Конспект лекции 12

НОРМАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

§ 0. План лекции

1. Взаимный базис.
1.1. Определение;
1.2. Линейная независимость;
1.3. Формулы скалярного произведения;
1.4. Формулы векторного произведения;
1.5. Случай ортонормированного правого базиса;
1.6. Лемма.
2. Нормальное уравнение плоскости и его эквивалентность общему уравнению плоскости.
3. Радиус–вектор

$$\mathbf{r}_0 = \frac{D}{(\mathbf{n},\mathbf{n})}\mathbf{n}$$

и уравнение плоскости $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{n})=0$.
4. Необходимое и достаточное условие параллельности плоскостей.
5. Нормальное уравнение плоскости, заданной своим параметрическим векторным уравнением.

6. Нормальное уравнение прямой.

7. Радиус–вектор

$$\mathbf{r}_0 = \frac{D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}$$

и уравнение прямой $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0.$

8. Необходимое и достаточное условие параллельности двух прямых на плоскости.

9. Уравнение прямой в форме Плюккера.

10. Задача 1. Метрические задачи.

11. Задача 2. Метрические задачи.

12. Задача 3. Точка пересечения трех плоскостей.

13. Задача 4. Прямая как пересечение двух плоскостей.

§ 1. Взаимный базис

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это правая тройка некомпланарных векторов в пространстве, отложенных от общей точки O. Таким образом определена правая общая декартова система координат $Oxyz$. Отметим, что смешанное произведение $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) > 0$. Введём так называемый взаимный базис $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, определённый формулами

$$\mathbf{f}_1 = \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

1. Прежде всего докажем, что векторы $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, образуют базис.

□. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2 + \gamma\mathbf{f}_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + \beta[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + \gamma[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{0}.$$

Умножая скалярно обе части последнего уравнения на векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, с учётом свойств векторных произведений получим равенства

$$\alpha(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0, \quad \beta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0, \quad \gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Следовательно, векторы семейства $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ образуют базис. ⊠

2. Скалярно умножая векторы взаимного базиса $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ на векторы семейства $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ получим следующие равенства:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1) = 1, \quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2) = 0, \quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_3) = 0;$$
$$(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1) = 0, \quad (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_2) = 1, \quad (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_3) = 0;$$
$$(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1) = 0, \quad (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2) = 0, \quad (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_3) = 1.$$

3. Векторно умножая между собой векторы взаимного базиса $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ получим следующие равенства:

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \frac{\mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] = \frac{\mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad [\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1] = \frac{\mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

4. В том случае, когда векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ образуют правый ортонормированный базис имеют место равенства

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Лемма 1. *Если $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — это взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_1 + a_y\mathbf{e}_2 + a_z\mathbf{e}_3$, то*

$$a_x = (\mathbf{a}, \mathbf{f}_1), \quad a_y = (\mathbf{a}, \mathbf{f}_2), \quad a_z = (\mathbf{a}, \mathbf{f}_3).$$

Доказательство.

Для доказательства нужно воспользоваться линейностью скалярного произведения по первому аргументу и формулами из второго пункта.

Лемма доказана.

§ 2. Нормальные уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве

Сначала докажем теорему о нормальном уравнении плоскости в пространстве.

Теорема 1. *В произвольной декартовой системе координат $Oxyz$, порожденной репером $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, общее уравнение плоскости*

$$Ax + By + Cz = D$$

эквивалентно нормальному уравнению плоскости

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$$

с некоторым вектором $\mathbf{n}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$. В этом случае базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ можно считать ортонормированным. Введём вектор $\mathbf{n}$ с координатами (A, B, C) :

$$\mathbf{n} = A\mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2 + C\mathbf{e}_3.$$

Тогда

$$Ax + By + Cz = D \Leftrightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{r}) = D,$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ — это радиус–вектор произвольной точки плоскости с координатами (x, y, z). Это выполнено в силу доказанного нами ранее представления скалярного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе.

Теперь мы рассмотрим случай косоугольной декартовой системы координат. В этом случае тройку векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ будем считать произвольным базисом.

