Конспект лекции 5

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА I

§ 0. План лекции

Лекция Векторные пространства I.

1. Пространство векторов.

1.1. Определение направленного отрезка;

1.2. Определение равенства направленных отрезков;

1.3. Отношение эквивалентности по равенству направленных отрезков;

1.4. Классы векторов и их свойства;

1.5. Нулевой вектор;

1.6. Длина вектора;

1.7. Определение сложения векторов и умножения вектора на число;

1.8. Теорема о 8 линейных свойствах векторов.

2. Абстрактное векторное пространство.

2.1. «8»=«4+2+2» аксиомы векторного пространства;

2.2. Примеры.

3. Линейные оболочки и подпространства.

3.1. Определение линейной комбинации. Тривиальная линейная комбинация;

3.2. Определение линейной оболочки;

3.3. Лемма о $L(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_p) \subset L(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_r)$;

3.4. Определение подпространства;

3.5. Лемма $L(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_r)$ — это подпространство.

4. Линейная зависимость и независимость.

4.1. Определение линейной зависимости и линейной независимости;

4.2. Примеры $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ и $\mathbb{V}_3$;

4.3. Лемма о НИДУ существования нетривиального решения однородной системы линейных уравнений;

4.4. Теорема о 7 свойствах линейной зависимости и линейной независимости систем векторов.

§ 1. Пространства векторов

Определение 1. *Направленным отрезком или геометрическим вектором* $\overrightarrow{AB}$ *называется упорядоченная пара точек* (A, B)*, первая из которых называется началом, а вторая концом направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$.

Определение 2. *Направленные отрезки* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *называются равными, если середины отрезков* $[AD]$ *и* $[CB]$ *совпадают.*

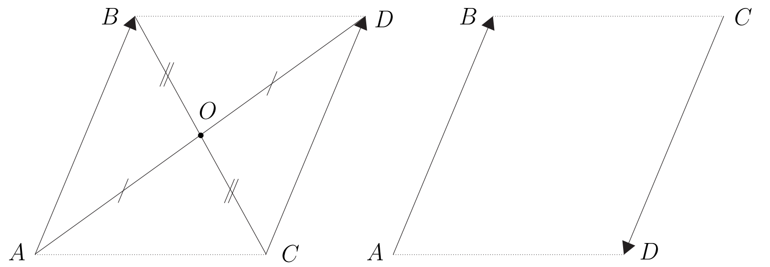

Рис. 1. Равные направленные отрезки и противоположно направленные направленные отрезки.

Лемма 1. *Справедливы следующие свойства равных отрезков*:

(i) *рефлексивность*: направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ равен самому себе;

(ii) *симметричность*: если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{CD}$, то направленный отрезок $\overrightarrow{CD}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$;

(iii) *транзитивность*: если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{CD}$, а направленный отрезок $\overrightarrow{CD}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{KL}$, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{KL}$.

Разобьем множество всех геометрических векторов пространства на классы векторов таким образом, чтобы к одному классу $\mathbf{a} = \mathrm{class}(\overrightarrow{AB})$ относились все равные направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$ направленные отрезки. Тогда все множество направленных отрезков разбивается на классы *свободных векторов* или просто *векторов*.

Лемма 2. *Справедливы следующие свойства*:

1. *если* $\overrightarrow{CD} \in \mathrm{class}(\overrightarrow{AB})$, *то* $\mathrm{class}(\overrightarrow{CD}) = \mathrm{class}(\overrightarrow{AB})$;
2. *два класса либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство.

1. $\square$ Пусть $\overrightarrow{CD} \in \mathrm{class}(\overrightarrow{AB})$, тогда

$$\overrightarrow{LM} \in \mathrm{class}(\overrightarrow{CD}) \Rightarrow \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{CD}, \quad \text{но} \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{LM} \in \mathrm{class}(\overrightarrow{AB});$$

$$\overrightarrow{LM} \in \operatorname{class}(\overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AB}, \quad \text{но} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{LM} \in \operatorname{class}(\overrightarrow{CD}).$$

Итак, имеем $\operatorname{class}(\overrightarrow{CD}) = \operatorname{class}(\overrightarrow{AB})$. ⊠

2. □ Любые два класса $\operatorname{class}(\overrightarrow{AB})$ и $\operatorname{class}(\overrightarrow{CD})$ либо не пересекаются, либо имеют хотя бы один общий элемент $\overrightarrow{LM}$, то тогда в силу свойства 1 имеем

$$\operatorname{class}(\overrightarrow{CD}) = \operatorname{class}(\overrightarrow{LM}) = \operatorname{class}(\overrightarrow{AB}). \quad ⊠$$

Лемма доказана.

