Конспект лекции 4

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 0. План лекции

Лекция. Системы линейных уравнений.
1. Матричная запись.
1.1. Основная и расширенная матрицы системы;
1.2. Совместные и не совместные системы.
2. Однородные системы.
2.1. Определение;
2.2. Определение линейной комбинации столбцов;
2.3. Свойство решений однородной системы уравнений;
2.4. Линейная зависимость и линейная независимость;
2.5. ФСР и фундаментальная матрица системы.
3. Неоднородные системы.
3.1. Определение;
3.2. Теорема об общем решении неоднородной системы уравнений.
4. Системы уравнений упрощённого вида.
4.1. Определение базисной переменной;
4.2. Определение упрощённой системы уравнений;
4.3. Определение свободной переменной;
4.4. Специальная однородная система уравнений упрощённого вида:
4.5. Редукция и построение ФСР;
4.6. Специальная система уравнений упрощённого вида.
5. Метод Гаусса–Жордана.
5.1. Элементарные преобразования;
5.2. Пример.
6. Матрицы элементарных преобразований.
6.1. I тип;
6.2. II тип;

§ 1. Основные определения

Общая система линейных уравнений.

$$\left\{\begin{array}{c} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \cdots + a_n^1x^n = b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \cdots + a_n^2x^n = b^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \cdots + a_n^mx^n = b^m. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Матричная форма записи.

$$AX = B \quad \text{или} \quad A_1x^1 + \cdots + A_nx^n = B, \tag{1.2}$$

где *основная матрица* системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \|A_1, A_2, \cdots, A_n\|, \tag{1.3}$$

столбец неизвестных X, столбец правой части B

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

и *расширенная матрица системы* $\widetilde{A}$

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{array}\right) = \|A_1, A_2, \cdots, A_n, B\| = \|A, B\|. \tag{1.5}$$

Определение 1. *Столбец* $X_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^n)^T$ *называется решением системы уравнений* (1.2), *если после его подстановки в систему уравнений* (1.2) *получиться тождество.*

Определение 2. *Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Система уравнений называется несовместной, если она не имеет решений.*

§ 2. Однородные системы

Определение 3. *Система линейных уравнений называется однородной, если правая часть уравнения* (1.2) *равна нулевому столбцу* $B = O$:

$$AX = O \quad \textit{или} \quad A_1x^1 + \cdots + A_nx^n = O, \quad O = (0, \cdots, 0)^T. \tag{2.1}$$

Замечание 1. Однородная система уравнений (2.1) всегда совместна, поскольку всегда имеет *тривиальное решение*

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Однако, однородная система уравнений может иметь нетривиальное решение. Например, уравнение

$$x^1 + x^2 = 0$$

имеет нетривиальное решение

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Определение 4. *Линейной комбинацией столбцов* X_k *при* $k = \overline{1,p}$ *называется сумма*

$$c^1 X_1 + \cdots + c^p X_p, \quad c^k \in \mathbb{K}.$$

Теорема 1. *Если* X_1 *и* X_2 *— это два решения однородной системы уравнений* (2.1), *то любая их линейная комбинация*

$$X_3 = c^1 X_1 + c^2 X_2, \quad c^1, c^2 \in \mathbb{K}$$

также будет решением системы (2.1).

Определение 5. *Семейство столбцов* A_1, $A_2, \ldots, A_p$ *называется линейно независимым, если их линейная комбинация*

$$c^1 A_1 + \cdots + c^p A_p$$

обращается в нулевой столбец O *тогда и только тогда, когда*

$$c^1 = \cdots = c^p = 0.$$

В противном случае это семейство столбцов называется линейно зависимым.

Пример 1. Два столбца

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются линейно независимыми, поскольку

$$c^1 A_1 + c^2 A_2 = \begin{pmatrix} c^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c^1 = c^2 = 0.$$

А вот столбцы

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

не являются линейно независимыми, т.е. являются линейно зависимыми, поскольку

$$B_2 - 2B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O.$$

Лемма 1. *Если семейство столбцов A_1, $A_2, \ldots, A_p$ является линейно независимым, то никакой из столбцов этого семейства не может линейно выражаться через остальные столбцы.*

Доказательство.

Действительно, пусть, например, столбец A_p линейно выражается через $A_1, \ldots, A_{p-1}$, т. е.

$$A_p = \alpha^1 A_1 + \cdots + \alpha^{p-1} A_{p-1} \Leftrightarrow \alpha^1 A_1 + \cdots + \alpha^{p-1} A_{p-1} + (-1)A_p = 0,$$

но это означает, что семейство столбцов $A_1, \ldots, A_p$ является линейно зависимым.