1. Пусть в рассматриваемой общей декартовой системе координат $Oxyz$ задано уравнение

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$$

Пусть в репере $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ рассматриваемой общей декартовой системе координат радиус–вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки задается задаётся своим разложением по базису

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Заметим, что в силу линейности скалярного произведения по первому аргументу справедливо равенство

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n})x + (\mathbf{e}_2, \mathbf{n})y + (\mathbf{e}_3, \mathbf{n})z.$$

Итак,

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D \Rightarrow Ax + By + Cz = D,$$

где

$$A = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}), \quad B = (\mathbf{e}_2, \mathbf{n}), \quad C = (\mathbf{e}_3, \mathbf{n}).$$

2. Пусть в общей декартовой системе координат $Oxyz$ с репером $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ нам задана плоскость своим общим уравнением

$$Ax + By + Cz = D.$$

Найдём такой вектор $\mathbf{n}$, чтобы были справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = A, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) = B, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) = C.$$

Будем искать вектор $\mathbf{n}$ в виде разложения по взаимному базису $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$:

$$\mathbf{n} = \alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2 + \gamma\mathbf{f}_3.$$

Умножая последовательно это равенство на $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ мы получим следующие равенства:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = \alpha, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) = \beta, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) = \gamma.$$

Значит,

$$\mathbf{n} = A\mathbf{f}_1 + B\mathbf{f}_2 + C\mathbf{f}_3.$$

Итак,

$$\mathbf{n} = \frac{A[\mathbf{e_2}, \mathbf{e}_3] + B[\mathbf{e_3}, \mathbf{e}_1] + C[\mathbf{e_1}, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

Но тогда имеют место следующие выражения:

$$Ax + By + Cz = D \Rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1)x + (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2)y + (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3)z = D \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{r}) = D, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Заметим, что в силу нормального уравнения плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ радиус–вектор

$$\mathbf{r}_0 = D\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}$$

некоторой точки M_0 удовлетворяет нормальному уравнению плоскости. Действительно, имеем

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = D\frac{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} = D.$$

Поэтому нормальное уравнение плоскости можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{r}_0 = D\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}.$$

Последнее уравнение означает, что точка M с радиусом–вектором $\mathbf{r}$ лежит на плоскости, которой принадлежит точка M_0 с радиусом–

вектором $\mathbf{r}_0$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ортогонален вектору $\mathbf{n}$. Поэтому вектор $\mathbf{n}$, который имеет вид

$$\mathbf{n} = \frac{A[\mathbf{e_2}, \mathbf{e}_3] + B[\mathbf{e_3}, \mathbf{e}_1] + C[\mathbf{e_1}, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)},$$

является вектором нормали к плоскости, имеющей общий вид

$$Ax + By + Cz = D.$$

Замечание 2. Заметим, что если плоскость задана своим векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t + \mathbf{b}\tau,$$

то в качестве вектора $\mathbf{n}$ нормали к плоскости можно взять вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, который, согласно определению векторного произведения, ортогонален и вектору $\mathbf{a}$ и вектору $\mathbf{b}$ и нормальное уравнение плоскости можно записать в следующей форме:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

В качестве следствия из теоремы 1 можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 2. *Для того чтобы две плоскости, заданные своими общими уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \quad \textit{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

в некоторой общей декартовой системе координат с репером $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, *были параллельны необходимо и достаточно, чтобы*

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2 \quad \textit{при} \quad \lambda \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — это взаимный базис с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Необходимость. Пусть плоскости параллельны. Уравнения плоскостей можно записать в следующем нормальном виде:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2,$$
$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3, \quad \mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3$$

Векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — это векторы нормалей к соответствующим плоскостям. В силу параллельности плоскостей вектора нормалей коллинеарны. Итак, найдется такое число $\lambda \neq 0$, что

$$\mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}_2 \Leftrightarrow (A_1 - \lambda A_2)\mathbf{f}_1 + (B_1 - \lambda B_2)\mathbf{f}_2 + (C_1 - \lambda C_2)\mathbf{f}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2.$$

Достаточность. Пусть $A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2$. Тогда из тех же формул для векторов нормалей получим равенство $\mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}_2$. Это означает, что плоскости параллельны.

Теорема доказана.

Справедливо следующее аналогичное утверждение для прямой на плоскости:

Теорема 3. *В произвольной декартовой системе координат Oxy, порожденной репером $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ общее уравнение прямой на плоскости*

$$Ax + By = D$$

эквивалентно нормальному уравнению прямой на плоскости

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$$

с некоторым вектором $\mathbf{n}$.

Доказательство. Заметим, что общее уравнение прямой на плоскости $Ax + By = D$ можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D, \quad \mathbf{n} = \frac{A[\mathbf{e_2}, \mathbf{e}_3] + B[\mathbf{e_3}, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)},$$

где $\mathbf{e}_3$ — это произвольный вектор перпендикулярный рассматриваемой плоскости.

Теорема доказана.

