Конспект лекции 15

КВАДРИКИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 0. План лекции

Лекция Квадрики в евклидовом пространстве.

1. Канонические уравнения квадрики в пространстве.

1.1. Эллипсоид;
1.2. Двуполостный гиперболоид;
1.3. Однополостный гиперболоид;
1.4. Конус;
1.5. Эллиптический параболоид;
1.6. Гиперболический параболоид;
1.7. Эллиптический цилиндр;
1.8. Гиперболический цилиндр;
1.9. Параболический цилиндр.

2. Линейчатые поверхности.

2.1. Определение цилиндрической поверхности;
2.2. Определение конической поверхности;
2.3. Определение дважды линейчатой поверхности;
2.4. Однополостный гиперболоид;
2.5. Гиперболический параболоид.

§ 1. Канонические уравнения квадрик

Пусть $O\mathbf{ijk}$ — это правый ортогональный репер в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$ и $Oxyz$ — это соответствующая декартова прямоугольная система координат. Дадим определение.

Определение 1. *Квадрикой в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$ в декартовой системе координат называется поверхность, определяемая следующим уравнением для координат точек поверхности*:

$$X^T AX + 2BX + c = 0, \tag{1.1}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = (b_1, b_2, b_3).$$

Эллипсоид. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнение эллипсоида имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0. \tag{1.2}$$

Центр эллипсоида — точка $(0, 0, 0)$. Например, в сечении плоскостью $z = h$ при $|h| < c$ располагается эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}\right)} + \frac{x^2}{\left(b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}\right)} = 1.$$

Двуполостный гиперболоид. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ двуполостный гиперболоид имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{1.3}$$

Двуполостный гиперболоид обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Двуполостный гиперболоид состоит из двух несвязных частей, расположенных при $|z| \geqslant c$.

Свойство 2. Центр — точка $O(0, 0, 0)$.

Свойство 3. Сечение плоскостью $z = h$ при $|h| > c$ представляет собою эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1.$$

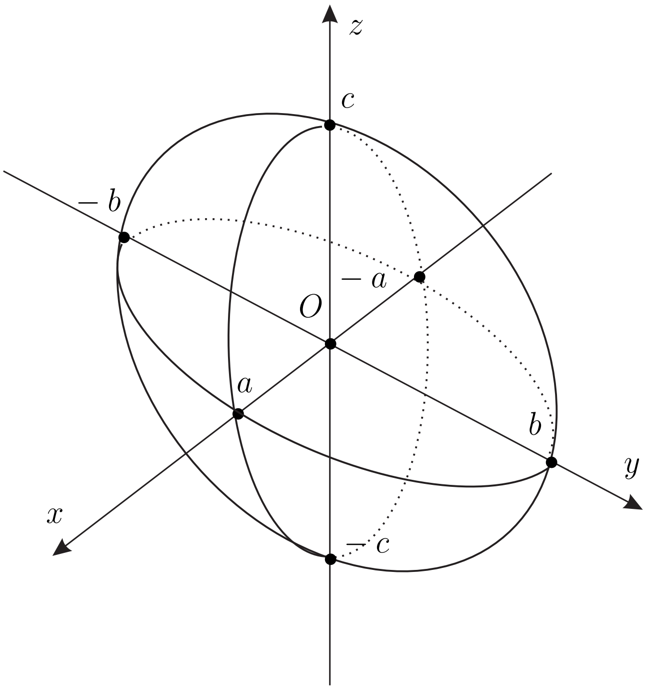

Рис. 1. Эллипсоид.

Свойство 4. Сечение плоскостью $y = h$ представляет собою гиперболу

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1.$$

Однополостный гиперболоид. В <u>канонической</u> прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ однополостный гиперболоид имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0. \tag{1.4}$$

Однополостный гиперболоид обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Однополостный гиперболоид представляет собою связную поверхность.

