Конспект лекции 11

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 0. План лекции

1. Скалярное произведение.
1.1. Определение скалярного произведения.
1.2. Эквивалентная запись через проекции.
1.3. Доказательство линейности по каждому аргументу.
1.4. Доказательство симметричности.
1.5. Доказательство неотрицательности.
1.6. Переопределение длины вектора.
1.7. Неравенство Коши–Буняковского.
1.8. $|\alpha \overrightarrow{x}| = |\alpha||\overrightarrow{x}|$.
1.9. $||\overrightarrow{x}| - |\overrightarrow{y}|| \leqslant |\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}| \leqslant |\overrightarrow{x}| + |\overrightarrow{y}|$.
1.10. Определение ортонормированного базиса.
1.11. Запись скалярного произведения в ортогональном базисе.
2. Векторное произведение.
2.1. Правая и левая тройка векторов.
2.2. Лемма о связи правой и левой тройки векторов.
2.3. Определение векторного произведения.
2.4. Лемма о НИДУ коллинеарности векторов.
2.5. Циклическое правило векторного произведения правой тройки ортогональных векторов.
2.6. Антикоммутативность.

3. Смешанное произведение.

3.1. Определение.

3.2. НИДУ компланарности трех векторов.

3.3. Выражение смешанного произведения через объем параллелепипеда.

3.4. Следствие: $\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle = \langle \mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rangle$.

3.5. Шесть равенств.

3.6. Линейность смешанного и векторного произведения.

3.7. Выражение векторного произведения двух векторов в ортонормированном правом базисе.

4. Двойное векторное произведение.

4.1. Определение.

4.2. Формула Лагранжа.

5. Уравнения прямых и плоскостей в ортогональной декартовой системе координат.

§ 1. Скалярное произведение в элементарной геометрии

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi. \tag{1.1}$$

Ортогональная проекция вектора $\mathbf{a}$ на ось $\overrightarrow{l}$ определяется равенством

$$\mathrm{pr}_{\overrightarrow{l}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\varphi,$$

где угол φ — это наименьший угол между направлением оси $\overrightarrow{l}$ и вектором $\mathbf{a}$. Поэтому

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cdot \mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}. \tag{1.2}$$

Проекции векторов на одну и туже ось обладают свойством линейности

$$\mathrm{pr}_{\overrightarrow{l}}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathrm{pr}_{\overrightarrow{l}}\mathbf{a} + \beta\mathrm{pr}_{\overrightarrow{l}}\mathbf{b}. \tag{1.3}$$

Поэтому скалярное произведение обладает свойством билинейности

$$\langle \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle = \alpha_1\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b} \rangle + \alpha_2\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle; \tag{1.4}$$

$$\langle \mathbf{a}, \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 \rangle = \beta_1\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_1 \rangle + \beta_2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_2 \rangle. \tag{1.5}$$

Кроме того, скалярное произведение обладает *свойством симметричности*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle. \tag{1.6}$$

Наконец,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}|^2 \geqslant 0, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}. \tag{1.7}$$

§ 2. Евклидово пространство

Определение 1. *Скалярным произведением на векторном пространстве $\mathcal{V}$ называется функция*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \ \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}, \quad \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

обладающая следующими свойствами:

СП1: *билинейность*:

$$\langle \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \alpha_1\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \alpha_2\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle,$$
$$\langle \mathbf{x}, \beta_1\mathbf{y}_1 + \beta_2\mathbf{y}_2 \rangle = \beta_1\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle + \beta_2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle;$$

СП2: *симметричность*:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle;$$

СП3: *положительная определённость*:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0 \quad \textit{для всех} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Определение 2. *Евклидовым векторным пространством или евклидовым пространством называется векторное пространство* $\mathcal{V}$ *с заданным на нём скалярным произведением.*

Определение 3. *Евклидовым аффинным пространством называется тройка* $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{R})$, *если на ассоциированном векторном пространстве* $\mathcal{V}$ *задано скалярное произведение.*

Замечание 1. Перечисленные аксиомы **СП1–СП3** образуют третью группу аксиом Вейля.

§ 3. Метрические свойства евклидовых пространств

Определение 4. *Длиной вектора* $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ *в евклидовом пространстве* $\mathcal{V}$ *называется число*

$$|\mathbf{x}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}\,. \tag{3.1}$$

Определение 5. *Расстоянием между точками* $A, B \in \mathcal{A}$ *в аффинном евклидовом пространстве* $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{R})$ *называется число*

$$d(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}\,. \tag{3.2}$$

Замечание 2. Все евклидовы пространства будем обозначать как $\mathcal{E}$.

