

Конспект лекции 14

КВАДРИКИ НА ПЛОСКОСТИ

§ 0. План лекции

Лекция. Квадрики на плоскости.

1. Преобразование базисов и координат на плоскости.

- 1.1. Матрица перехода R от одного базиса к другому;
- 1.2. Вывод специального вида матрицы перехода R ;
- 1.3. Вывод формул перехода от старых координат к новым;

2. Композиция поворота и параллельного переноса.

- 2.1. Вывод формул;
- 2.2. Однородные координаты;
- 2.3. Расширенная матрица преобразования P ;
- 2.4. Обратная матрица P^{-1} .

3. Уравнение квадрики на плоскости.

- 3.1. Определение квадрики и уравнение в координатах;
- 3.2. Уравнение в однородных координатах;
- 3.3. Ортогональные преобразования уравнения квадрики;

3.4. Ортогональные инварианты.

4. Поворот.

- 4.1. $A' = R^T A R$;
- 4.2. Лемма о $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
- 4.3. Связь λ_1 и λ_2 с ортогональными инвариантами;
- 4.4. Характеристический многочлен;
- 4.5. Уравнения для собственных функций;
- 4.6. НИДУ существования нетривиальных решений;
- 4.7. Угол поворота $\cot(2\alpha) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$.

5. Параллельный перенос в центр.

5.1. Формула преобразования $B' = (X_0^T A + B) R$;

5.2. Центральные квадрики;

5.3. Вид ортогонального преобразования

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} R & -A^{-1}B^T \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

5.4. Общий вид центральной линии;

5.5. Запись через ортогональные преобразования.

6. Классификация квадрик.

6.1. Три линии эллиптического типа;

6.2. Две линии гиперболического типа;

6.3. Уравнение параболического типа;

6.3.1. Параболический тип — нецентральная линия;

6.3.2. Вырожденный параболический тип — три линии.

§ 1. Преобразование базисов и координат на плоскости

Пусть на евклидовой плоскости \mathcal{E}_2 заданы две ортогональные системы аффинных координат с общим началом:

$$O\mathbf{I} \text{ и } O\mathbf{I}',$$

где

$$\mathbf{I} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}, \quad \mathbf{I}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\},$$

соответствующая пара базисов в ассоциированном векторном пространстве \mathcal{V} .

Разложим «новый» базис \mathbf{I}' по векторам «старого» базиса \mathbf{I}' .

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = r_1^1 \mathbf{i} + r_1^2 \mathbf{j}; \\ \mathbf{j}' = r_2^1 \mathbf{i} + r_2^2 \mathbf{j}; \end{cases} \Leftrightarrow (\mathbf{i}', \mathbf{j}') = (\mathbf{i}, \mathbf{j})R \Leftrightarrow \mathbf{I}' = \mathbf{I}R, \quad (1.1)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_1^2 \\ r_2^1 & r_2^2 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Определение 1. Матрица R , составленная из коэффициентов разложения нового базиса \mathbf{I}' по старому базису \mathbf{I} и записанных в виде столбцов, называется матрицей перехода от базиса \mathbf{I} к базису \mathbf{I}' .

Замечание 1. Формулы (1.1) составлены таким образом, чтобы строка $\mathbf{I} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ умножалась на матрицу R слева.

Вывод специального вида матрицы R . Базисы \mathbf{I} и \mathbf{I}' являются ортонормированными и поэтому, с одной стороны, имеют место следующие равенства:

$$r_1^1 = \langle \mathbf{i}', \mathbf{i} \rangle, \quad r_1^2 = \langle \mathbf{i}', \mathbf{j} \rangle, \quad r_2^1 = \langle \mathbf{j}', \mathbf{i} \rangle, \quad r_2^2 = \langle \mathbf{j}', \mathbf{j} \rangle. \quad (1.3)$$

С другой стороны,

$$\langle \mathbf{i}', \mathbf{i} \rangle = |\mathbf{i}'| |\mathbf{i}| \cos \varphi_1 = \cos \varphi_1, \quad \langle \mathbf{i}', \mathbf{j} \rangle = |\mathbf{i}'| |\mathbf{j}| \cos \varphi_2 = \cos \varphi_2, \quad (1.4)$$

$$\langle \mathbf{j}', \mathbf{i} \rangle = |\mathbf{j}'| |\mathbf{i}| \cos \varphi_3 = \cos \varphi_3, \quad \langle \mathbf{j}', \mathbf{j} \rangle = |\mathbf{j}'| |\mathbf{j}| \cos \varphi_4 = \cos \varphi_4. \quad (1.5)$$

