Конспект лекции 13

ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА И ПАРАБОЛА

§ 0. План лекции

Лекция Эллипс, Гипербола и Парабола.

1. Эллипс.

1.1. Определение эллипса;

1.2. Определение канонической системы координат;

1.3. Вывод уравнения эллипса в канонической системе координат;

1.4. Эксцентриситет;

1.5. Директрисы и директориальное свойство эллипса.

2. Гипербола.

2.1. Определение гиперболы;

2.2. Определение канонической системы координат;

2.3. Вывод уравнения гиперболы в канонической системе координат;

2.4. Анализ формы гиперболы; асимптоты;

2.5. Директрисы и директориальное свойство гиперболы.

3. Парабола.

3.1. Определение параболы;

3.2. Определение канонической системы координат;

3.3. Вывод уравнения параболы.

4. Касательные.

4.1. Вывод уравнения касательной к эллипсу;

4.2. Касательные к гиперболе и параболе.

5. Оптические свойства.

5.1. Теорема об оптическом свойстве эллипса;

5.2. Теорема об оптическом свойстве гиперболы;

5.3. Теорема об оптическом свойстве параболы.

6. Полярные уравнения.
6.1. Полярное уравнение параболы;
6.2. Полярное уравнение эллипса;
6.3. Полярное уравнение гиперболы;
6.4. Анализ общего полярного уравнения.

§ 1. Каноническое уравнение эллипса

Определение 1. *Эллипсом называется геометрическое место точек на евклидовой плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами эллипса, есть постоянная величина, которая больше расстояния между фокусами.*

Определение 2. *Канонической системой координат Oxy называется такая прямоугольная декартова система координат, что ось абсцисс Ox проходит через фокусы F_1 и F_2 эллипса, а ось ординат Oy делит отрезок F_1F_2 пополам.*

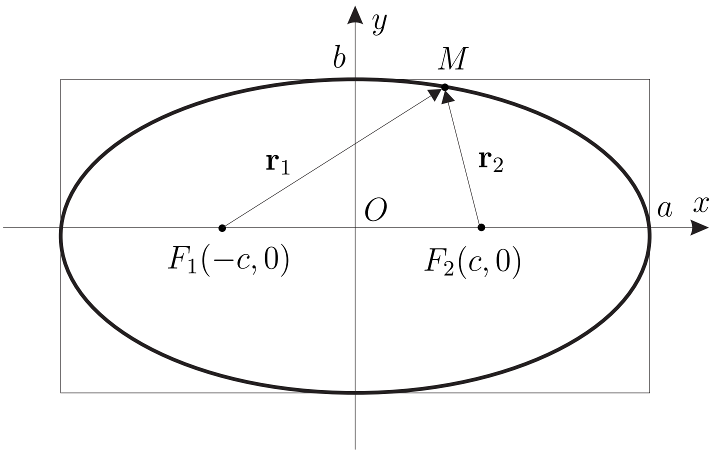

Рис. 1. Эллипс в канонической системе координат.

Вывод канонического уравнения эллипса в канонической системе координат. В канонической системе координат Oxy фокусы F_1 и F_2 эллипса имеют следующие координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Пусть точка $M(x, y)$ — это точка эллипса. Согласно определению эллипса имеем

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a > 0, \tag{1.1}$$

где

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,, \quad \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

После избавления от радикалов мы получим такое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \tag{1.2}$$

причём $a > c$. Введём обозначение $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, тогда уравнение (1.2) примет окончательный вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0. \tag{1.3}$$

Нам нужно теперь доказать, что все точки $M(x, y)$, удовлетворяющие уравнению (1.3), удовлетворяют уравнению (1.1). Введём эксцентриситет

$$\varepsilon := \frac{c}{a} < 1. \tag{1.4}$$

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$
$$= \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 + b^2}\,.$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \varepsilon^2,$$

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 + b^2} =$$
$$= \sqrt{\varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon a x + a^2} = |\varepsilon x + a| = \varepsilon x + a > 0, \tag{1.5}$$

поскольку $|x| \leqslant a$ и $0 < \varepsilon < 1$. Аналогичным образом получаем равенство

$$\left|\overrightarrow{F_2M}\right| = a - \varepsilon x > 0. \tag{1.6}$$

Поэтому

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \varepsilon x + a + a - \varepsilon x = 2a.$$

Ф о р м а э л л и п с а. Заметим, что из уравнения (1.3) вытекает

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b.$$

Следовательно, эллипс расположен в этом прямоугольнике.

