dots, \alpha^n \in \mathbb{K}$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha^{p+1}\mathbf{f}_{p+1} + \dots + \alpha^n\mathbf{f}_n = \mathbf{0}_W.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_W &= \alpha^{p+1}\mathbf{f}_{p+1} + \dots + \alpha^n\mathbf{f}_n = \\ &= \alpha^{p+1} f(\mathbf{e}_{p+1}) + \dots + \alpha^n f(\mathbf{e}_n) = \\ &= f(\alpha^{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \dots + \alpha^n\mathbf{e}_n), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\alpha^{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \dots + \alpha^n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}_V,$$

что противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n$. Таким образом, векторы $\mathbf{f}_{p+1} = f(\mathbf{e}_{p+1}), \dots, \mathbf{f}_n = f(\mathbf{e}_n)$ **ЛН**.

Далее, $\forall \mathbf{y} \in \operatorname{im} f\ \exists \mathbf{x} \in V$ такой, что $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Имеем:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \dots + x^p\mathbf{e}_p + x^{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \dots + x^n\mathbf{e}_n,$$

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \underbrace{x^1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + x^p f(\mathbf{e}_p)}_{=\mathbf{0}_W} + x^{p+1} f(\mathbf{e}_{p+1}) + \dots + x^n f(\mathbf{e}_n) = $$
$$= x^{p+1}\mathbf{f}_{p+1} + \dots + x^n\mathbf{f}_n,$$

т.е. любой вектор $\mathbf{y} \in W$ может быть разложен в **ЛК** векторов $\mathbf{f}_{p+1}, \dots, \mathbf{f}_n$. Таким образом, векторы $\mathbf{f}_{p+1}, \dots, \mathbf{f}_n$ образуют базис в $\operatorname{im} f$ и, следовательно, $\dim \operatorname{im} f = n - p$.

Итак,

$$\dim V = n = p + (n-p) = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f.$$

□

34. Матрицы и отображения

Рассмотрим **ЛП** $V = \mathbb{K}^m$ и $W = \mathbb{K}^n$. Элементы этих **ЛП** — столбцы с элементами из $\mathbb{K}$. Пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$; тогда любому столбцу $X \in \mathbb{K}^m$ можно поставить в соответствие столбец $Y \in \mathbb{K}^n$ по правилу

$$Y = AX.$$

Задача. Докажите, что отображение $\mathbf{A} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, заданное этой формулой, является гомоморфизмом **ЛП**.

Задача. Докажите, что $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^{n\times m}$.

Найдем образ $\operatorname{im} \mathbf{A}$ гомоморфизма $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{im} \mathbf{A} = \left\{ Y \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \exists X \in \mathbb{K}^m : Y = AX \right\}.$$

Столбец AX представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы A; поэтому

$$\operatorname{im} \mathbf{A} = L(A_1, \dots, A_m) \Subset \mathbb{K}^n,$$

т.е. *образ гомоморфизма* $\mathbf{A}$ *представляет собой линейную оболочку столбцов матрицы* A.

Базис в $\operatorname{im} \mathbf{A}$ образуют базисные столбцы матрицы A. Поэтому

$$\dim \operatorname{im} \mathbf{A} = \operatorname{rk} A.$$

Проблема. Как найти базисные столбцы матрицы?

Задача вычисления образа Y столбца X при гомоморфизме $\mathbf{A}$ решается легко с помощью формулы

$$Y = AX.$$

Поставим обратную задачу: найти прообраз X элемента Y. Для этого нужно найти решение X уравнения

$$AX = Y,$$

т.е. системы неоднородных линейных уравнений.

Проблема. Как решить систему неоднородных линейных уравнений?

Найдем ядро $\ker \mathbf{A}$ гомоморфизма $\mathbf{A}$. Оно состоит из всех столбцов $X \in \mathbb{K}^m$ таких, что

$$AX = \mathbf{0}_n,$$

где $\mathbf{0}_n \in \mathbb{K}^n$ — нулевой столбец. Таким образом, вычисление ядра гомоморфизма $\mathbf{A}$ сводится к решению системы однородных линейных уравнений.

Таким образом, *множество $M = \ker \mathbf{A}$ решений системы однородных линейных уравнений представляет собой **ЛПП** в $\mathbb{K}^m$, размерность которого равна*

$$\dim M = \dim \ker \mathbf{A} = \dim \mathbb{K}^m - \dim \operatorname{im} \mathbf{A} = m - \operatorname{rk} A.$$

Базис в $\ker \mathbf{A}$ называется *фундаментальной совокупностью решений* (**ФСР**) системы однородных линейных уравнений.