Если угол φ_1 положить равным углу α , то имеют место следующие равенства:

$$\varphi_1 = \alpha, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \varphi_4 = \alpha. \quad (1.6)$$

С учётом формул (1.3)–(1.6) мы приходим к искомым формулам

$$r_1^1 = \cos \varphi_1 = \cos \alpha, \quad r_1^2 = \cos \varphi_2 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha, \quad (1.7)$$

$$r_2^1 = \cos \varphi_3 = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha, \quad r_2^2 = \cos \varphi_4 = \cos \alpha. \quad (1.8)$$

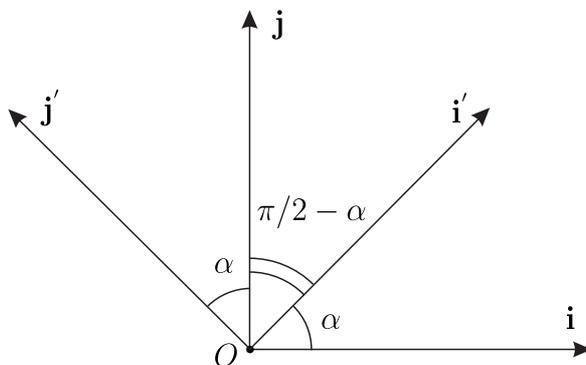


Рис. 1. Связь ортонормированных базисов.

Таким образом, мы пришли к следующему виду матрицы перехода R :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Замечание 2. Матрица перехода R обладает важным свойством ортогональности:

$$R^T = R^{-1}.$$

§ 2. Композиция поворота и параллельного переноса

Рассмотрим теперь общий случай, когда «новая» ортогональная система координат $O'\mathbf{i}'\mathbf{j}'$ получается из «старой» системы координат $O\mathbf{i}\mathbf{j}$ параллельным переносом точки O в точку O' на вектор $\overrightarrow{OO'}$ и ортогональным поворотом, рассмотренным в предыдущем параграфе.

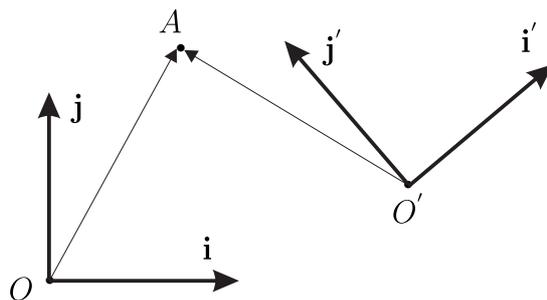


Рис. 2. Общее преобразование.

Пусть $A \in \mathcal{E}_2$. Тогда имеем

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}.$$

Радиус векторы \overrightarrow{OA} и $\overrightarrow{OO'}$ разложим по базису \mathbf{I} , а радиус-вектор $\overrightarrow{O'A}$ разложим по базису \mathbf{I}' . Введём столбцы координат в соответствующих базисах

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{O'A} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{IX} = \mathbf{IX}_0 + \mathbf{I}'X' &\Leftrightarrow \mathbf{IX} = \mathbf{IX}_0 + \mathbf{IRX}' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (X - X_0 - RX')\mathbf{I} = O \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow X = X_0 + RX' \Leftrightarrow X' = R^{-1}(X - X_0) \Leftrightarrow X' = R^T(X - X_0). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Распишем матричные формулы (2.1).

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \\ y = y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha; \\ y' = -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.3)$$

Запись преобразований евклидовой плоскости в однородных координатах. Выпишем следующие столбцы:

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c|c} X \\ 1 \end{array} \right\|, \quad Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c|c} X' \\ 1 \end{array} \right\|. \quad (2.4)$$

Введём теперь расширенную матрицу преобразования

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & x_0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|. \quad (2.5)$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. Матрица P обратима и обратная имеет следующий вид:

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & \sin \alpha & x'_0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & y'_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|. \quad (2.6)$$

Доказательство.