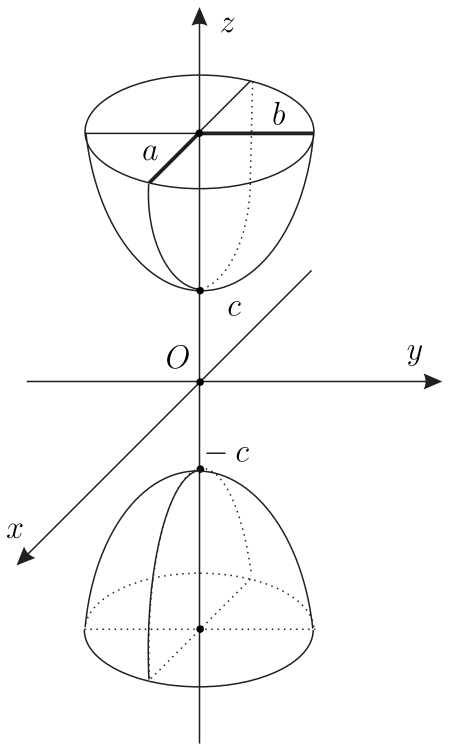

Рис. 2. Двуполостный гиперболоид.

Свойство 2. Сечение плоскостью $z = h$ представляет собою эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Свойство 3. Сечение плоскостью $y = h$ при $|h| < b$ представляет собою гиперболу

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1.$$

Свойство 4. Сечение плоскостью $y = h$ при $|h| = b$ представляет собою пару пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

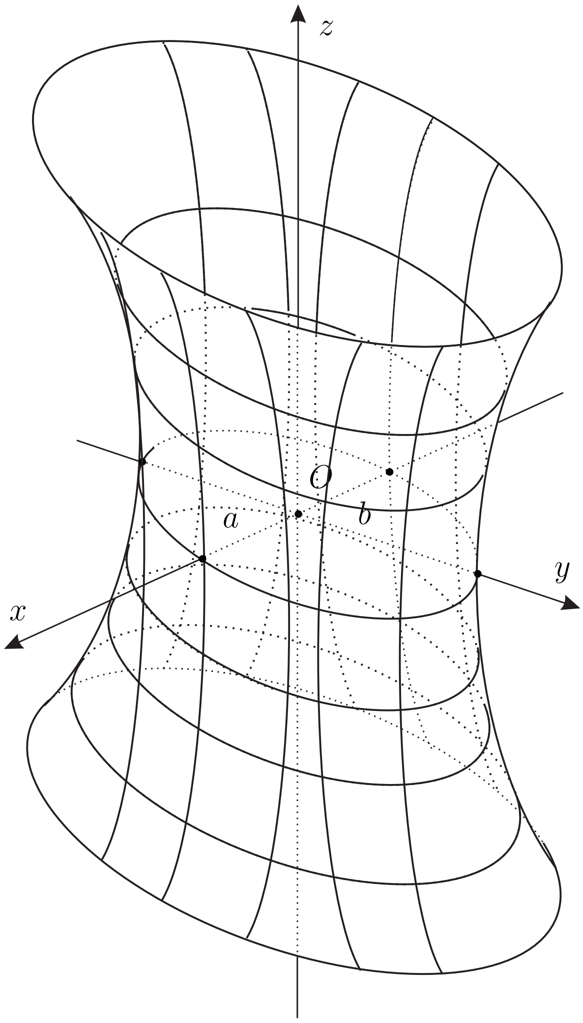

Рис. 3. Однополостный гиперболоид.

Свойство 5. Сечение плоскостью $y = h$ при $|h| > b$ представляет собою гиперболу

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}\right)^2} = 1.$$

Конус. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнение конуса имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

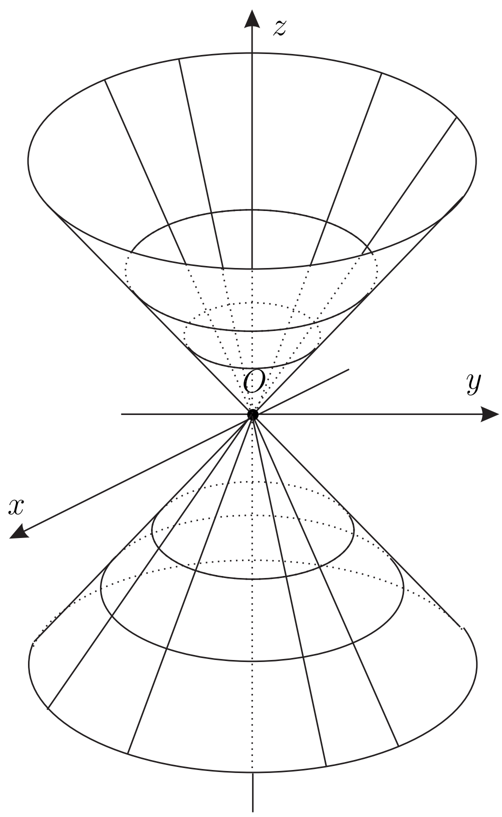

Рис. 4. Конус.