Д и р е к т о р и а л ь н о е с в о й с т в о э л л и п с а. Из уравнений (1.5) и (1.6) вытекают равенства:

$$|\mathbf{r}_1| = \left|\overrightarrow{F_1M}\right| = a + x\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} + x\right) = \varepsilon d_1 \Rightarrow \frac{|\mathbf{r}_1|}{d_1} = \varepsilon,$$
$$|\mathbf{r}_2| = \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = a - x\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right) = \varepsilon d_2 \Rightarrow \frac{|\mathbf{r}_2|}{d_2} = \varepsilon.$$

Очевидно, что d_1 — это расстояние от точки $M(x, y)$ до прямой $x = -a/\varepsilon$, а d_2 — это расстояние от точки $M(x, y)$ до прямой $x = a/\varepsilon$.

Определение 3. *Прямые, в канонической системе координат имеющие уравнения* $x = \pm a/\varepsilon$, *называются директрисами.*

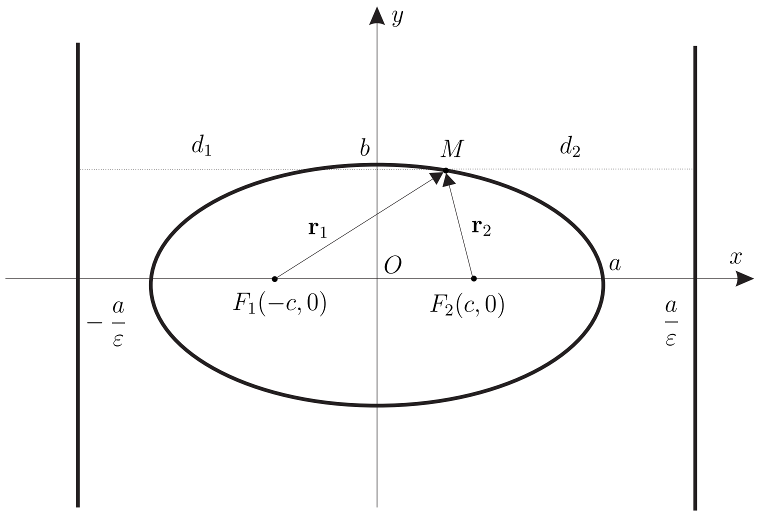

Рис. 2. Эллипс и его директрисы.

Теорема 1. *Отношение расстояния* $|\mathbf{r}_j|$ *от фокуса* F_j *до точки* $M(x,y)$ *эллипса к расстоянию* d_j *от этой точки до соответствующей директрисы при* $j = 1, 2$ *есть величина постоянная, равная* ε.

§ 2. Каноническое уравнение гиперболы

Определение 4. *Гиперболой называется геометрическое место точек* $M(x,y)$, *модуль разности расстояний от которой до двух фиксированных точек* F_1 *и* F_2, *называемые полюсами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами и не равная нулю.*

Определение 5. *Канонической системой декартовых прямоугольных координат* Oxy *называется такая система координат, в которой ось абсцисс* Ox *проходит через оба фокуса, а ось ординат* Oy *проходит через середину отрезка* F_1F_2.

Уравнение гиперболы в канонической системе координат. Согласно определению 5 координаты фокусов имеют вид $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Тогда расстояния от произвольной точки $M(x,y)$ гиперболы до фокусов имеют следующий вид:

$$|\mathbf{r}_1| = \left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,, \quad |\mathbf{r}_2| = \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