Лемма доказана.

Определение 6. *Фундаментальное семейство решений (ФСР) однородной системы* (2.1) *— это такое семейство линейно независимых решений–столбцов X_1, $X_2, \ldots, X_s$, что любое решение системы* (2.1) *можно представить в виде их линейной комбинации:*

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 + \cdots + c^s X_s, \tag{2.2}$$

где $c^1, c^2, \ldots, c^s$ — это произвольные числа. Выражение (2.2) *называется общим решением системы* (2.1).

Замечание 2. Однородная система

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n = 0$$

имеет следующие n линейно независимых решений

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 7. *Матрица Φ, столбцами которой являются столбцы* ФСР, *называется фундаментальной матрицей однородной системы* (2.1):

$$\Phi = \|X_1, X_2, \ldots, X_s\|. \tag{2.3}$$

Общее решение X однородной системы (2.1) *выражается через фундаментальную матрицу* Φ *следующим образом*:

$$X = \sum_{l=1}^{s} c^l X_l = \Phi \cdot \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^s \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где $c^1, \ldots, c^s$ *— это произвольные числа из* $\mathbb{K}$.

§ 3. Неоднородные системы

Определение 8. *Система уравнений*

$$A \cdot X = B \neq O \tag{3.1}$$

называется неоднородной.

Теорема 2. *Общее решение неоднородной системы* (3.1) *представимо в следующем виде*:

$$X = Y + X_0, \tag{3.2}$$

где Y *— какое–либо решение неоднородной системы уравнений* (3.1), *а* X_0 *— это общее решение соответствующей однородной системы уравнений* $AX_0 = O$.

Доказательство.

Пусть Y — это некоторое решение уравнения

$$AY = B,$$

тогда система уравнений (3.1) примет следующий эквивалентный вид:

$$AX = B \Leftrightarrow AX = AY \Leftrightarrow A(X - Y) = O \Leftrightarrow X - Y = X_0,$$

где X_0 — это общее решение соответствующей однородной системы.

Теорема доказана.

Следствие. *Общее решение неоднородной системы уравнений* (3.1) *представимо в следующем виде*:

$$X = Y + c^1 X_1 + \cdots + c^s X_s, \tag{3.3}$$

где $X_1, \ldots, X_s$ *— это ФСР соответствующей однородной системы и* $c^1, \cdots, c^s \in \mathbb{K}$ *— это произвольные числа, а* Y *— это частное решение системы* (3.1).

§ 4. Системы уравнений упрощённого вида

Определение 9. *Неизвестная* x^k *называется базисной, если она входит только в одно уравнение системы.*

Определение 10. *Система линейных уравнений называется системой упрощённого вида, если в каждом уравнении имеется базисная неизвестная. В случае, если некоторое уравнение содержит более одной базисной неизвестной, то выбирается одна из них.*

Пример 2. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^1 + x^2 \phantom{{}+x^3} + x^4 = 0 \\ \phantom{x^1 + x^2 +{}} x^3 + x^4 = 0 \end{cases}.$$

В этой системе уравнений неизвестные x^1 и x^2 входят только в первое уравнение, а неизвестная x^3 только во второе. Поэтому при выборе базисных переменных у нас имеется произвол. Мы можем выбрать в качестве базисных либо x^1 и x^3 либо x^2 и x^3. Переменная x^4 базисной не является, поскольку входит как в первое уравнение, так и во второе уравнение.

Определение 11. *Неизвестные, не относящиеся к выбранным базисным, называются свободными.*

Замечание 3. Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — это все неизвестные. Если $x^1, x^2, \ldots, x^r$ — это <u>базисные</u>, то $x^{r+1}, \ldots, x^n$ — это <u>свободные</u> переменные.

Продолжение примера 2. Если мы выбрали в качестве базисных переменных переменные x^1 и x^3, то свободные переменные — это x^2 и x^4. Если мы выбрали в качестве базисных переменные x^2 и x^3, то свободные переменные — это x^1 и x^4.

Специальная линейная однородная система уравнений упрощённого вида. Рассмотрим такую систему уравнений

$$\begin{cases} x^1 + a^1_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a^1_n x^n = 0, \\ \phantom{x^1+{}} x^2 + a^2_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a^2_n x^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \phantom{x^1+x^2+{}} x^r + a^r_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a^r_n x^n = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Система линейных уравнений (4.1) удобна тем, что её общее решение легко явно выписать.