Используя правило перемножения блочных матриц, получим следующую цепочку равенств:

$$P^{-1} \cdot P = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \mathbb{I} & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$P \cdot P^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \mathbb{I} & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Справедливы следующие равенства:

$$Z = PZ', \quad Z' = P^{-1}Z.$$

Доказательство.

$$PZ' = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X' \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} R \cdot X' + X_0 \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| = Z;$$

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot Z &= \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} R^T \cdot X - R^T \cdot X_0 \\ 1 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{c} R^T \cdot (X - X_0) \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} X' \\ 1 \end{array} \right\| = Z'. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Справедливо равенство

$$P^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|c} \cos \alpha & \sin \alpha & x'_0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & y'_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

где

$$X'_0 = -R^T X_0,$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} x'_0 = -x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha, \\ y'_0 = x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha. \end{cases}$$

§ 3. Уравнения квадрики на плоскости

Пусть на евклидовой плоскости \mathcal{E}_2 задана прямоугольная система координат Oxy .

Определение 1. *Линия на плоскости, координаты точек (в выбранной системе координат Oxy) которой и только они являются решениями уравнения*

$$F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \quad (3.1)$$

называется *квадрикой*.

Введём следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad B = (b_1, b_2), \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.1) квадрики можно записать в следующем виде:

$$X^T A X + 2B X + c = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение квадрики в однородных координатах.

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\|, \quad Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\|. \quad (3.3)$$

Тогда уравнение квадрики (3.2) можно записать в следующем виде:

$$Z^T D Z = 0. \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \square \quad & \left\| X^T | 1 \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| = \\ & = \left\| X^T A + B | X^T B^T + c \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| = \\ & = X^T A X + B X + X^T B^T + c = X^T A X + 2B X + c. \quad \square \end{aligned}$$

§ 4. Ортогональные преобразования уравнения квадрики

Рассмотрим на евклидовой плоскости помимо Oxy ещё одну декартову прямоугольную систему координат $Ox'y'$, полученную из Oxy параллельным переносом и поворотом. Напомним, что однородные координаты в этих системах координат связаны соотношением

$$Z = P Z', \quad P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & -\sin \alpha & x_0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad (4.1)$$

где

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\|, \quad Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c} X' \\ 1 \end{array} \right\|.$$

После подстановки в уравнение (3.4) преобразования (4.1) получим следующую цепочку равенств:

$$0 = Z^T D Z = Z'^T P^T D P Z' = Z'^T D' Z',$$

где

$$D' = P^T D P, \quad D' = \left\| \begin{array}{c|c} A' & B'^T \\ \hline B' & c' \end{array} \right\|. \quad (4.2)$$

$$\square \quad P^T \cdot D = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & O \\ \hline X_0^T & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} R^T A & R^T B^T \\ \hline X_0^T A + B & X_0^T B^T + c \end{array} \right\|,$$

$$\begin{aligned}
(P^T \cdot D) \cdot P &= \left\| \begin{array}{c|c} R^T A & R^T B^T \\ \hline X_0^T A + B & X_0^T B^T + c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \\
&= \left\| \begin{array}{c|c} R^T AR & R^T AX_0 + R^T B^T \\ \hline X_0^T AR + BR & X_0^T AX_0 + BX_0 + X_0^T B^T + c \end{array} \right\| = \\
&= \left\| \begin{array}{c|c} R^T AR & R^T (AX_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T A + B)R & X_0^T AX_0 + 2BX_0 + c \end{array} \right\|, \quad (4.3)
\end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством $X_0^T B^T = BX_0$, поскольку это матрица размера 1×1 — число, а также тем, что $A^T = A$. Сравнивая формулы (4.2) и (4.3) мы получим равенства

$$A' = R^T AR, \quad B' = (X_0^T A + B)R, \quad c' = X_0^T AX_0 + 2BX_0 + c, \quad (4.4)$$

а уравнение квадрики в новой системе координат примет следующий вид:

$$X'^T A' X' + 2B' X' + c' = 0. \quad \square \quad (4.5)$$

Наблюдение 1. Матрица A меняется только при повороте.

Наблюдение 2. Матрица B меняется и при повороте и при параллельном переносе.

Наблюдение 3. Свободный член c меняется только при параллельном переносе.

Ортогональные инварианты уравнения квадрики.

Теорема 1. При ортогональных преобразованиях декартовой прямоугольной системы координат величины

$$S := \text{tr } A, \quad \delta := \det A, \quad \Delta := \det D \quad (4.6)$$

не изменяются.

Доказательство.

$$\text{tr } A' = \text{tr}(R^T AR) = \text{tr}(ARR^T) = \text{tr}(ARR^{-1}) = \text{tr } A;$$

$$\det A' = \det(R^T AR) = \det R^T \det A \det R = \det A, \quad \det R = 1;$$

$$\det D' = \det(P^T DP) = \det P^T \det D \det P = \det D, \quad \det P = 1.$$

Теорема доказана.