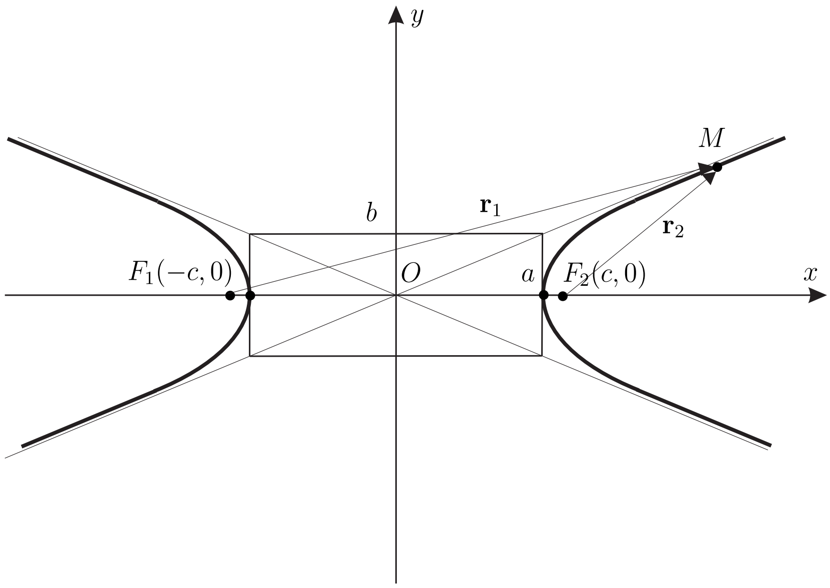

Рис. 3. Гипербола в канонической системе координат.

Тогда согласно определению 4 имеем

$$\left| \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \right| = 2a > 0, \quad a < c. \tag{2.1}$$

Уничтожив радикалы мы получим равенство

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1. \tag{2.2}$$

Введём обозначение $b^2 = c^2 - a^2$ и получим искомое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.3}$$

Обратно покажем, что из уравнения (2.3) вытекает уравнение (2.1). Сначала введём эксцентриситет

$$\varepsilon := \frac{c}{a} > 1.$$

$$\frac{b^2}{a^2} + 1 = \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} + 1 = \varepsilon^2.$$

$$|\mathbf{r}_1|^2 = \left|\overrightarrow{F_1M}\right|^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) =$$

$$= x^2 + 2xc + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 = \varepsilon^2x^2 + 2a\varepsilon x + a^2 = |\varepsilon x + a|^2. \tag{2.4}$$

Аналогичным образом для фокуса $F_2(0, c)$ получаем равенство

$$|\mathbf{r}_2|^2 = \left|\overrightarrow{F_2M}\right|^2 = |\varepsilon x - a|^2 . \tag{2.5}$$

Заметим, что $|\varepsilon x| > |x| \geqslant a$ и поэтому из формул (2.4) и (2.5) вытекают равенства

$$|\mathbf{r}_1| = \begin{cases} x\varepsilon + a, & \text{если} \quad x > 0; \\ -x\varepsilon - a, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases} \quad |\mathbf{r}_2| = \begin{cases} x\varepsilon - a, & \text{если} \quad x > 0; \\ -x\varepsilon + a, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

Следовательно, во всех случаях

$$||\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2|| = 2a.$$

А н а л и з ф о р м ы г и п е р б о л ы. Из уравнения гиперболы (2.3) вытекает равенство

$$|x| \geqslant a \quad \text{и} \quad |y| = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = b\frac{|x|}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} < \frac{b}{a}|x|.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$-\frac{b}{a}x < y < \frac{b}{a}x, \quad |x| \geqslant a,$$

т. е. обе ветви гиперболы лежат внутри области, заключённой между двумя прямыми

$$y = -\frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x \quad \text{при} \quad |x| \geqslant a. \tag{2.7}$$

Эти прямые являются асимптотами гиперболы.

□ Действительно, имеем

$$|y| = b\frac{|x|}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = b\frac{|x|}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2} + \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{|x|^2}\right)\right) =$$
$$= b\frac{|x|}{a} - \frac{ab}{2}\frac{1}{|x|} + \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{|x|}\right). \quad \boxtimes$$

Д и р е к т о р и а л ь н о е с в о й с т в о г и п е р б о л ы. Заметим, что формулы (2.6) можно объединить следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mathbf{r}_1| = \varepsilon\,(x + a/\varepsilon) \\ |\mathbf{r}_2| = \varepsilon\,(x - a/\varepsilon) \end{array} \right. \quad \text{при} \quad x > 0, \tag{2.8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mathbf{r}_1| = \varepsilon\,(-x - a/\varepsilon) \\ |\mathbf{r}_2| = \varepsilon\,(-x + a/\varepsilon) \end{array} \right. \quad \text{при} \quad x < 0. \tag{2.9}$$

Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 6. *Прямые, заданные в канонической системе координат уравнениями*