Конус обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Центр конуса — точка $O(0, 0, 0)$.

Свойство 2. Сечение конуса плоскостью $z = h \neq 0$ представляет собою эллипс

$$\frac{x^2}{a^2h^2/c^2} + \frac{y^2}{b^2h^2/c^2} = 1.$$

Свойство 3. Сечение конуса плоскостью $y = h \neq 0$ представляет собою гиперболу

$$\frac{z^2}{c^2h^2/b^2} - \frac{x^2}{a^2h^2/b^2} = 1.$$

Свойство 4. Сечение плоскостью $y = 0$ — это пара пересекающихся прямых
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Свойство 5. Одним из конических сечений является парабола.

Эллиптический параболоид. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнение эллиптического параболоида имеет следующий вид:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$
Эллиптический параболоид обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Эллиптический параболоид расположен полупространстве $z \geqslant 0$.

Свойство 2. Сечение плоскостью $z = h > 0$ пересекает эллиптический параболоид по эллипсу
$$\frac{x^2}{a^2 2h} + \frac{y^2}{b^2 2h} = 1.$$

Свойство 3. Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекает эллиптический параболоид по параболам.

Гиперболический параболоид. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнение гиперболического параболоида имеет следующий вид:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Свойство 1. Сечение плоскостью $z = h < 0$ пересекает гиперболический параболоид по гиперболе
$$\frac{y^2}{-2hb^2} - \frac{x^2}{-2ha^2} = 1.$$

Свойство 2. Сечение плоскостью $z = h > 0$ пересекает гиперболический параболоид по гиперболе
$$\frac{x^2}{2ha^2} - \frac{y^2}{2hb^2} = 1.$$

Свойство 3. Плоскость $z = 0$ пересекает гиперболический параболоид по двум прямым
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Свойство 4. Сечения плоскостями $x = h$ или $y = h$ пересекают гиперболический параболоид по параболам.

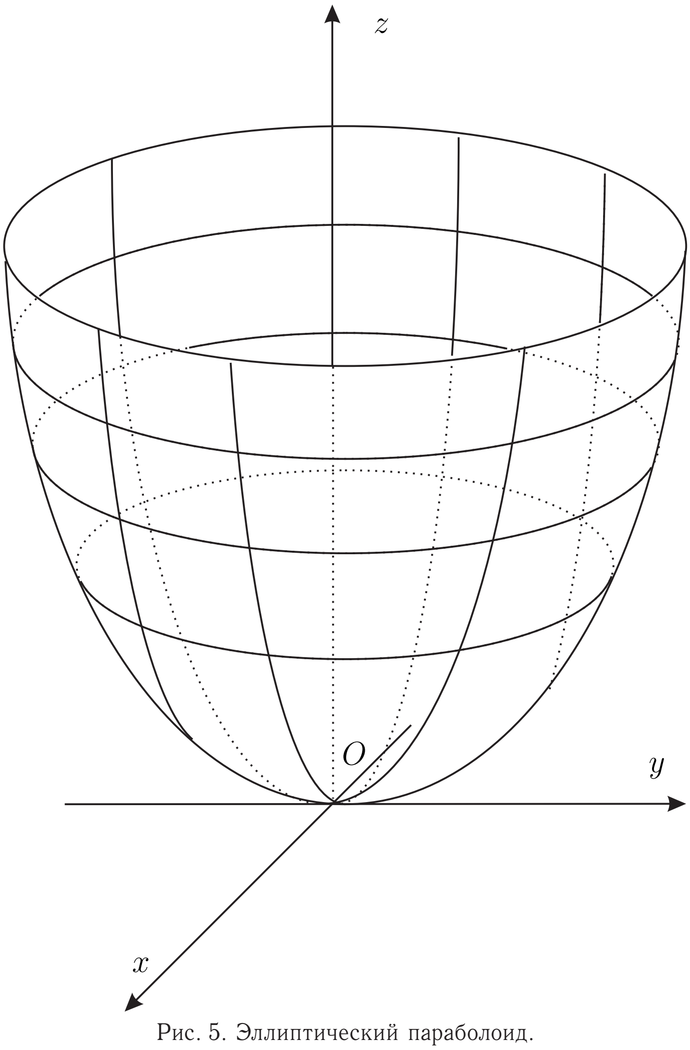

Рис. 5. Эллиптический параболоид.