Определение 3. *Нулевой вектор* $\mathbf{0}$ *— это класс нулевых направленных отрезков* $\overrightarrow{AA} \in \mathbf{a}$.

Определение 4. *Длина вектора* $\mathbf{a}$ *— это длина* $|\overrightarrow{AB}|$ *любого направленного отрезка* $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$.

Определение 5. *Векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называются одинаково направленными* (*противоположно направленными*), *если одинаково направлены* (*противоположны направлены*) *направленные отрезки* $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$ *и* $\overrightarrow{CD} \in \mathbf{b}$.

Линейные операции над векторами.

I. Сложение векторов. Сумма векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяется следующим образом. От произвольной точки A отложим направленный отрезок $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$. От конца B направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ отложим направленный отрезок $\overrightarrow{BC} \in \mathbf{b}$ — в итоге получим направленный отрезок $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \in \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

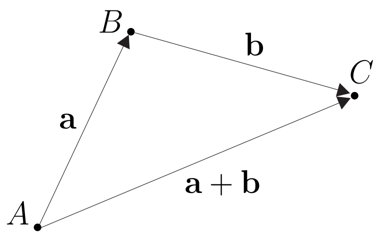

Рис. 2. Сложение векторов.

Определение 6. *Суммой* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется вектор* $\mathbf{c}$, *порожденный направленным отрезком* $\overrightarrow{AC}$, *т. е.* $\mathbf{c} = \operatorname{class}(\overrightarrow{AC})$.

II. Умножение вектора на число.

Определение 7. *Произведением вектора* $\mathbf{a} = \operatorname{class}(\overrightarrow{AB})$ *на число* $\lambda \in \mathbb{R}$ *называется вектор* $\lambda\mathbf{a}$, *порождённый направленным отрезком* $\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, *длина которого равна* $|\lambda||\overrightarrow{AB}|$ *и направление кото-*

рого совпадает с направлением $\overrightarrow{AB}$, *если* $\lambda > 0$, *и противоположно направлению* $\overrightarrow{AB}$, *если* $\lambda < 0$.

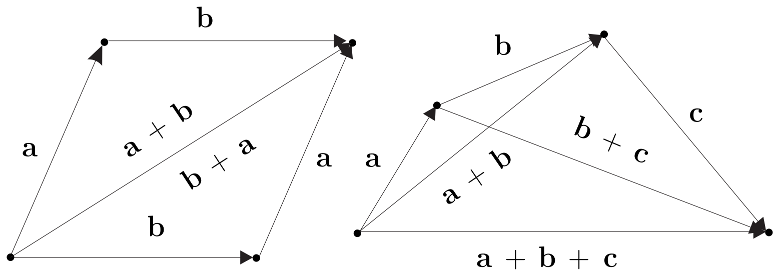

Рис. 3. Коммутативность и ассоциативность сложения.

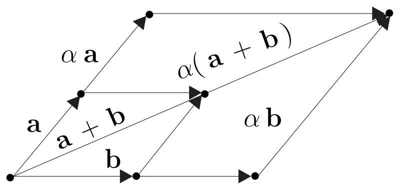

Рис. 4. Дистрибутивоность относительно сложения векторов.

Теорема 1. *Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами*:

1. *коммутативность сложения*: *для любых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$$
2. *ассоциативность сложения*: *для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c});$$
3. *свойство нулевого вектора*: *для любого вектора* $\mathbf{a}$
$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a};$$
4. *существование противоположного элемента*: *для любого вектора* $\mathbf{a}$ *существует такой вектор* $-\mathbf{a}$, *что*
$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0};$$
5. *свойство единицы*: *для любого вектора* $\mathbf{a}$
$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a};$$
6. *ассоциативность умножения на число*: *для любого вектора* $\mathbf{a}$ *и любых чисел* α *и* β
$$(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a});$$