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon},$$

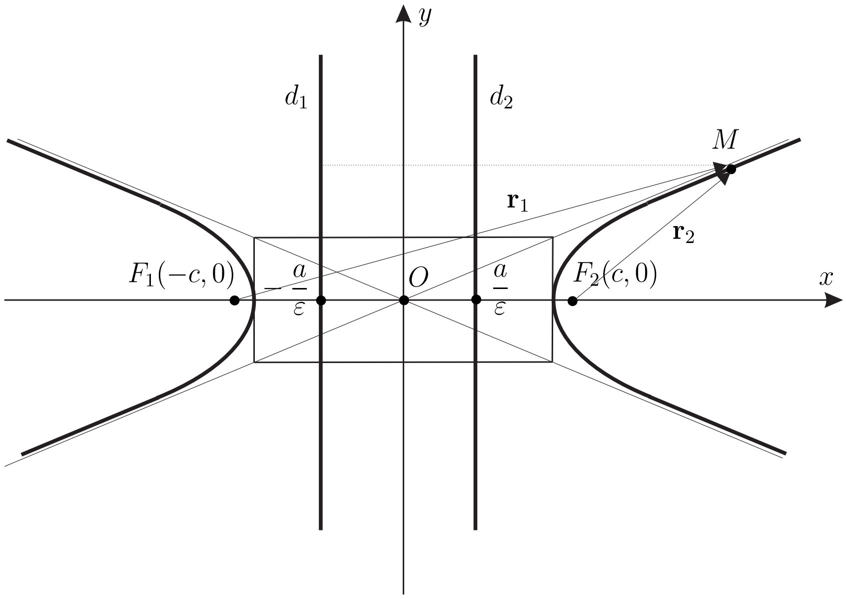

Рис. 4. Гипербола и её директрисы.

называются директрисами.

Теорема 2. *Отношение расстояния $|\mathbf{r}_j|$ от фокуса F_j до точки $M(x,y)$ гиперболы к расстоянию d_j от этой точки до соответствующей директрисы при $j=1,2$ есть величина постоянная, равная ε.*

Взаимно сопряжённые гиперболы.

Определение 7. *Две гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, \quad c=\sqrt{a^2+b^2}$$

называются взаимно сопряжёнными.

§ 3. Каноническое уравнение параболы

Определение 8. *Параболой называется геометрическое множество точек $M(x,y)$ на евклидовой плоскости, расстояние от каждой из которых до некоторой точки F, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой прямой, называемой директрисой.*

Определение 9. *Канонической декартовой прямоугольной системой координат Oxy называется такая система координат, что ось абсцисс Ox проходит через фокус F и перпендикулярна директрисы, а ось ординат проходит через середину перпендикуляра, опущенного на директрису из фокуса F.*

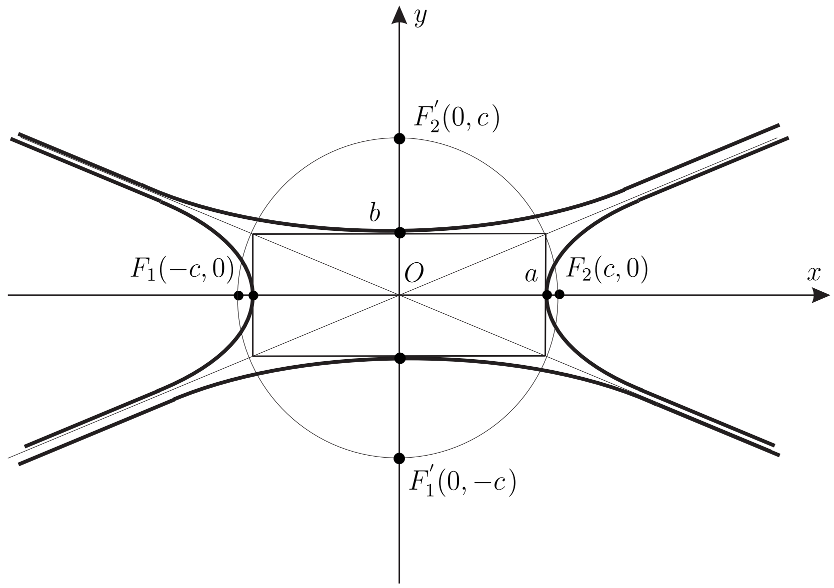

Рис. 5. Взаимно сопряжённые гиперболы.