Теперь мы докажем важную теорему Коши–Буняковского–Шварца.

Теорема 1. *Для любых* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ *имеет место неравенство*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leqslant |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|.$$

Доказательство.

Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ — это произвольные векторы и $t \in \mathbb{R}$.

$$0 \leqslant \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle = t^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + 2t \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle.$$

Для того чтобы квадратный трёхчлен был всегда неотрицателен необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был неположителен

$$D = 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leqslant 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leqslant \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle.$$

Теорема доказана.

Определение 6. *Углом между векторами* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *в евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$ *называется число*

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \right) \in [0, \pi]; \tag{3.3}$$

а углом между прямыми с направляющими векторами $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется число*

$$\varphi = \arccos \left(\frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \right) \in [0, \pi/2]. \tag{3.4}$$

Лемма 1. *Справедливы свойства*:

1. *для любых* $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$ *имеет место формула*
$$|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{x}|;$$
2. *для любых* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ *справедливы следующие неравенства, называемые неравенствами треугольника*:
$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leqslant |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

Доказательство.

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + |\mathbf{y}|^2 \leqslant$$
$$\leqslant |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 \leqslant (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2 \Rightarrow |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + |\mathbf{y}|^2 \geqslant$$
$$\geqslant |\mathbf{x}|^2 - 2|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|)^2 \Rightarrow ||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leqslant |\mathbf{x} + \mathbf{y}|.$$

Лемма доказана.

Пример 1. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ является евклидовым относительно скалярного произведения
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} X^T \cdot Y = \sum_{j=1}^{n} x^j y^j,$$
$$\mathbf{x} = X = (x^1, \ldots, x^n)^T, \quad \mathbf{y} = Y = (y^1, \ldots, y^n)^T.$$

§ 4. Ортонормированные базисы

Пусть $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ и $\mathcal{Q} \subset \mathcal{E}$.

Определение 7. *Векторы* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ *называются ортогональными, если* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Обозначение. $x \perp y$.

Определение 8. *Вектор* $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ *называется ортогональным множеству* $\mathcal{P}$, *если*
$$x \perp y, \quad \forall\, y \in \mathcal{P}.$$

Обозначение. $x \perp \mathcal{P}$.

Определение 9. *Множества* $\mathcal{P}$ *и* $\mathcal{Q}$ *называются ортогональными, если*
$$x \perp y, \quad \forall\, x \in \mathcal{P},\ y \in \mathcal{Q}.$$

Обозначение. $\mathcal{P} \perp \mathcal{Q}$.

Теорема 2. *Справедливы следующие свойства*:

1. $\mathbf{x} \perp \mathbf{x}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2. *если* $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ *и* $\mathbf{x} \perp \mathcal{P}$, *то* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

3. *если* $\mathbf{y} \perp \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$, *то* $\mathbf{y} \perp L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$;
4. *теорема Пифагора: равенство*

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$;
5. *если ненулевые векторы* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ *попарно ортогональны, тогда они линейно независимы.*

Доказательство.

Пункт 4. Справедливо равенство

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

из которого вытекает теорема Пифагора.

Пункт 5. Рассмотрим линейную комбинацию

$$c^1 \mathbf{x}_1 + \cdots + c^j \mathbf{x}_j + \cdots + c^p \mathbf{x}_p = \mathbf{0}.$$

Умножая скалярно на $\mathbf{x}_j$, получаем

$$\alpha^j |x_j|^2 = 0 \Rightarrow \alpha^j = 0 \quad \text{для всех} \quad j \in \overline{1, p}.$$

Теорема доказана.

Определение 10. *Семейство векторов* $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_p)$ *евклидова пространства* $\mathcal{E}$ *называется ортонормированным, если*

$$\langle \mathbf{i}_j, \mathbf{i}_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad j = k; \\ 0, & \text{при} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{4.1}$$

Пусть $\mathbf{I} = (\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n)$ — произвольный ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$.