Определение 2. Величины (4.6) называются ортогональными инвариантами.

§ 5. Уничтожение слагаемого $2a_{12}xy$ при помощи поворота на угол α

Задача заключается в том, чтобы найти поворот на такой угол α , при котором справедливо равенство

$$A' = R^T A R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Лемма 3. При наличии в уравнении квадрики (3.1) слагаемого $2a_{12}xy$ необходимо выполняется условие $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ¹⁾.

Доказательство.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда

$$A = (R^T)^{-1} A' R^{-1} = R A' R^{-1} = R(\lambda \mathbb{I}) R^{-1} = \lambda R R^{-1} = \lambda \mathbb{I}.$$

Лемма доказана.

Замечание 4. Числа λ_1 и λ_2 могут быть найдены с помощью ортогональных инвариантов.

□ Действительно, имеем

$$S = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \delta = \det A = \det A' = \lambda_1 \lambda_2.$$

Поэтому по теореме Виета числа λ_1 и λ_2 являются решениями следующего квадратного уравнения:

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \quad \square \quad (5.2)$$

Характеристический многочлен. Итак, при ортогональном преобразовании R ($R^T = R^{-1}$) матрица A квадрики преобразуется по следующему закону:

$$A' = R^T A R \Leftrightarrow R A' = A R, \quad (5.3)$$

поскольку $R^T = R^{-1}$. Нам нужно найти такой новый базис \mathbf{i}', \mathbf{j}' , в котором матрица A' имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся равенством (5.3) и получим следующее выражение:

$$A[R_1, R_2] = [R_1, R_2] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = [\lambda_1 R_1, \lambda_2 R_2]. \quad (5.4)$$

Заметим теперь, что согласно формуле произведения матрицы A на матрицу $R = [R_1, R_2]$ имеет место равенство

$$A R = A[R_1, R_2] = [A R_1, A R_2]. \quad (5.5)$$

¹⁾ Отметим, что это утверждение имеет место только в прямоугольных декартовых системах координат.

Из равенств (5.4) и (5.5) мы приходим к равенствам

$$[AR_1, AR_2] = [\lambda_1 R_1, \lambda_2 R_2] \Leftrightarrow AR_k = \lambda_k R_k \quad \text{при } k = 1, 2. \quad (5.6)$$

Уравнения (5.6) можно переписать в следующем виде:

$$(A - \lambda_k \mathbb{I}) R_k = O \quad \text{при } k = 1, 2. \quad (5.7)$$

Нетривиальные решения систем уравнений (5.7) существуют тогда и только тогда, когда λ_1 и λ_2 являются решениями следующего уравнения:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0. \quad (5.8)$$

Определение 3. Уравнение (5.8) называется *характеристическим уравнением* или *характеристическим многочленом*.

Вычисление определителя в характеристическом уравнении.

$$\begin{aligned} \square \quad \det(A - \lambda \mathbb{I}) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \\ &= \lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \quad \boxtimes \quad (5.9) \end{aligned}$$

Таким образом, мы установили, что числа λ_1 и λ_2 являются решениями уравнения (5.8) и только они.

Определение 4. Корни λ_1 и λ_2 характеристического многочлена (5.8) называются *собственными значениями матрицы A*, а ненулевые решения R_1 и R_2 уравнения

$$(A - \lambda \mathbb{I}) X = O$$

называются *собственными векторами*.

Поэтому, например,

$$\begin{aligned} AR_2 = \lambda_2 R_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a_{11} \sin \alpha + a_{12} \cos \alpha = -\lambda_2 \sin \alpha, \\ -a_{12} \sin \alpha + a_{22} \cos \alpha = \lambda_2 \cos \alpha. \end{cases} \quad (5.10) \end{aligned}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \quad (5.11)$$

§ 6. Уничтожение линейных слагаемых $2b_1x + 2b_2y$

Из полученных ранее формул (4.4) вытекает, что при общем ортогональном преобразовании матрица-строка $B = (b_1, b_2)$ преобразуется

по следующему закону:

$$B' = (X_0^T A + B)R. \quad (6.1)$$

Для уничтожения в уравнении квадрики (3.2) линейного слагаемого

$$2BX$$

необходимо и достаточно потребовать, чтобы $B' = O$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$B' = O \Leftrightarrow (X_0^T A + B)R = O \Leftrightarrow X_0^T A + B = O \Leftrightarrow A^T X_0 = -B^T. \quad (6.2)$$

Поскольку $A^T = A$, то мы приходим к искомому уравнению

$$AX_0 = -B^T, \quad B \neq O. \quad (6.3)$$

Ясно, что эта квадратная неоднородная система линейных уравнений разрешима тогда и только тогда, когда $\delta = \det A \neq 0$.