Эллиптический цилиндр. В каноничecкой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнение эллиптического цилиндра имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Гиперболический цилиндр. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнение гиперболического

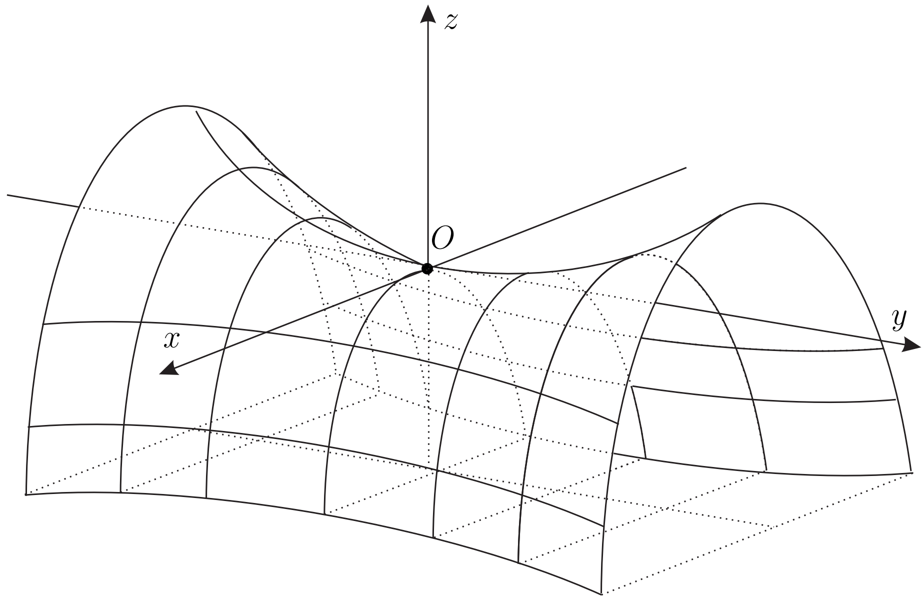

Рис. 6. Гиперболический параболоид.

цилиндра имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Параболический цилиндр. В каноническической прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнение параболического цилиндра имеет следующий вид:

$$y^2 = 2px.$$

§ 2. Линейчатые поверхности

Дадим определение цилиндрической поверхности с образующей параллельной оси Oz.

Определение 2. *Поверхность S называется цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямая линия, проходящая через эту точку и параллельная оси Oz, целиком лежит на поверхности S.*

Лемма 1. *Всякое алгебраическое уравнение линии второго порядка вида $F(x, y) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz.*