Теорема 3. *Имеют место следующие свойства:*
1. *скалярное произведение двух векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *выражаются через их координаты относительно базиса* $\mathbf{I}$ *формулой*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \delta_{jk} x^j y^k = \sum_{j=1}^{n} x^j y^j = X^T Y, \tag{4.2}$$

где X *и* Y *— это столбцы координат векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *в базисе* $\mathbf{I}$ *евклидова пространства* $\mathcal{E}$;
2. *координаты произвольного вектора* $\mathbf{x}$ *относительно базиса* $\mathbf{I}$ *могут быть вычислены по формулам Гиббса:*

$$x^k = (\mathbf{x}, \mathbf{i}_k), \quad k = \overline{1, n}. \tag{4.3}$$

Доказательство.

Пункт 1. Разложим вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ по базису $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{x} = x^j \mathbf{i}_j, \quad \mathbf{y} = y^k \mathbf{i}_k.$$

Тогда имеем

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x^j y^k \langle \mathbf{i}_j, \mathbf{i}_k \rangle = x^j y^k \delta_{jk} = \sum_{j=1}^{n} x^j y^j.$$

Пункт 2. Умножим обе части равенства

$$\mathbf{x} = x^j \mathbf{i}_j$$

скалярно на вектор $\mathbf{i}_k$, тогда получим равенства

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{i}_k \rangle = x^j \langle \mathbf{i}_j, \mathbf{i}_k \rangle = x^j \delta_{jk} = x^k.$$

Теорема доказана.

§ 5. Векторное произведение векторов

Определение 11. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *называется правой, если из конца вектора* $\mathbf{c}$ *кратчайший поворот от вектора* $\mathbf{a}$ *к вектору* $\mathbf{b}$ *виден совершающимся против часовой стрелки.*

Определение 12. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *называется левой, если из конца вектора* $\mathbf{c}$ *кратчайший поворот от вектора* $\mathbf{a}$ *к вектору* $\mathbf{b}$ *виден совершающимся по часовой стрелки.*

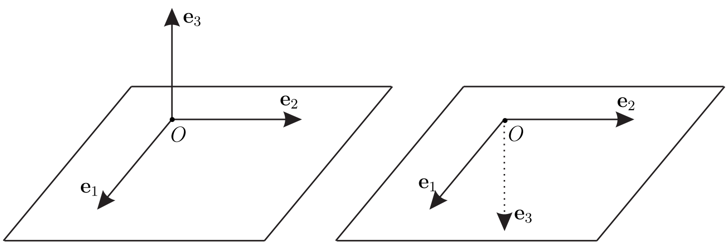

Рис. 1. Правая и левая тройка векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Лемма 2. *Если тройка некомпланарных векторов* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *правая, то при перестановке соседних векторов, либо при перемене знака какого либо из векторов получаются левые тройки векторов и наоборот.*

Определение 13. *Векторным произведением упорядоченной пары векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется вектор*

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

удовлетворяющий следующим требованиям:

(i) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$, *где* φ *— это угол между векторами* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$;

(ii) *вектор* $\mathbf{c}$ *ортогонален каждому из векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$;

(iii) *упорядоченная тройка* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *образует правую тройку.*

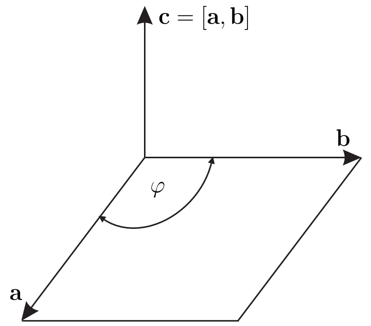

Рис. 2. Векторное произведение $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Замечание 3. Заметим, что из пункта (i) определения 14 векторного произведения векторов вытекает, что

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = S_{\mathbf{ab}},$$

где $S_{\mathbf{ab}}$ — это площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Лемма 3. *Векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *коллинеарны тогда и только, когда их векторное произведение* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Доказательство.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{b} = 0$, либо $\sin\varphi = 0$. Во всех случаях $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Лемма доказана.

Теорема 4. *Имеет место таблица векторного умножения векторов правого ортонормированного базиса* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$:

$[\cdot,\cdot]$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

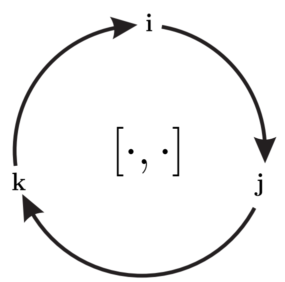

Рис. 3. Таблица векторного умножения.