□ Очевидно, $x^1, x^2, \ldots, x^r$ — базисные переменные, переменные $x^{r+1}, \ldots, x^n$ — свободные.

$$\begin{cases} x^1 = -a^1_{r+1}x^{r+1} - \cdots - a^1_n x^n, \\ x^2 = -a^2_{r+1}x^{r+1} - \cdots - a^2_n x^n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^r = -a^r_{r+1}x^{r+1} - \cdots - a^r_n x^n. \end{cases} \tag{4.2}$$

Пусть $x^{r+1} = c^1, \ldots, x^n = c^{n-r}$. Тогда

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^1_{r+1}c^1 - \dots - a^1_n c^{n-r} \\ -a^2_{r+1}c^1 - \dots - a^2_n c^{n-r} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1}c^1 - \dots - a^r_n c^{n-r} \\ c^1 \\ \vdots \\ c^{n-r} \end{pmatrix} =$$

$$= c^1 \begin{pmatrix} -a^1_{r+1} \\ -a^2_{r+1} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c^{n-r} \begin{pmatrix} -a^1_n \\ -a^2_n \\ \vdots \\ -a^r_n \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} -a^1_{r+1} \\ -a^2_{r+1} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X_{n-r} = \begin{pmatrix} -a^1_n \\ -a^2_n \\ \vdots \\ -a^r_n \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются линейно независимыми, поскольку

$$c^1 X_1 + \dots + c^{n-r} X_{n-r} = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a^1_{r+1}c^1 - \dots - a^1_n c^{n-r} \\ -a^2_{r+1}c^1 - \dots - a^2_n c^{n-r} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1}c^1 - \dots - a^r_n c^{n-r} \\ c^1 \\ \vdots \\ c^{n-r} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c^1 = 0, \ldots, c^{n-r} = 0.$$

Фундаментальная матрица системы:

$$\Phi = \begin{pmatrix} -a^1_{r+1} & -a^1_{r+2} & \cdots & -a^1_n \\ -a^2_{r+1} & -a^2_{r+2} & \cdots & -a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a^r_{r+1} & -a^r_{r+1} & \cdots & -a^r_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

где серым цветом выделена единичная матрица размера $n - r$. ☒

Специальная линейная неоднородная система уравнений.

$$\begin{cases} x^1 \qquad + a^1_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a^1_n x^n = b^1, \\ \quad x^2 \quad + a^2_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a^2_n x^n = b^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad x^r + a^r_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a^r_n x^n = b^r. \end{cases} \tag{4.4}$$

Общее решение системы уравнений (4.4) нужно искать в следующем виде:

$$X = Y + X_0,$$

где Y — это частное решение неоднородной системы уравнений (4.4), а X_0 — это общее решение соответствующей однородной системы уравнений.

$$Y = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -a^1_{r+1} \\ -a^2_{r+1} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c^{n-r} \begin{pmatrix} -a^1_n \\ -a^2_n \\ \vdots \\ -a^r_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 3.

$$\begin{cases} \boxed{x^1} & & + & 3x^3 & & + & x^5 & = & 1, \\ & \boxed{x^2} & + & 4x^3 & & + & 2x^5 & = & 2, \\ & & & & \boxed{x^4} & + & 2x^5 & = & 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = 1 - 3x^3 - x^5, \\ x^2 = 2 - 4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = 3 - x^5; \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3c^1 - c^2 \\ 2 - 4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ 3 - c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \boxed{0} \\ 3 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \boxed{0} \\ -1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Серым цветом выделены значения свободных неизвестных.

§ 5. Метод Гаусса–Жордана

Определим так называемые элементарные преобразования системы уравнений

$$\begin{cases} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \cdots + a^1_n x^n = b^1, \\ a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \cdots + a^2_n x^n = b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a^m_1 x^1 + a^m_2 x^2 + \cdots + a^m_n x^n = b^m, \end{cases} \tag{5.1}$$

приводящую её к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{cases} k^1_1 x^1 + k^1_2 x^2 + \cdots + k^1_n x^n = d^1, \\ k^2_1 x^1 + k^2_2 x^2 + \cdots + k^2_n x^n = d^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k^p_1 x^1 + k^p_2 x^2 + \cdots + k^p_n x^n = d^p. \end{cases}$$

Э л е м е н т а р н ы е п р е о б р а з о в а н и я с и с т е м ы л и н е й н ы х у р а в н е н и й.

Т и п 1. *Перестановка двух уравнений местами*;

Т и п 2. *Умножение любого уравнения системы на ненулевое число*;

Т и п 3. *Прибавление к любому уравнению системы другого уравнения, умноженного на произвольное число*;

Т и п 4. *Удаления из системы уравнений, состоящей более чем из одного уравнения, уравнение*

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n = 0.$$

Т е о р е м а 3. *Любую систему линейных уравнений элементарными преобразованиями можно привести либо к уравнению*

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n = 0.$$

либо к упрощённой системе уравнений вида (4.4).