Проблема. Как решить систему однородных линейных уравнений? Как найти **ФСР**?

Рассмотрим отображение $\mathbf{B} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, соответствующее квадратной невырожденной матрице $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$Y = BX, \quad X \in \mathbb{K}^n, \quad Y \in \mathbb{K}^n.$$

Задача. Докажите, что отображение $\mathbf{B}$ является изоморфизмом.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Рассмотрим матрицу $C = BA \in \mathbb{K}^{n\times m}$. k-й столбец матрицы C представляет собой произведение матрицы B на k-й столбец матрицы A. Поэтому получаем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in GL(n, \mathbb{K})$.*

(1) *Если столбцы матрицы A **ЛН**, то столбцы матрицы BA также **ЛН**.*
(2) *Если столбцы матрицы A **ЛЗ**, то столбцы матрицы BA также **ЛЗ**, причем с теми же коэффициентами.*

Таким образом, умножение матрицы A слева на невырожденную матрицу B не нарушает линейных зависимостей между столбцами.

Задача. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для строк матрицы.

Теорема. *Пусть $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ — невырожденная матрица. Тогда $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times m}$*

$$\operatorname{rk} BA = \operatorname{rk} A.$$

Доказательство. Обозначим $C = BA$; так как $\det B \neq 0$, имеем $A = B^{-1}C$. Далее,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rk} C &= \operatorname{rk} BA \le \operatorname{rk} A, \\ \operatorname{rk} A &= \operatorname{rk} B^{-1}A \le \operatorname{rk} C \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rk} C = \operatorname{rk} A.$$

□

35. Упрощенная форма матрицы.

Говорят, что матрица $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ имеет *упрощенную форму*,

(1) некоторые r ($r \ge 0$) ее столбцов являются первыми r столбцами единичной матрицы $\mathbf{I}_n$,
(2) при $r < n$ последние $n - r$ строк нулевые.

Ранг упрощенной матрицы равен r, а ее базисными столбцами являются r столбцов, совпадающие по виду со столбцами единичной матрицы.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Любая матрица может быть приведена к упрощенной форме при помощи элементарных преобразований строк.

36. Элементарные преобразования строк матрицы

Элементарные преобразования строк матрицы (**ЭПС**) — это следующие преобразования:

(1) перестановка двух строк;
(2) умножение строки на ненулевое число;
(3) добавление к строке другой строки.

Обозначим символом $R(A)$ матрицу, полученную из $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ **ЭПС**, и символом $\mathbf{I}$ единичную матрицу $n \times n$.

Теорема.

$$R(A) = R(\mathbf{I}) \cdot A.$$

Доказательство. Проверим утверждение для простейших **ЭПС**.

Пусть R_1 — перестановка первой и второй строк, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad R_1(A) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1(\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$R_1(\mathbf{I}) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = R_1(A).$$

Пусть R_2 — умножение первой строки на $\alpha \neq 0$. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad R_2(A) = \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \alpha a_2^1 & \dots & \alpha a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2(\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$R_2(\mathbf{I}) \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \alpha a_2^1 & \dots & \alpha a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = R_2(A).$$

Пусть R_3 — прибавление к первой строке матрицы A ее второй строки:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad R_3(A) = \begin{pmatrix} a_1^1 + a_1^2 & a_2^1 + a_2^2 & \dots & a_m^1 + a_m^2 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3(\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$R_2(\mathbf{I}) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 + a_1^2 & a_2^1 + a_2^2 & \dots & a_m^1 + a_m^2 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = R_3(A).$$

Теорема доказана. $\square$

Задача. Докажите, что матрицы $R_1(\mathbf{I})$, $R_2(\mathbf{I})$ и $R_3(\mathbf{I})$ невырождены.

Теорема. *Пусть в матрице A выполнена серия **ЭПС**. Тогда полученная матрица равна произведению матрицы A слева на (невырожденную!) матрицу, полученную из единичной матрицы с помощью той же серии **ЭПС**.*

Доказательство. Докажем утверждение для серии из двух **ЭПС** R_1 и R_2:

$$R_1(R_2(A)) = R_1(\mathbf{I}) \cdot R_2(A) = R_1(\mathbf{I}) \cdot [R_2(\mathbf{I}) \cdot A] = \tag{4}$$

$$[R_1(\mathbf{I}) \cdot R_2(\mathbf{I})] \cdot A = R_1(R_2(\mathbf{I})) \cdot A. \tag{5}$$

$\square$

Теорема. *Элементарные преобразования строк матрицы не изменяют линейные зависимости между ее столбцами. В частности,*

$$\operatorname{rk} R(A) = \operatorname{rk} A.$$

37. Пример приведения матрицы к упрощенной форме

Приведем к упрощенному виду матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для этого нужно провести серию **ЭПС** так, чтобы некоторые из столбцов этой матрицы превратились в первые несколько столбцов единичной матрицы 3×3, а остальные линейно выражались бы через них.