Замечание 3. Вектор

$$\mathbf{r}_0 = D\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}$$

лежит на прямой, определённой нормальным уравнением $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$, и поэтому нормальное уравнение прямой на плоскости можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0,$$

из которого следует, что точка M с радиус–вектором $\mathbf{r}$ лежит на прямой, содержащей точку M_0 с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$, тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ ортогонален вектору $\mathbf{n}$, который имеет вид

$$\mathbf{n} = \frac{A[\mathbf{e_2}, \mathbf{e}_3] + B[\mathbf{e_3}, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)},$$

если прямая на плоскости задана своим общим уравнением $Ax + By = D$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. *Для того чтобы две прямые на плоскости, заданные своими общими уравнениями*

$$A_1x + B_1y = D_1 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y = D_2$$

в некоторой общей декартовой системе координат с репером $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, были параллельны необходимо и достаточно, чтобы

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2 \quad \text{при} \quad \lambda \neq 0.$$

§ 3. Уравнение прямой в пространстве в форме Плюккера

Рассмотрим сначала следующее векторное уравнение относительно некоторого полюса O пространства:

$$[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0}. \tag{3.1}$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$ и направляющим вектором $\mathbf{a}$.

□ Действительно, по доказанному векторное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Это означает, что найдется такое $t \in \mathbb{R}$, что

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0 = \mathbf{a}t \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t. \quad \boxtimes$$

Отметим, что уравнение (3.1) в силу линейности векторного произведения по первому аргументу можно переписать в следующем виде:

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]. \tag{3.2}$$

Дадим определение.

Определение 1. *Векторным уравнением прямой в форме Плюккера называется следующее уравнение*:

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{M}, \mathbf{a}) = 0. \tag{3.3}$$

Докажем, что действительно, уравнение (3.3) описывает прямую в пространстве с направляющим вектором $\mathbf{a}$.

□ Действительно, радиус–вектор

$$\mathbf{r}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

удовлетворяет уравнению Плюккра. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}[[\mathbf{a}, \mathbf{M}], \mathbf{a}] = -\frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{M}]] =$$
$$= -\frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\left(\mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{M}) - \mathbf{M}(\mathbf{a}, \mathbf{a})\right) = \mathbf{M}.$$

Итак, уравнение Плюккера можно переписать в следующем виде:

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \Leftrightarrow [\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} + \mathbf{a}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Это уравнение прямой. ⊠

§ 4. Некоторые основные задачи на прямую и плоскость

Задача 1. Пусть на плоскости даны точка $M_1(\mathbf{r}_1)$ и прямая, заданная уравнением $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. Тогда

1. радиус–вектор $\mathbf{r}_2$ точки M_2, являющейся ортогональной проекцией точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ на прямую l, выражается формулой
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}; \tag{4.1}$$
2. расстояние от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до прямой l выражается формулой
$$d(M_1, l) = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - D|}{|\mathbf{n}|}; \tag{4.2}$$
3. Радиус вектор $\mathbf{r}_3$ точки M_3, симметричной точке $M_1(\mathbf{r}_1)$ относительно прямой l, выражается формулой
$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 - 2\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}. \tag{4.3}$$

Решение.

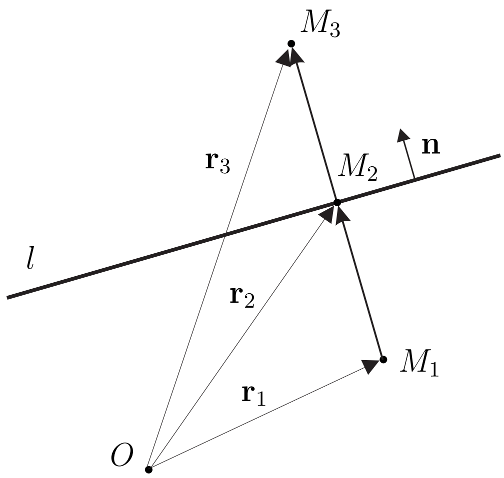

Рис. 1. К задаче 1.

Пункт 1. Имеет место равенство
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \lambda\mathbf{n} \tag{4.4}$$
при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$. Заметим, что
$$(\mathbf{r}_2, \mathbf{n}) = D,$$

поэтому умножим скалярно на $\mathbf{n}$ обе части равенства (4.4) и получим равенство

$$D - (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = \lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \Rightarrow \lambda = -\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}. \tag{4.5}$$

Из (4.4) и (4.5) получим искомое равенство

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}. \tag{4.6}$$

Пункт 2. Из формул (4.4) и (4.6) получим цепочку равенств

$$d(M_1, l) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \left|\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}\right| = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - D|}{|\mathbf{n}|}.$$

Пункт 3. Действительно,

$$\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_3} = \mathbf{r}_1 + 2\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_1 - 2\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}.$$