7. *дистрибутивность относительно сложения векторов: для любых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *и любого числа* α
$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b};$$
8. *дистрибутивность относительно сложения чисел: для любого вектора* $\mathbf{a}$ *и любых чисел* α *и* β
$$(\alpha+\beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}.$$

§ 2. Определение векторного пространства

Рассмотрим множество $\mathcal{L}$, элементы которого мы будем называть векторами. Пусть на множестве $\mathcal{L}$ определены операция суммы векторов $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathcal{L}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$, а также операция умножения на вещественные числа $\lambda \cdot \mathbf{x} \in \mathcal{L}$ для любых $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ и для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Дадим определение.

Определение 8. *Множество* $\mathcal{L}$ *с определёнными на нём операциями сложения векторов и умножения векторов на вещественные числа называется векторным пространством, если справедливы следующие свойства:*

ВП1. *коммутативность сложения: для любых векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$
$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x};$$
ВП2. *ассоциативность сложения: для любых векторов* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *и* $\mathbf{z}$
$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z});$$
ВП3. *свойство нулевого вектора: существует нулевой вектор* $\mathbf{0}$ *такой, что для любого вектора* $\mathbf{x}$
$$\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x};$$
ВП4. *существование противоположного элемента: для любого вектора* $\mathbf{x}$ *существует такой вектор* $-\mathbf{x}$, *что*
$$\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0};$$
ВП5. *свойство единицы: для любого вектора* $\mathbf{x}$
$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x};$$
ВП6. *ассоциативность умножения на число: для любого вектора* $\mathbf{x}$ *и любых чисел* α *и* β
$$(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x});$$
ВП7. *дистрибутивность относительно сложения векторов: для любых векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *и любого числа* α
$$\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y};$$

ВП8. *дистрибутивность относительно сложения чисел: для любого вектора* $\mathbf{x}$ *и любых чисел* α *и* β

$$(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}.$$

Примеры векторных пространств.

Пример 1. Нулевое пространство, которое состоит из одного нулевого элемента $\{\mathbf{0}\}$, является векторным пространством.

Пример 2. Пространства векторов $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ и $\mathbb{V}_3$ на прямой на плоскости и в пространстве являются векторными пространствами.

Пример 3. Пространство матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$ является векторным пространством.

§ 3. Линейные оболочки и подпространства

Пусть дано семейство векторов $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_r\in\mathfrak{L}$ и семейство чисел $\alpha_1,\alpha,\ldots,\alpha_r\in\mathbb{K}$.

Определение 9. *Линейной комбинацией векторов называется сумма*

$$\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\cdots+\alpha_r\mathbf{x}_r.$$

Определение 10. *Линейная комбинация векторов называется тривиальной, если* $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$.

Определение 11. *Линейной оболочкой векторов* $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_r\in\mathfrak{L}$ *называется следующее множество:*

$$L(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_r)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\cdots+\alpha_r\mathbf{x}_r:\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\in\mathbb{K}\}.$$

Лемма 3. *Пусть векторы* $\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_p$ *принадлежат линейной оболочке векторов* $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_r$. *Тогда*

$$L(\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_p)\subset L(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_r).$$

Определение 12. *Подмножество* $P\subset\mathfrak{L}$ *векторного пространства* $\mathfrak{L}$ *называется подпространством, если*

$$\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\in P$$

для всех $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ *и для всех* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in P$.

Пример 4. Очевидно, $\mathbb{V}_1$ подпространство плоскости $\mathbb{V}_2\supset\mathbb{V}_1$, а $\mathbb{V}_2$ подпространство пространства $\mathbb{V}_3\supset\mathbb{V}_2$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 4. *Линейная оболочка* $L(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_r)$ *семейства элементов* $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_r\}$ *векторного пространства* $\mathfrak{L}$ *является его подпространством.*

Доказательство.

Действительно, пусть $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r)$, тогда

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{z} = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \mathbf{x}_k.$$

$$\alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z} = \sum_{k=1}^{r} (\alpha \alpha_k + \beta \beta_k) \mathbf{x}_k \in L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r).$$

Лемма доказана.