Пример 4. Найти общее решение неоднородной системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x^1 & + & x^2 & + & 2x^3 & + & x^4 & = & 1, \\ 2x^1 & + & 3x^2 & + & 0x^3 & + & x^4 & = & 0, \\ 3x^1 & + & 4x^2 & + & 2x^3 & + & 2x^4 & = & 1. \end{array}\right. \tag{5.2}$$

Решение. Запишем систему уравнений в виде расширенной матрицы системы.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right). \tag{5.3}$$

Шаг 1. Вычтем из третьей строки сумму первой и второй. В результате получим матрицу

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{5.4}$$

Шаг 2. Вычеркнем третью строчку. Получим матрицу

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right). \tag{5.5}$$

Шаг 3. Вычтем из второй строчки первую умноженную на 2. В результате получим

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right). \tag{5.6}$$

Шаг 4. Вычтем из первой строчки вторую. В результате получим

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right). \tag{5.7}$$

Итак, мы пришли к следующей упрощённой системе двух неоднородных уравнений

$$\begin{array}{ccccccccc} x^1 & = & - & 6x^3 & - & 2x^4 & + & 3, \\ x^2 & = & & 4x^3 & + & x^4 & - & 2 \end{array} \tag{5.8}$$

Итак, переменные x^1 и x^2 — базисные, поэтому оставшиеся переменные x^3 и x^4 — свободные. Выпишем теперь общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 6c^1 - 2c^2 \\ -2 + 4c^1 + c^2 \\ c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $c^1, c^2 \in \mathbb{R}$ — произвольные числа.

§ 6. Матрицы элементарных преобразований

В этом разделе мы предложим матрицы 4–х элементарных преобразований. Пусть

$$A = (a_k^j)_n^m, \quad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|.$$

1. Перемена местами s–й и p–й строк. [1]

Утверждение 1. $P_{sp} \in \mathbb{K}^{m\times m}$ имеет вид

$$A' = P_{sp}A, \quad A' = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^p \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^{p-1} \\ A^s \\ A^{p+1} \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|, \quad A = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^s \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^{p-1} \\ A^p \\ A^{p+1} \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|,$$

$$P_{sp} = \left\| \begin{matrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{s-1} \\ I^p \\ I^{s+1} \\ \vdots \\ I^{p-1} \\ I^s \\ I^{p+1} \\ \vdots \\ I^m \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

$$I^j = \underbrace{\|0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0\|}_{m}, \quad I_k^j = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases}$$

[1] Без ограничения общности считаем $s < p$.

□

$$A'^{j} = P^j_{sp}A, \quad A'^{j} = I^jA = \sum_{k=1}^{m} I^j_k A^k = A^j \quad \text{при} \quad j \neq s \quad \text{и} \quad j \neq p;$$

$$A'^{s} = P^s_{sp}A = I^pA = \sum_{k=1}^{m} I^p_k A^k = A^p, \quad A'^{p} = P^p_{sp}A = I^sA = \sum_{k=1}^{m} I^s_k A^k = A^s.$$

⊠

2. Умножение произвольной s-ой строчки на ненулевое число β.

Утверждение 2. $P_{\beta s} \in \mathbb{K}^{m\times m}$ имеет вид

$$A' = P_{\beta s}A, \quad A' = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ \beta A^s \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^s \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix},$$

$$P_{\beta s} = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{s-1} \\ \beta\cdot I^s \\ I^{s+1} \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

□

$$A'^{j} = P^j_{\beta s}A, \quad A'^{j} = I^jA = \sum_{k=1}^{m} I^j_k A^k = A^j \quad \text{при} \quad j \neq s;$$

$$A'^{s} = P^s_{\beta s}A = \beta I^sA = \beta\sum_{k=1}^{m} I^s_k A^k = \beta A^s. \quad ⊠$$

3. Прибавление к произвольной s-й строчке другую p-ю строчку, умноженную на произвольное число β.