Доказательство. Проводится непосредственной проверкой всевозможных векторных произведений. Например, пусть $\mathbf{c} := [\mathbf{i}, \mathbf{j}]$. Тогда из свойства (i) имеем $|\mathbf{c}| = 1$. Из свойства (ii) получаем, что векторы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{k}$ коллинеарны, а в силу предыдущего свойства либо $\mathbf{c} = \mathbf{k}$ либо $\mathbf{c} = -\mathbf{k}$. Наконец, в силу свойства (iii) имеем $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{c})$ — это правая тройка. Следовательно, $\mathbf{c} = \mathbf{k}$. Итак, $[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}$.

Теорема доказана.

Лемма 4. *Справедливо следующее равенство*:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$$

для любых $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *из евклидова пространства* $\mathcal{E}$.

Доказательство.

Пункт 0. Случай коллинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ очевиден.

Пункт 1. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. Тогда из первого свойства векторного произведения вытекает, что

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = S_{\mathbf{ab}} = S_{\mathbf{ba}} = |[\mathbf{b}, \mathbf{a}]|\,.$$

Пункт 2. Векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ ортогональны плоскости $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, а поскольку их длины совпадают, то либо

$$[\mathbf{b}, \mathbf{a}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad \text{либо} \quad [\mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Пункт 3. Согласно свойству (iii) векторного произведения тройка $(\mathbf{b}, \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}])$ правая. Далее тройка

$$(\mathbf{b}, \mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) - \text{левая},$$

а тройка

$$(\mathbf{b}, \mathbf{a}, -[\mathbf{a}, \mathbf{b}]) - \text{правая}.$$

Следовательно, $[\mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Лемма доказана.

§ 6. Смешанное произведение векторов

Определение 14. *Смешанным произведением* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *трёх векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *называется число, равное скалярному произведению вектора* $\mathbf{a}$ *на векторное произведение* $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ *векторов* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle.$$

Лемма 5. *Векторы* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *компланарны (линейно зависимы) тогда и только тогда, когда* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Будем считать, что вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ неколлинеарны, поскольку в противоположных случаях смешанное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. Тогда вектор $\mathbf{a}$ параллелен плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, а вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ ей перпендикулярен. Следовательно, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Шаг 2. Достаточность. Пусть $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, тогда либо

$$|\mathbf{a}| = 0 \quad \text{либо} \quad |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| = 0 \quad \text{либо} \quad \cos\varphi = 0,$$

где φ — это угол между векторами $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

В первом случае вектор $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, но тогда тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ очевидно линейно зависима и, следовательно, компланарна.

Во втором случае векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны, т. е. линейно зависимы. Поэтому линейно зависима и тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, а, стало быть, компланарна.

В третьем случае имеем

$$\mathbf{a} \perp [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \Rightarrow \mathbf{a} \,||\, \pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

и, следовательно, тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарна.

Лемма доказана.

Теорема 5. *Смешанное произведение трёх некомпланарных векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *равно следующему числу*:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{cases} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \textit{если тройка} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \textit{правая}; \\ -V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \textit{если тройка} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \textit{левая}, \end{cases}$$

где $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — *объём параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$, *отложенных от одной точки.*

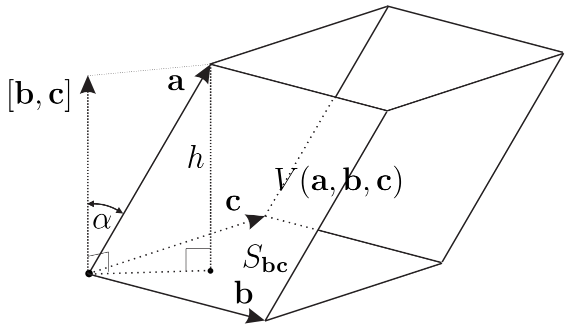

Рис. 4. Ориентированный объём.

Доказательство.

Прежде всего отложим все векторы от одной точки. Тогда

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = h \cdot S_{\mathbf{bc}},$$

где

$$h = |\mathbf{a}| \, |\cos \alpha|, \quad S_{\mathbf{bc}} = |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]|,$$

где α — это угол между векторами $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Таким образом приходим к выводу о справедливости цепочки равенств

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| \cdot |\mathbf{a}| \, |\cos \alpha| = |\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle| = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

Знак смешанного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ определяется только знаком $\cos \alpha$. Но $\cos \alpha > 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ направлены в одну сторону от плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$. Это имеет место тогда и только тогда, когда тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ правая.

Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 6. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *справедливо равенство*

$$\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle = \langle [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c} \rangle. \tag{6.1}$$

Доказательство.