Случай центральных квадрик. Рассмотрим сначала случай $\delta \neq 0$. В этом случае имеет место равенство

$$X_0 = -A^{-1}B^T,$$

из которого вытекает явный вид искомого преобразования

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} R & -A^{-1}B^T \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

В новых координатах $X' = (x', y')$ после этого преобразования уравнение квадрики примет следующий вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0, \quad c' = X_0^T A X_0 + 2B X_0 + c. \quad (6.4)$$

Матрица D' при этом имеет следующий вид:

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c' \end{array} \right), \quad (6.5)$$

где выражение для c' можно упростить.

$$\square \quad c' = X_0^T A X_0 + 2B X_0 + c = -X_0^T B^T + 2B X_0 + c = B X_0 + c. \quad \boxtimes$$

Кроме того, из выражения (6.5) имеют место следующие равенства:

$$\Delta = \det D' = \lambda_1 \lambda_2 c' = \delta c' \Rightarrow c' = \frac{\Delta}{\delta}. \quad (6.6)$$

Следовательно, уравнение (6.4) с учётом (6.6) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \quad (6.7)$$

Определение 5. Алгебраическая линия второго порядка называется центральной, если $\det A \neq 0$.

§ 7. Уравнения эллиптического типа

Рассмотрим случай $\delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$. В этом случае, очевидно, числа λ_1 и λ_2 одного знака.

1. Вещественный эллипс. Пусть c' и $\lambda_{1,2}$ имеют разные знаки. Тогда уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = -\frac{c'}{\lambda_1} = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = -\frac{c'}{\lambda_2} = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0. \quad (7.1)$$

2. Мнимый эллипс. Пусть c' и $\lambda_{1,2}$ одного знака. Тогда уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1, \quad a^2 = \frac{c'}{\lambda_1} = \frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = \frac{c'}{\lambda_2} = \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0. \quad (7.2)$$

3. Пара мнимых прямых. Пусть $c' = 0$ и уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$a^2 x'^2 + b^2 y'^2 = 0, \quad a = \sqrt{|\lambda_1|}, \quad b = \sqrt{|\lambda_2|}. \quad (7.3)$$

§ 8. Уравнения гиперболического типа

Рассмотрим теперь случай $\delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2 < 0$. Это случай, когда числа λ_1 и λ_2 разных знаков.

4. Гипербола. Предположим, что $\Delta = c'\delta \neq 0$. Тогда $c' \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что знаки чисел c' и λ_1 разные, а знаки чисел c' и λ_2 одинаковые. Поэтому уравнение (6.7) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = -\frac{c'}{\lambda_1} = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = \frac{c'}{\lambda_2} = \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0. \quad (8.1)$$

5. Пара пересекающихся прямых. Предположим, что $\Delta = c'\delta = 0 \Rightarrow c' = 0$. Это вырожденный случай. Тогда уравнение (6.7) можно привести к следующему виду:

$$a^2 x'^2 - b^2 y'^2 = 0, \quad a^2 = |\lambda_1|, \quad b^2 = |\lambda_2|. \quad (8.2)$$

§ 9. Уравнения параболического типа

Рассмотрим теперь вырожденный случай $\delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0$. Поскольку мы рассматриваем алгебраические уравнения второго порядка,

то это означает, что только одно из чисел λ_1 и λ_2 равно нулю. Пусть, например, $\lambda_1 = 0$. Тогда

$$S = \operatorname{tr} A = \lambda_2, \quad D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & S & b'_2 \\ \hline b'_1 & b'_2 & c' \end{array} \right), \quad \Delta = \det D' = -(b'_1)^2 S. \quad (9.1)$$

Поскольку рассматривается случай $\det A = 0$, то система уравнений $AX_0 = -B^T$ может либо быть несовместной, либо иметь бесконечное множество решений. Это случай *нецентральных кривых на плоскости*. Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 4. Коэффициент b'_1 выражается формулой

$$b'_1 = \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{S}} \quad (9.2)$$

и его абсолютная величина $|b'_1|$ является инвариантом относительно сдвигов.