Уравнение параболы в канонической системе координат. Из определения 9 вытекает, что в канонической системе координат

$$F(p/2,0) \text{ – фокус}, \quad x = -\frac{p}{2} \text{ – уравнение директрисы.}$$

Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка параболы. Тогда

$$\left|\overrightarrow{FM}\right| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\,.$$

Согласно определению параболы 8 её уравнение имеет следующий вид:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|, \tag{3.1}$$

из которого вытекает уравнение

$$y^2 = 2px. \tag{3.2}$$

Обратно из уравнения (3.2) имеем

$$y^2 = 2px = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{p}{2}\right)^2,$$

$$\left|x+\frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\,.$$

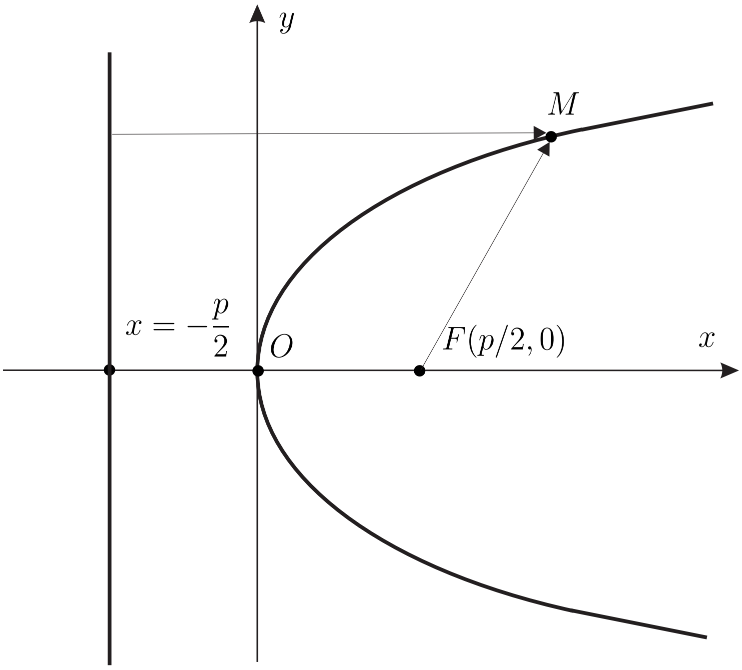

Рис. 6. Парабола в канонической системе координат.

§ 4. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе

Определение 10. *Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом единственную общую точку.*

Вывод уравнения касательной к эллипсу. Необходимо и достаточно найти условия существования единственного решения следующей системы уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=x_0+lt; \\ y=y_0+mt, \end{cases} \tag{4.1}$$

Справедливо следующее равенство:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+2t\left(\frac{x_0 l}{a^2}+\frac{y_0 m}{b^2}\right)+t^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)=1. \tag{4.2}$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на эллипсе, тогда приходим к следующим условиям

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad t=0. \tag{4.3}$$

Кроме того, тогда число $t = 0$ должно быть единственным решением квадратного уравнения (4.2). Следовательно, приходим к равенству

$$\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2} = 0. \tag{4.4}$$

В качестве направляющего вектора искомой касательной можно взять числа

$$l = \frac{y_0}{b^2}, \quad m = -\frac{x_0}{a^2}.$$

Тогда уравнение касательной имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{y_0/b^2} = \frac{y - y_0}{-x_0/a^2} \Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0. \tag{4.5}$$

В силу первого равенства из (4.3) приходим к искомому уравнению (в канонической системе координат)

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{4.6}$$

Определение 11. *Касательной к гиперболе называется прямая, имеющая с гиперболой единственную общую точку и не параллельная асимптотам гиперболы.*

Уравнение касательной к гиперболе. Уравнение касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$ гиперболы в канонической системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{4.7}$$

Определение 12. *Касательной к параболе называется прямая, имеющая с параболой единственную точку и не параллельная оси параболы.*

Уравнение касательной к параболе. Уравнение касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$ параболы в канонической системе координат имеет следующий вид:

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{4.8}$$

§ 5. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

Оптическое свойство эллипса.

Теорема 3. *Фокальные радиусы произвольной точки M_0 эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке M_0.*

Доказательство.