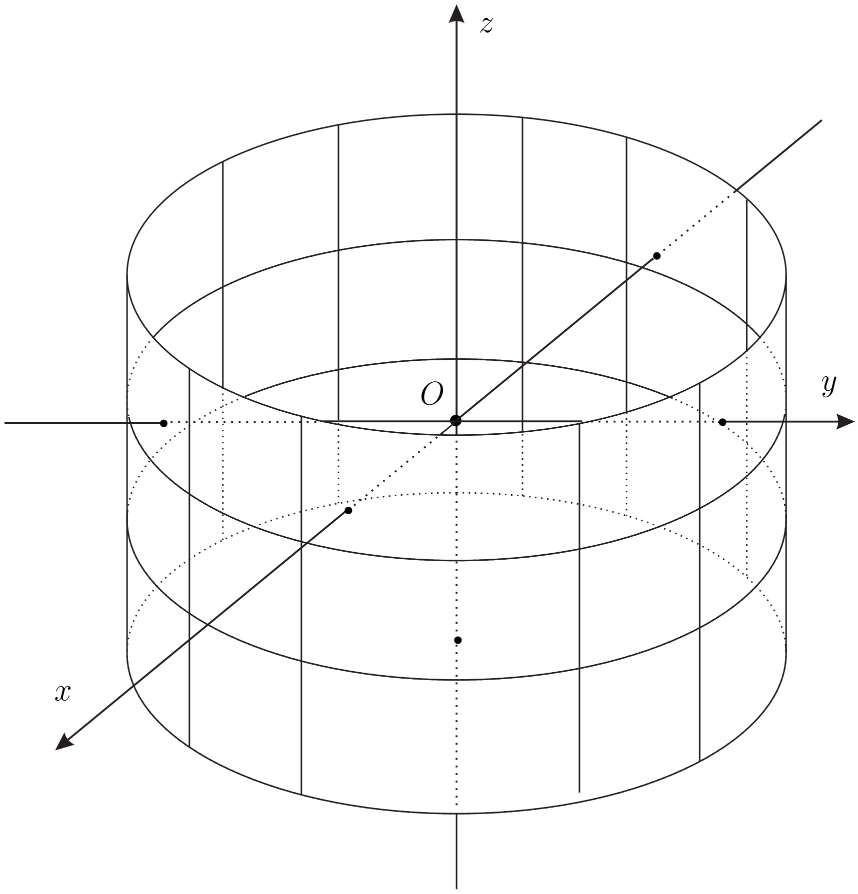

Рис. 7. Эллиптический цилиндр.

Доказательство.

Всякая точка $M_0(x_0, y_0, z)$, для которой имеет место равенство $F(x_0, y_0) = 0$, лежит на поверхности $F(x, y) = 0$. Согласно определению 2 — это поверхность цилиндра.

Лемма доказана.

Определение 3. *Поверхность S называется конической или конусом с вершиной в начале координат O, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности и отличная от начала координат точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямая линия, проходящая через точку M_0 и начало координат O, целиком лежит на поверхности S.*

Пусть $F(x, y, z) = 0$ — это уравнение поверхности второго порядка, причём $F(0, 0, 0) = 0$.

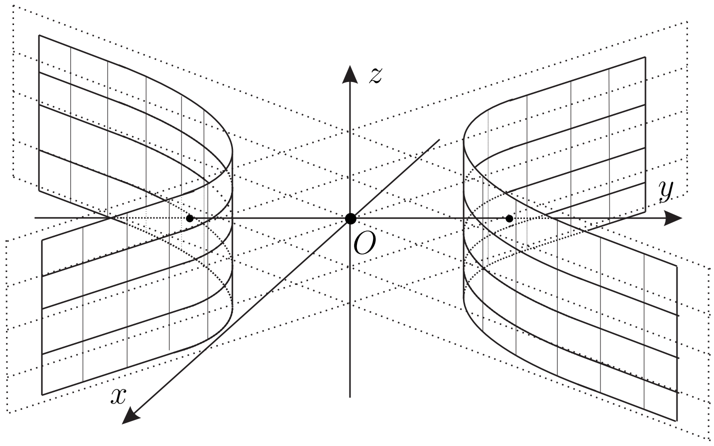

Рис. 8. Гиперболический цилиндр.

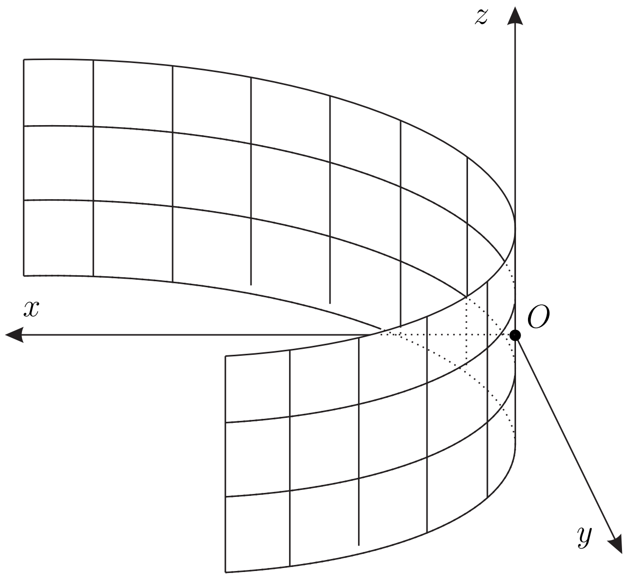

Рис. 9. Параболический цилиндр.

Лемма 2. *Если $F(tx, ty, tz) = t^2 F(x, y, z)$, то уравнение*

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2.1}$$

описывает конус.

Доказательство.

Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — это точка на поверхности S, определяемой уравнением (2.1), и отличная от точки $O(0, 0, 0)$. Тогда

прямая
$$x = x_0 t, \quad y = y_0 t, \quad z = z_0 t \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}$$
целиком лежит на этой поверхности S и, очевидно, проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $O(0,0,0)$.

Лемма доказана.

Определение 4. *Поверхность S называется l–кратно линейчатой, если через каждую её точку проходит ровно $l \in \mathbb{N}$ различных прямых, лежащих на этой поверхности, называемых прямолинейными образующими.*

Пример 1. Все цилиндры (эллиптический, гиперболический и параболический) являются 1–линейчатыми поверхностями. Конус
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$
не является 1–линейчатой поверхностью, поскольку через точку $(0,0,0)$ проходит не одна прямая, а бесконечно много прямых.

Пример 2. Однополостный гиперболоид
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
является дважды линейчатой поверхностью.

□ Действительно, запишем уравнение однополостного гиперболоида в виде
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$
Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на гиперболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений
$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right), \\[2ex] \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases}$$
и
$$\begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \delta\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \\[2ex] \delta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \gamma\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases}$$
Заметим, что эти две системы относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ) имеют нетривиальные решения $(\alpha_0, \beta_0) \neq (0,0)$ и $(\gamma_0, \delta_0) \neq (0,0)$, поскольку определители систем равны нулю. Например, для первой

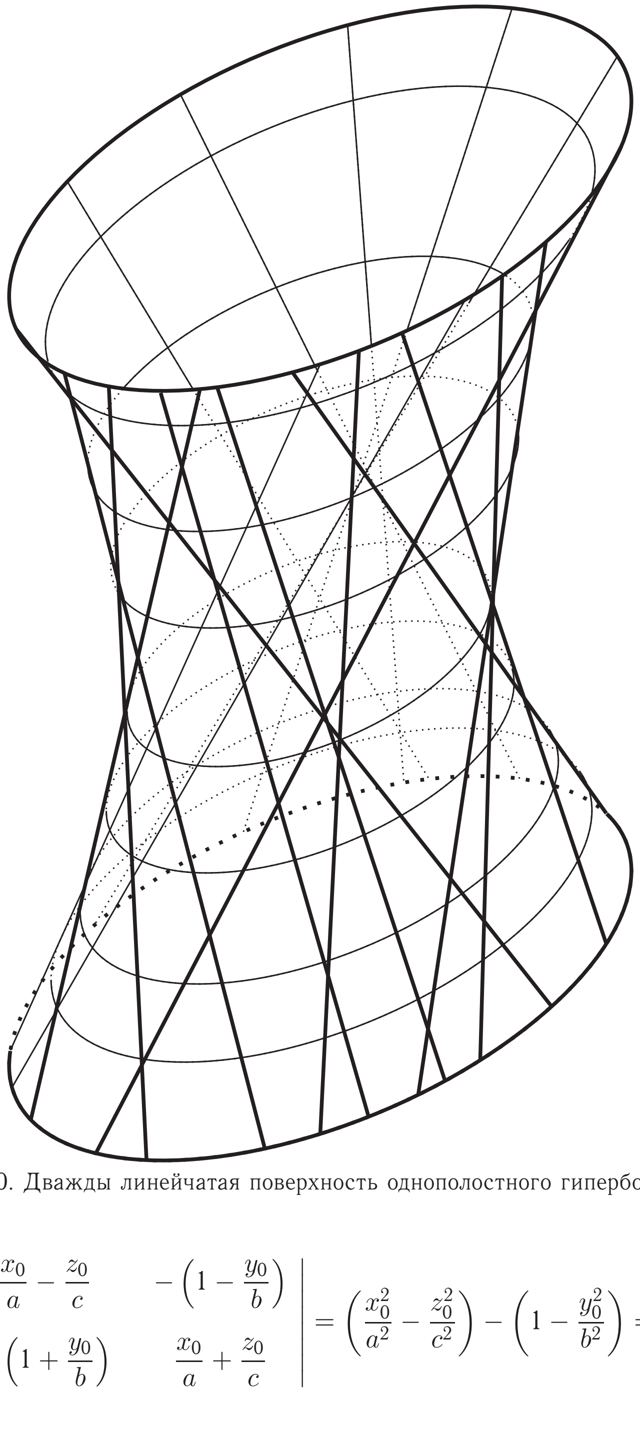

Рис. 10. Дважды линейчатая поверхность однополостного гиперболоида.