Утверждение 3. $P_{s+\beta p} \in \mathbb{K}^{m\times m}$ имеет вид

$$A' = P_{s+\beta p}A, \quad A' = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^s + \beta A^p \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^{p-1} \\ A^p \\ A^{p+1} \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^s \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^{p-1} \\ A^p \\ A^{p+1} \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix},$$

$$P_{s+\beta p} = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{s-1} \\ I^s + \beta I^p \\ I^{s+1} \\ \vdots \\ I^{p-1} \\ I^p \\ I^{p+1} \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

□

$$A'^j = P^j_{s+\beta p}A = I^j A = \sum_{k=1}^m I^j_k A^k = A^j \quad \text{при} \quad j \neq s;$$

$$A'^s = P^s_{s+\beta p}A = (I^s + \beta I^p)\, A = \sum_{k=1}^m (I^s_k + \beta I^p_k)\, A^k = A^s + \beta A^p. \quad ⊠$$

4. Вычёркивание нулевой s–ой строчки.

Утверждение 4. $P_{s-0} \in \mathbb{K}^{(m-1)\times m}$ имеет вид

$$A^{'} = P_{s-0}A, \quad A^{'} = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^s \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, \quad P_{s-0} = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{s-1} \\ I^{s+1} \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix}.$$

□

$$A^{'j} = P^j_{s-0}A = I^jA = \sum_{k=1}^{m} I^j_k A^k = A^j \quad \text{при} \quad j \in \overline{1, s-1} \cup \overline{s+1, m}. \quad \boxtimes$$

Теорема 4. *Пусть A — некоторая матрица размера $m \times n$,*

$$R(A) := R \cdot A$$

— это матрица, полученная из A последовательностью произведений матриц всех 4–х типов элементарных преобразований R. Тогда

$$R(A) = R(\mathbb{I}_m) \cdot A, \tag{6.4}$$

где $\mathbb{I}_m$ — это единичная матрица размера $m \times m$, $R(\mathbb{I}_m)$ — это матрица размера $p \times n$ при $1 \leqslant p \leqslant m$, полученная из единичной матрицы в результате применения последовательности произведений матриц элементарных преобразований R. В том случае, если в последовательность произведений R не входит элементарные преобразования четвертого типа матрица $R(\mathbb{I})$ размера $m \times m$ и обратима.

Доказательство.

$$R(A) = R \cdot A = R \cdot (\mathbb{I}_m \cdot A) = (R \cdot \mathbb{I}_m) \cdot A = R(\mathbb{I}_m) \cdot A.$$

Можно проверить, что все матрицы элементарных преобразований типов 1–3 обратимы. И, следовательно, матрица R обратима тоже.

Теорема доказана.

§ 7. Вычисление обратной матрицы

Пусть R — это последовательность произведений матриц элементарных преобразований первых трёх типов, приводящие $m \times m$ матрицу A к единичной матрице $\mathbb{I}_m$:

$$R \cdot A = R \cdot (\mathbb{I}_m \cdot A) = (R \cdot \mathbb{I}_m) \cdot A = \\ = R(\mathbb{I}_m) \cdot A = \mathbb{I}_m \Leftrightarrow A = R^{-1}(\mathbb{I}_m). \tag{7.1}$$

Составим блочную $m \times 2m$ матрицу

$$\|A, \mathbb{I}_m\| = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_m^1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_m^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_m^m & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

и применением последовательности произведений матриц элементарных преобразований строк R привести матрицу A (левый блок матрицы (7.2)) к единичной $\mathbb{I}_m$, тогда в правом блоке мы получим обратную A^{-1}:

$$\|A, \mathbb{I}_m\| \to \left\|\mathbb{I}_m, \mathbb{A}^{-1}\right\|. \tag{7.3}$$

□ Действительно, в силу (7.1) имеем

$$A = R^{-1}(\mathbb{I}_m), \quad R(\mathbb{I}_m) = A^{-1},$$

поэтому

$$\|A, \mathbb{I}_m\| = \left\|R^{-1}(\mathbb{I}_m), \mathbb{I}_m\right\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R \cdot \|A, \mathbb{I}_m\| = R \cdot \left\|R^{-1}(\mathbb{I}_m), \mathbb{I}_m\right\| = \|\mathbb{I}_m, R(\mathbb{I}_m)\| = \left\|\mathbb{I}_m, \mathbb{A}^{-1}\right\|. \quad \boxtimes$$

Здесь мы воспользовались следующим утверждением.

Лемма 2. $B \cdot \|A_1|A_2\| = \|B \cdot A_1|B \cdot A_2\|$ *для всех* $A_1 \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $A_2 \in \mathbb{K}^{m\times p}$ *и* $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$.

Доказательство.

$$C := B \cdot \|A_1|A_2\|,$$
$$C_k = B \cdot A_{1k}, \quad k = \overline{1, s}, \quad C_l = B \cdot A_{2l}, \quad l = \overline{s+1, s+p}.$$

Лемма доказана.