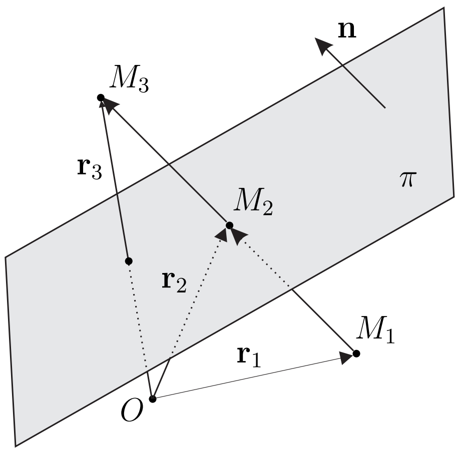

Рис. 2. К задаче 2.

З а д а ч а 2. Пусть в пространстве даны точка $M_1(\mathbf{r}_1)$ и плоскость, заданная уравнением $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. Тогда

1. радиус–вектор $\mathbf{r}_2$ точки M_2, являющейся ортогональной проекцией точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ на плоскость π, выражается формулой

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}; \tag{4.7}$$

2. расстояние от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до плоскости π выражается формулой

$$d(M_1, \pi) = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - D|}{|\mathbf{n}|}; \tag{4.8}$$

3. Радиус вектор $\mathbf{r}_3$ точки M_3, симметричной точке $M_1(\mathbf{r}_1)$ относительно плоскости π, выражается формулой

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 - 2\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) - D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}. \tag{4.9}$$

Решение. В точности повторяет решение задачи 1.

Задача 3. Найдите радиус–вектор $\mathbf{x}$ общей точки M трёх плоскостей:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{n}_3) = D_3,$$

где $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \neq 0$.

Решение. Искомый вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) = D_1, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{n}_2) = D_2, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{n}_3) = D_3.$$

Пусть $\{\mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3\}$ — это взаимный базис к базису $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$. Будем искать вектор $\mathbf{x}$ в виде разложения по взаимному базису:

$$\mathbf{x} = y\mathbf{n}'_1 + z\mathbf{n}'_2 + t\mathbf{n}'_3.$$

Заметим, что

$$D_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) = y(\mathbf{n}'_1, \mathbf{n}_1) = y, \quad D_2 = z, \quad D_3 = t.$$

Итак, имеем

$$\mathbf{x} = D_1\mathbf{n}'_1 + D_2\mathbf{n}'_2 + D_3\mathbf{n}'_3 = \frac{D_1[\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3] + D_2[\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_1] + D_3[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]}{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)}.$$

Задача 4. Напишите параметрическое векторное уравнение прямой l, заданной как линия пересечения двух непараллельных плоскостей

$$P_1 : \ (\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1; \quad P_2 : \ (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2.$$

Решение.

Первый способ. Следствием указанных уравнений плоскостей является следующее векторное уравнение:

$$\mathbf{n}_1(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) - \mathbf{n}_2(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2,$$

которое в свою очередь можно переписать в форме Плюккера

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M},$$

где

$$\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], \quad \mathbf{M} = D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2.$$

Теперь перепишем в следующем виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{[[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}.$$

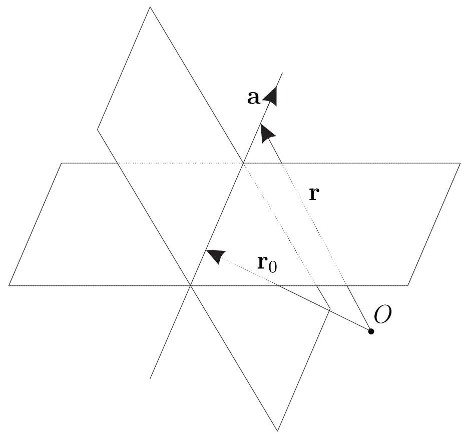

Рис. 3. К задаче 4.

Второй способ. Направляющий вектор искомой прямой равен $\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$. Вектор $\mathbf{r}_0$ начальной точки прямой ищем как радиус-вектор основания перпендикуляра, опущенного из полюса на искомую прямую, т. е. как решение следующих уравнений:

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1) = D_1, \quad (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_2) = D_2, \quad (\mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = 0.$$

Из результата задачи 8 семинара 11 имеем

$$\mathbf{r}_0 = \frac{D_1[\mathbf{n}_2, \mathbf{a}] + D_2[\mathbf{a}, \mathbf{n}_1] + 0 \cdot [\mathbf{n}_2, \mathbf{a}]}{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{a})} = \frac{[\mathbf{a}, D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}.$$

Уравнение имеет следующий вид:

$$\mathbf{r} = \frac{[[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2} + [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]t.$$