системы

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_0}{a}-\dfrac{z_0}{c} & -\left(1-\dfrac{y_0}{b}\right) \\ -\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right) & \dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c} \end{vmatrix} = \left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)-\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)=0.$$

Теперь рассмотрим следующие две системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_0 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} \right) = \beta_0 \left(1 - \dfrac{y}{b} \right); \\ \beta_0 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} \right) = \alpha_0 \left(1 + \dfrac{y}{b} \right); \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \gamma_0 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} \right) = \delta_0 \left(1 + \dfrac{y}{b} \right); \\ \delta_0 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} \right) = \gamma_0 \left(1 - \dfrac{y}{b} \right). \end{cases} \tag{2.3}$$

Это и есть уравнения двух прямых, лежащих на поверхности однополостного гиперболоида и проходящих через точку (x_0, y_0, z_0). Однако, осталось доказать, что любые две прямые из семейства (2.2) не пересекаются и любые две прямые из семейства (2.3) не пересекаются. Докажем это, например, для семейства (2.2).

□ Пусть прямые пересекаются в точке $M_1(x_1, y_1 z_1)$ однополостного гиперболоида, тогда определено число

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{\dfrac{x_1}{a} - \dfrac{z_1}{c}}{1 - \dfrac{y_1}{b}}, \quad \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{1 + \dfrac{y_1}{b}}{\dfrac{x_1}{a} + \dfrac{z_1}{c}},$$

поскольку

$$\frac{\dfrac{x_1}{a} - \dfrac{z_1}{c}}{1 - \dfrac{y_1}{b}} = \frac{1 + \dfrac{y_1}{b}}{\dfrac{x_1}{a} + \dfrac{z_1}{c}}.$$

Поэтому если предположить, что две прямые семейства (2.2) пересекаются в некоторой точке $M_0(x_1, y_1, z_1)$, то эти прямые просто совпадают, поскольку этим двум прямым соответствует одно и тоже соотношение

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0},$$

а, значит, их уравнения совпадают. ⊠

Пример 3. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

является дважды линейчатой поверхностью.

□ Действительно, запишем уравнение гиперболического параболоида в следующем виде:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 2z.$$

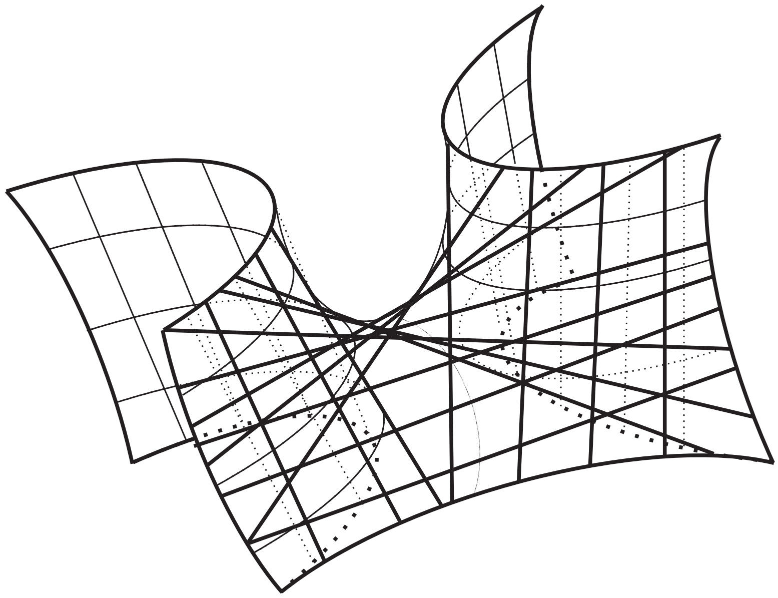

Рис. 11. Дважды линейчатая поверхность гиперболического параболоида.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на гиперболическом параболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ):

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\right) = \beta, \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right) = 2\alpha z_0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right) = \delta, \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\right) = 2\gamma z_0, \end{cases}$$

Определители этих систем равны нулю! Поэтому существуют нетривиальные их решения (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0). Тогда следующие системы уравнений описывают искомые прямые:

$$\begin{cases} \alpha_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \beta_0, \\ \beta_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 2\alpha_0 z, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \gamma_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \delta_0, \\ \delta_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 2\gamma_0 z. \end{cases}$$