§ 4. Линейная зависимость и независимость

Определение 13. *Семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ *называется линейно зависимым, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору*:

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \neq (0, \dots, 0).$$

В случае, когда

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_r) = (0, \dots, 0).$$

семейство векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ *называется линейно независимым.*

Пример 5. В векторном пространстве $\{\mathbf{0}\}$ нет линейно независимых векторов.

Пример 6. В векторном пространстве $\mathbb{V}_1$ любой ненулевой вектор образует линейно независимое семейство векторов. В векторном пространстве $\mathbb{V}_2$ любые два неколлинеарных вектора образуют линейно независимое семейство. В векторном пространстве $\mathbb{V}_3$ любые три некомпланарных вектора образуют линейно независимое семейство векторов.

Лемма 5. *Однородная линейная система уравнений*

$$AX = A_1 x^1 + \dots + A_n x^n = O \tag{4.1}$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы $A_1, \dots, A_n$ *её основной матрицы* A *линейно зависимы.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть система уравнений (4.1) имеет нетривиальное решение

$$X_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n \right)^T \neq O,$$

тогда имеет место равенство

$$A_1 x_0^1 + \dots + A_n x_0^n = O.$$

Откуда вытекает, что столбцы основной матрицы линейно зависимы.

Шаг 2. Достаточность. Пусть столбцы линейно зависимы, т. е.

$$A_1 x_0^1 + \dots + A_n x_0^n = O$$

при некотором семействе $(x_0^1, \cdots, x_0^n) \neq (0, \cdots, 0)$. Следовательно,

$$X_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)^T$$

— это нетривиальное решение системы уравнений (4.1).

Лемма доказана.

Теорема 2. *Справедливы следующие свойства*:

1. *Любое семейство векторов с повторениями линейно зависимо.*
2. *Если в семействе векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *имеется нулевой вектор* $\mathbf{0}$, *то это семейство линейно зависимо.*
3. *Семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *линейно зависимо тогда и только тогда, когда хотя бы один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.*
4. *Если в семействе векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, \ldots, \mathbf{x}_s$ *имеется линейно зависимое подсемейство* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$, *то и все семейство линейно зависимо.*
5. *Любая часть линейно независимого семейства является линейно независимо.*
6. *Если семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *линейно независимо, а семейство* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}$ *линейно зависимо, то вектор* $\mathbf{x}$ *является линейной комбинацией семейства* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$.
7. *Если семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *линейно независимо, а вектор* $\mathbf{x}$ *нельзя через них выразить, то семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}$ *также линейно независимо.*

Доказательство.

1. □ Действительно, пусть, например, в семействе $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ первый и второй векторы совпадают $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Тогда справедливо равенство

$$1 \cdot \mathbf{x}_1 + (-1) \cdot \mathbf{x}_2 + 0 \cdot \mathbf{x}_3 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_r = \mathbf{0},$$

хотя набор коэффициентов нетривиален. ⊠

2. □ Действительно, пусть например первый вектор $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ в семействе $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$. Тогда

$$1 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_r = \mathbf{0},$$

хотя набор коэффициентов нетривиален. ⊠

3. □ Действительно, пусть семейство векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ линейно зависимо. Тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, что

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$, тогда

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{x}_2 - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_1}\mathbf{x}_r.$$

Наоборот пусть

$$\mathbf{x}_1 = \beta_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_r \mathbf{x}_r \Leftrightarrow (-1) \cdot \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}. \quad ⊠$$

4. $\square$ Действительно, пусть семейство $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ линейно зависимые, тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_r$, что

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{x}_r = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{x}_r + 0\cdot\mathbf{x}_{r+1} + \cdots + 0\cdot\mathbf{x}_s = \mathbf{0}. \quad \boxtimes$$

5. $\square$ Действительно, это следствие утверждения 4. $\boxtimes$

6. $\square$ Действительно, поскольку семейство векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}$ линейно зависимо, то найдется нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha$, что

$$\alpha\mathbf{x} + \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{x}_r = \mathbf{0}.$$

Предположим, что $\alpha = 0$, но тогда в силу линейной независимости семейства $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ отсюда получаем, что

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

Пришли к противоречию с условием нетривиальности набора $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha$. Следовательно, $\alpha \neq 0$. $\boxtimes$

7. $\square$ Действительно, это следствие утверждения 6. $\boxtimes$

Теорема доказана.