Сначала проведем **ЭПС**, которое позволит получить единицу в первом столбце; для этого вычтем из третьей строки вторую:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь один из элементов первого столбца равен 1; переместим эту единицу в первую строку; для этого поменяем местами третью строку с первой:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обнуляем все элементы первого столбца, кроме выделенного элемента; для этого вычитаем из второй строки удвоенную первую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первый столбец полученной представляет собой первый столбец единичной матрицы 3×3.

Переходим ко второму столбцу. Ясно, что он не является **ЛК** предыдущих столбцов. Превратим его во второй столбец единичной матрицы 3×3. Единица уже имеется; переставим ее во вторую строку, для чего поменяем местами вторую строку с третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь обнуляем все элементы второго столбца, кроме выделенного; для этого к первой строке прибавляем вторую, а из третьей вычитаем утроенную вторую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

Второй столбец полученной матрицы теперь представляет собой второй столбец единичной матрицы 3×3.

Переходим к третьему столбцу. Очевидно, он равен **ЛК** первого и второго столбцов с коэффициентами 2 и 3. Превратить его в третий столбец единичной матрицы не удастся.

Разделим третью строку на -5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Переходим к четвертому столбцу. Единица на нужном месте уже имеется. Уничтожим все элементы четвертого столбца, кроме этой единицы; для этого из первой строки вычитаем удвоенную третью, а из второй — третью:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь ясно, что пятый столбец полученной матрицы есть линейная комбинация первого, второго и четвертого с коэффициентами 1, 0, 2. Приведение матрицы к упрощенной форме завершено.

В полученной матрице базисными столбцами являются A_1, A_2 и A_4, а остальные столбцы линейно выражаются через базисные:

$$A_3 = 2A_1 + 3A_2, \quad A_5 = A_1 + 2A_4.$$

Проверим, что эти же линейные зависимости имеют место в исходной матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$2A_1 + 3A_2 = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = A_3,$$

$$A_1 + 2A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = A_5.$$

38. Вычисление обратной матрицы

Пусть $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Вычислим A^{-1} с помощью следующего приема. Рассмотрим блочную матрицу

$$\tilde{A} = [A \mid \mathbf{I}]$$

и с помощью **ЭПС** превратим ее левый блок в единичную матрицу. Это эквивалентно умножению матрицы $\tilde{A}$ слева на невырожденную матрицу B такую, что $BA = \mathbf{I}$, т.е. $B = A^{-1}$. Но при этом правый блок также умножится слева на $B = A^{-1}$ и станет равным $A^{-1}\mathbf{I} = A^{-1}$.

Пример.

Вычислить обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Построим блочную матрицу $[A \mid \mathbf{I}]$ и проведем цепочку **ЭПС**:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Обратная матрица равна

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача. Объясните, что происходит в ситуации, когда левый блок матрицы $[A \mid \mathbf{I}]$ не удается превратить в единичную матрицу с помощью **ЭПС**.

39. Решение однородной системы

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x^3 + x^4 + 2x^5 = 0, \\ 2x^1 + x^2 + 7x^3 + 2x^5 = 0, \\ 3x^1 + 6x^3 + x^4 + 5x^5 = 0. \end{cases}$$

Запишем матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к упрощенному виду (см. выше):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Имеем $m = \dim V = 5$ (размерность пространства прообразов), $r = \dim \operatorname{im} \mathbf{A} = 3$, поэтому размерность пространства решений равна $\dim \ker \mathbf{A} = 5 - 3 = 2$.

Переменные, соответствующие базисным столбцам матрицы, называются базисными, остальные переменные — свободными. В нашем примере базисными переменными являются x^1, x^2 и x^4, а свободными — x^3 и x^5. Теперь систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x^1 = -2x^3 - x^5, \\ x^2 = -3x^3, \\ x^4 = -2x^5. \end{cases}$$

Положим $x^3 = 1$ и $x^5 = 0$, а затем $x^3 = 0$ и $x^5 = 1$; получим два столбца

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Они **ЛН** и образуют базис в $\ker \mathbf{A}$, т.е. являются **ФСР** исходной однородной системы.