Вычисли расстояние от фокусов F_1 и F_2 до касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$. Поскольку уравнение касательной в канонической системе координат имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

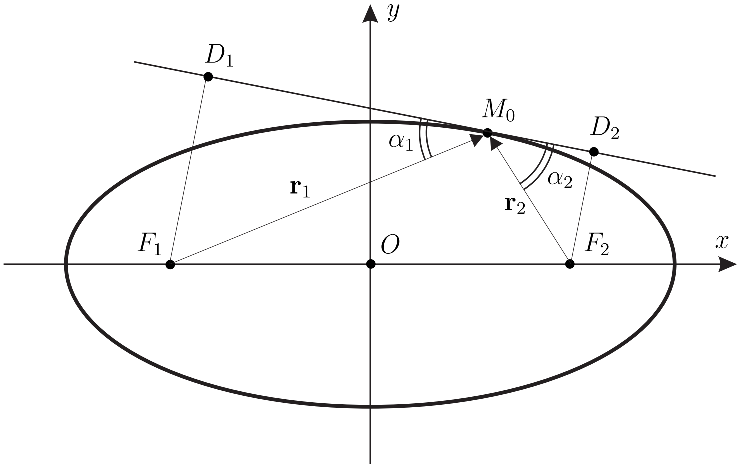

Рис. 7. Оптическое свойство эллипса.

а фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ имеют место равенства

$$|F_1D_1| = \frac{\left|(-c)\cdot x_0/a^2 + 0\cdot y_0/b^2 - 1\right|}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \frac{|\varepsilon x_0 + a|}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \\ = \frac{\varepsilon x_0 + a}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \frac{|\mathbf{r}_1|}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}.$$

Отсюда

$$\sin\alpha_1 = \frac{|F_1D_1|}{|\mathbf{r}_1|} = \frac{1}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}.$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$|F_2D_2| = \frac{\left|c\cdot x_0/a^2 + 0\cdot y_0/b^2 - 1\right|}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \frac{|\varepsilon x_0 - a|}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \\ = \frac{a - \varepsilon x_0}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} = \frac{|\mathbf{r}_2|}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\sin\alpha_2 = \frac{|F_2D_2|}{|\mathbf{r}_2|} = \frac{1}{a\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}.$$

Из равенства синусов углов вытекает равенство углов.

Теорема доказана.

Оптическое свойство гиперболы.

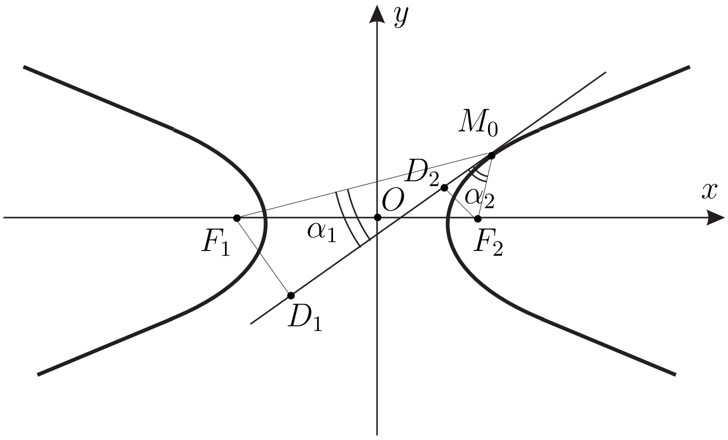

Рис. 8. Оптическое свойство гиперболы.

Теорема 4. *Фокальные радиусы произвольной точки M_0 гиперболы составляют равные углы с касательной к гиперболе, проведенной через точку M_0.*

Доказательство. Аналогично случаю эллипса устанавливаем равенства

$$\sin\alpha_1 = \frac{|F_1D_1|}{|F_1M_0|} = \frac{|F_2D_2|}{|F_2M_0|} = \sin\alpha_2.$$

Теорема доказана.

Оптическое свойство параболы.

Теорема 5. *Фокальный радиус произвольной точки M_0 параболы и ось параболы составляют равные углы с касательной к параболе, проведённой через точку M_0.*

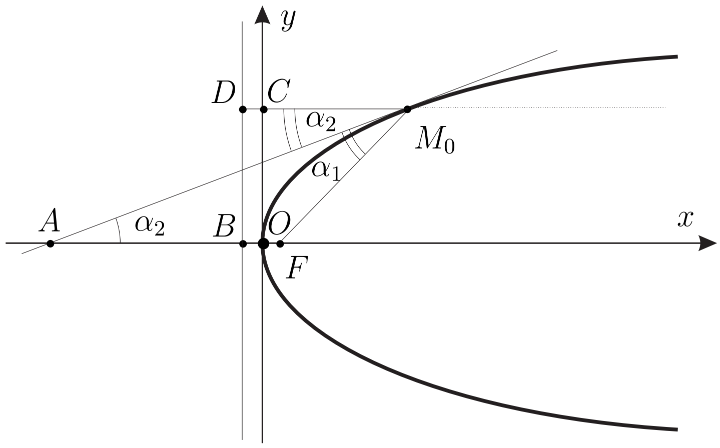

Рис. 9. Оптическое свойство параболы.