Доказательство.

Если мы используем только преобразование параллельного переноса системы координат, то при этом матрица D' после преобразования вида (формально при $\alpha = 0$)

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

преобразуется только к матрице аналогичного вида:

$$D'' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b''_1 \\ 0 & S & b''_2 \\ \hline b''_1 & b''_2 & c'' \end{array} \right).$$

При этом имеем

$$\Delta = \det D'' = -(b''_1)^2 S, \quad \Delta = \det D' = -(b'_1)^2 S \Rightarrow |b''_1| = |b'_1|.$$

Лемма доказана.

6. Параболический тип. Предположим, что $\Delta \neq 0$. Поэтому согласно лемме 4 какие бы мы в дальнейшем не делали бы параллельный перенос системы координат (сдвиг) коэффициент $b'_1 \neq 0$ преобразуется в коэффициент $b''_1 = \pm b'_1 \neq 0$. Пусть мы сделали уже поворот на найденный угол α и уничтожили слагаемое $2a_{12}xy$, которое в однородных координатах имеет следующий вид:

$$D' = P_1^T D P_1, \quad P_1 = \left\| \begin{array}{c|c} R & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

При этом в однородных координатах мы пришли к матрице

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & S & b'_2 \\ \hline b'_1 & b'_2 & c' \end{array} \right), \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad B' = (b'_1, b'_2), \quad b'_1 \neq 0.$$

Тогда уравнение для центра примет следующий вид:

$$A' X_0 = -B'^T = - \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\text{rang } A' = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} < \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b'_1 \\ 0 & S & -b'_2 \end{pmatrix}, \quad \text{если } b'_1 \neq 0.$$

Итак, уравнение центра не имеет решений. После поворота R (пока без сдвига) уравнение квадрики примет следующий вид:

$$S y'^2 + 2b'_1 x' + 2b'_2 y' + c = 0, \quad b'_1 \neq 0. \quad (9.3)$$

Это уравнение после выделения полного квадрата примет следующий вид:

$$S \left(y' + \frac{b'_2}{S} \right)^2 + 2b'_1 \left(x' + \frac{c}{2b'_1} - \frac{b'_2{}^2}{2b'_1 S} \right) = 0.$$

Вводя новые переменные

$$\begin{cases} x'' = \pm \left(x' + \frac{c}{2b'_1} - \frac{b'_2{}^2}{2b'_1 S} \right), \\ y'' = y' + \frac{b'_2}{S}, \end{cases} \quad (9.4)$$

получим уравнение

$$S y''^2 + 2b'_1 x'' = 0, \quad (9.5)$$

а затем выбираем знак \pm так, чтобы получилось каноническое уравнение параболы

$$y''^2 = 2px'', \quad p = \left| \frac{b'_1}{S} \right|. \quad (9.6)$$

Замечание 5. Заметим, что после преобразования (9.4) матрица квадрики в системе координат $Ox''y''$ примет следующий вид:

$$D'' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & S & 0 \\ \hline b'_1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Вырожденный параболический тип. Пусть $\Delta = \det D' = 0$, поэтому после чистого поворота, определяемого матрицей

$$P_1 = \left\| \begin{array}{c|c} R & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad D' = P_1^T D P_1,$$

получим равенство $b'_1 = 0$. В этом случае матрица A' и расширенная матрица $[A', -B'^T]$ имеют одинаковый ранг. Следовательно, система уравнений центра

$$A' X_0 = -B'^T$$

имеет бесконечно много решений. Выберем какое-либо из них X_0 . Тогда матрица D' после преобразования

$$P_2 = \left\| \begin{array}{c|c} I & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

примет следующий вид:

$$D'' = P_2^T D P_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{array} \right). \quad (9.7)$$

А уравнение квадрики примет следующий вид:

$$S y'^2 + c' = 0. \quad (9.8)$$

7. Вырожденный тип. Две параллельные прямые. Числа S и c' имеют разные знаки, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y'^2 - a^2 = 0, \quad a^2 = \left| \frac{c'}{S} \right|. \quad (9.9)$$

8. Вырожденный тип. Две мнимые параллельные прямые. Числа S и c' имеют одинаковые знаки, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y'^2 + a^2 = 0, \quad a^2 = \frac{c'}{S}. \quad (9.10)$$

9. Вырожденный тип. Две совпадающие прямые. Если $c' = 0$, тогда уравнение (9.8) примет следующий вид:

$$y'^2 = 0. \quad (9.11)$$