Любое другое решение системы (т.е. вектор из $\ker \mathbf{A}$) имеет вид

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2,$$

где c^1, c^2 — произвольные числа.

Матрица $\Phi = [X_1 \ X_2]$ называется *фундаментальной матрицей* (**ФМ**) системы однородных уравнений. С ее помощью общее решение системы записывается в виде

$$X = \Phi C, \quad C = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

ФМ задает изоморфизм $\mathbf{\Phi} : \mathbb{K}^{m-r} \to \ker \mathbf{A}$.

40. Решение неоднородной системы

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x^3 + x^4 = 2, \\ 2x^1 + x^2 + 7x^3 = 2, \\ 3x^1 + 6x^3 + x^4 = 5. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

и приведем ее к упрощенному виду (см. выше):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Имеем $m = \dim V = 4$ (размерность пространства прообразов), $r = \dim \operatorname{im} \mathbf{A} = 3$. Столбец свободных членов Y лежит в **ЛО** столбцов основной матрицы, $Y \in \operatorname{im} \mathbf{A}$, поэтому система совместна (ранг основной матрицы равен рангу расширенной; теорема Кронекера—Капелли).

Систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x^1 = -2x^3 + 1, \\ x^2 = -3x^3, \\ x^4 = 2. \end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы представляет собой сумму любого ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы. Частное решение X_0 находим, полагая $x^3 = 0$:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ФСР однородной системы состоит из $\dim V - \dim \operatorname{im} \mathbf{A} = 4 - 3 = 1$ столбца, находится из усеченных уравнений

$$\begin{cases} x^1 = -2x^3, \\ x^2 = -3x^3, \\ x^4 = 0, \end{cases}$$

если положить $x^3 = 1$, и имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид

$$X = X_0 + c^1 X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где c^1 — произвольное число.

41. Составление однородной системы по заданной **ФСР**

Найти однородную систему уравнений, имеющую **ФСР**

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Произвольное решение X искомой системы является линейной комбинацией двух данных решений, поэтому столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & x^1 \\ -3 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix}$$

должны быть **ЛЗ**, т.е. ее ранг должен равняться 2. Приведем эту матрицу к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & x^1 \\ -3 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & x^1+2x^3 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \\ 1 & 0 & x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^3 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \\ 0 & -1 & x^1+2x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x^3 \\ 0 & 1 & x^5 \\ 0 & -1 & x^1+2x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^3 \\ 0 & 1 & x^5 \\ 0 & 0 & x^1+2x^3+x^5 \\ 0 & 0 & x^4+2x^5 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \end{pmatrix}.$$

Чтобы ранг этой матрицы равнялся двум, необходимо и достаточно, чтобы последние три ее строки были нулевыми. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} x^1+2x^3+x^5=0, \\ x^4+2x^5=0, \\ x^2+3x^3=0. \end{cases} \iff \begin{cases} x^1+2x^3+x^5=0, \\ x^2+3x^3=0, \\ x^4+2x^5=0. \end{cases}$$

Матрица последней системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

42. Типовые задачи

Задача 1. Найти образ гомоморфизма $f: V \to W$.

Решение. Выбираем в V и W подходящие базисы, записываем матрицу A гомоморфизма в этих базисах, и задача сводится к нахождению базисных столбцов матрицы A.

Задача 2. Найти ядро гомоморфизма $f: V \to W$.

Решение. Выбираем в V и W подходящие базисы, записываем матрицу A гомоморфизма в этих базисах, и задача сводится к решению однородной системы $AX = 0$.

Задача 3. Найти прообраз вектора $\mathbf{y}$ при гомоморфизме $f: V \to W$.

Решение. Выбираем в V и W подходящие базисы, записываем матрицу A гомоморфизма в этих базисах и столбец Y координат вектора $\mathbf{y}$, и задача сводится к решению неоднородной системы $AX = Y$.

Задача 4. Найти базис в **ЛО** векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$.

Решение. Выбираем базис в V и записываем матрицу A, столбцами которой являются столбцы координат данных векторов в этом базисе. Задача сводится к нахождению базисных столбцов матрицы A.

Задача 5. **ЛПП** $P \Subset V$ задано как **ЛО** векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V$. Описать это **ЛПП** как ядро подходящего гомоморфизма.

Решение. Выбираем базис в P (см. задачу 4). Задача сводится к нахождению однородной системы, имеющей заданную **ФСР**.