Доказательство. Из уравнения касательной

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

к параболе в точке $M_0(x_0, y_0)$ вытекает, что касательная пересекает ось абсцисс Ox в точке $A(-x_0, 0)$.

Следовательно, с одной стороны,

$$|AO| = x_0, \quad |AF| = |AO| + |OF| = x_0 + \frac{p}{2}.$$

С другой стороны, имеем согласно определению параболы

$$|M_0F| = |M_0D| = |M_0C| + |CD| = x_0 + \frac{p}{2}.$$

Таким образом, $|AF| = |M_0F|$. Значит,

$$\angle FAM_0 = \angle AM_0F,$$

но

$$\angle FAM_0 = \angle DM_0A \Rightarrow \angle DM_0A = \angle AM_0F.$$

Теорема доказана.

§ 6. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы

Полярное уравнение параболы. Введём полярную систему координат с полюсом в фокусе параболы, а полярная ось совпадает с осью абсцисс Ox. Тогда справедливы формулы, связывающие декартовы и полярные координаты точек плоскости

$$\begin{cases} x - p/2 = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{6.1}$$

Согласно определению параболы имеет место равенство

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{6.2}$$

Из формул (6.1) и (6.2) вытекает равенство

$$r = p + r\cos\varphi,$$

из которого получаем <u>полярное уравнение параболы</u>

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}. \tag{6.3}$$

Полярное уравнение эллипса. Поместим полюс полярной системы координат в фокус $F_1(-c, 0)$ и снова выберем полярную ось, совпадающей с осью абсцисс Ox. Справедливы следующие формулы, связывающие декартовы и полярные координаты

$$\begin{cases} x + c = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{6.4}$$

Кроме того, справедливо следующее равенство для эллипса

$$r = \varepsilon x + a. \tag{6.5}$$

Из уравнений (6.4) и (6.5) вытекает следующая цепочка равенств:

$$r = \varepsilon\left(-c + r\cos\varphi\right) + a \Rightarrow r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

где

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1, \quad p := -\varepsilon c + a = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Таким образом, получили полярное уравнение эллипса

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} < 1. \tag{6.6}$$

Полярное уравнение гиперболы. Для простоты рассмотрим уравнение правой ветви гиперболы. С этой целью выберем полярную систему координат с полюсом в правом фокусе $F_2(c, 0)$ гиперболы, а полярную ось выберем совпадающей с осью абсцисс Ox. Связь декартовых и полярных координат имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x - c = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{6.7}$$

Кроме того, имеет место равенство для правой ветви гиперболы $(x > 0)$

$$r = \varepsilon x - a. \tag{6.8}$$

Из уравнений (6.7) и (6.8) приходим к полярному уравнению гиперболы

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} > 1. \tag{6.9}$$

Таким образом, эллипс, гипербола и парабола описываются уравнением одного и того же вида

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \tag{6.10}$$

причём при $\varepsilon = 0$ — это уравнение окружности, $\varepsilon \in (0, 1)$ — это уравнение эллипса, при $\varepsilon = 1$ — это уравнение параболы, а при $\varepsilon > 1$ — это уравнение гиперболы.

1. В случае $\varepsilon \in [0, 1)$ полярное уравнение корректно для всех углов $\varphi \in [0, 2\pi)$;
2. В случае $\varepsilon = 1$ «плохое» значение $\varphi = 0$, но этот угол не соответствует ни какой точки параболы;

3. Рассмотрим теперь уравнение гиперболы, тогда полярное уравнение корректно при условии

$$\cos\varphi < \frac{1}{\varepsilon} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\vartheta,$$

но это условие выполнено для гиперболы, поскольку угол ϑ — это угол между фокальной осью гиперболы и асимптотами правой ветви гиперболы. При этом

$$\vartheta < \varphi < 2\pi - \vartheta \Rightarrow \cos\varphi < \cos\vartheta.$$