В случае компланарной тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ обе части равенства (6.1) равны нулю.

Предположим, что эти векторы не компланарны. Тогда, с одной стороны,

$$V_{\mathbf{abc}} = V_{\mathbf{cab}}.$$

С другой стороны, тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и тройка $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ одинаково направлены. Следовательно, в силу теоремы 5 приходим к утверждению леммы, поскольку

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \left.\begin{cases} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \text{если тройка } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ правая;} \\ -V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \text{если тройка } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ левая,} \end{cases}\right\} = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Лемма доказана.

Следствие. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *имеют место следующие равенства*:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}). \tag{6.2}$$

Указание. Нужно воспользоваться леммой 6 и антикоммутативностью векторного произведения векторов.

§ 7. Линейность смешанного и векторного произведений

Из билинейности скалярного произведения и следствия из леммы 6 вытекает следующая теорема:

Теорема 6. *Смешанное произведение линейно по каждому из трёх сомножителей.*

Теорема 7. *Векторное произведение линейно по каждому из сомножителей.*

Доказательство.

Введём вектор

$$\mathbf{d} := [\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}] - \alpha_1 [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] - \alpha_2 [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}].$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle &= \langle [\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}] - \alpha_1 [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] - \alpha_2 [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}], \mathbf{d} \rangle = \\ &= (\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) = \\ &= \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) + \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

Теорема доказана.

Формула вычисления векторного и смешанного произведения в ортонормированном базисе. Пусть $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ — это правый ортонормированный базис.

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}.$$

Используя таблицу векторного умножения элементов правого ортонормированного базиса $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, можно получить формулы.

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{7.1}$$

Указание. Докажите сами!

§ 8. Двойное векторное произведение

Определение 15. *Повторное применение векторного произведения к векторам* $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ *и* $\mathbf{a}$ *приводит к следующему вектору*:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] \tag{8.1}$$

называется двойным векторным произведением.

Формула Лагранжа.

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{8.2}$$

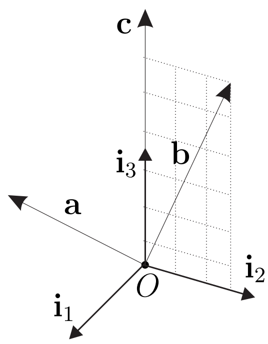

Рис. 5. К доказательству формулы Лагранжа.

□ Действительно, выберем ортонормированный правый базис $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ следующим образом: вектор $\mathbf{i}_3$ сонаправлен с вектором $\mathbf{c}$, а вектор $\mathbf{i}_2$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Тогда

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{b} = b_2\mathbf{i}_2 + b_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{c} = c_3\mathbf{i}_3.$$

Имеем:

$$[\mathbf{b},\mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = b_2 c_3 \mathbf{i}_1,$$

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3 b_2 c_3 \mathbf{i}_2 - a_2 b_2 c_3 \mathbf{i}_3.$$

Далее

$$(\mathbf{a},\mathbf{c}) = a_3 c_3, \quad (\mathbf{a},\mathbf{b}) = a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

так что

$$\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) = a_3 c_3 (b_2 \mathbf{i}_2 + b_3 \mathbf{i}_3), \quad \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (a_2 b_2 + a_3 b_3) c_3 \mathbf{i}_3.$$

Итак,

$$\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a_3 b_2 c_3 \mathbf{i}_2 - a_2 b_2 c_3 \mathbf{i}_3. \quad \boxtimes$$

§ 9. Двумерная и трёхмерная евклидова геометрия

Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathbb{R})$ — это двумерное аффинное евклидово пространство.

Лемма 7. *Множество всех точек $M \in \mathcal{A}$, для которых вектор $\overrightarrow{M_0M} \perp \mathbf{n}(A,B)$ является прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$.*

Доказательство.

$$\overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0.$$

$$\left\langle \overrightarrow{M_0M}, \mathbf{n} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0.$$

Это общее уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Лемма доказана.

Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathbb{R})$ — это трёхмерное аффинное евклидово пространство.

Лемма 8. *Множество всех точек $M \in \mathcal{A}$, для которых $\overrightarrow{M_0M} \perp \mathbf{n}(A,B,C)$, является плоскостью, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{A}$.*

Доказательство.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0.$$

$$\langle \overrightarrow{M_0M}, \mathbf{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Это общее уравнение плоскости в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Лемма доказана.