Семинар–Лекция 9

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА: ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Общие вопросы теории нормированных пространств

1. Пространство $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ банахово, если пространство N_2 банахово.

2. (Следствие.) Для любого нормированного пространства X сопряжённое к нему пространство $X^* \equiv \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ банахово.

3. (Следствие.) Рефлексивное нормированное пространство X с необходимостью банахово, т. к. оно изоморфно банахову пространству $X^{**} \equiv (X^*)^*$.

4. Следующие определения нормы линейного оператора $A : N_1 \to N_2$ равносильны (мы исключаем из рассмотрения тривиальный случай нульмерного пространства):

$$\|A\|_{1\to 2} = \sup_{x \neq \vartheta_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1 \leqslant 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_2.$$

Здесь мы для ясности указали, нормы в каком из пространств — N_1 или N_2 — берутся. В дальнейшем там, где это очевидно, мы будем использовать просто обозначение нормы $\|\cdot\|$.

§ 2. Ряды в банаховом пространстве. Сходимость абсолютно сходящегося ряда

В любом линейном пространстве можно рассматривать конечные суммы элементов. В нормированном, к тому же, можно ввести понятие сходимости по норме или сильной сходимости:

$$y_n \to y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|y_n - y\| \to 0,$$

а следовательно, и понятие суммы ряда:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} S_n \equiv \sum_{n=1}^{N} x_n \to x.$$

Имеет место полезная теорема, обобщающая аналогичное утверждение для числовых рядов.

Теорема 1. *Абсолютно сходящийся ряд сходится, т. е. если сходится числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|,$$

то сходится и исходный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Доказательство этой теоремы, в полной аналогии со случаем числовых рядов, будет основано на критерии Коши сходимости последовательности, из которого очевидным образом вытекает критерий Коши сходимости ряда.

Доказательство.

1. Напомним, что в силу полноты банахова пространства относительно метрики, заданной нормой, всякая последовательность его элементов сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна. Таким образом, критерий Коши в части достаточного условия выполняется в банаховом пространстве автоматически.

2. Переходя к последовательностям частичных сумм, переформулируем с учётом очевидного тождества $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k$ критерий Коши сходимости последовательности в критерий Коши сходимости ряда:

3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в банаховом пространстве X сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

4. Докажем, что условие (2.1) выполнено, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|. \tag{2.2}$$

□ Действительно, пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Воспользовавшись критерием Коши как необходимым условием сходимости ряда (2.2), находим такое N_1, что при всех $n > N_1$ и $p \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Но тогда (при тех же n, p) в силу неравенства треугольника верно и что

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Следовательно, выполнено условие Коши сходимости ряда в банаховом пространстве. ⊠

Теорема доказана.

Замечание 1. Условие непустоты пересечения последовательности вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, можно принять за (эквивалентное) определение полноты метрического пространства. При этом существенно, что в этом рассуждении не используется компактность. С другой стороны, во многих книгах по началам анализа приводится доказательство сходимости фундаментальной числовой последовательности (из теоремы о вложенных отрезках), основанное на предварительном доказательстве её ограниченности и извлечении сходящейся подпоследовательности по теореме Больцано — Вейерштрасса. Такое доказательство, наиболее подходящее в силу своей простоты для начинающих изучать анализ, следует признать затемняющим суть дела при дальнейшем освоении идей и фактов анализа, ибо оно может создать впечатление, что для достаточности условия Коши существенна не только полнота, но и локальная компактность метрического пространства, что не соответствует действительности.

§ 3. Примеры линейных функционалов

ПРИМЕР 1. Установить непрерывность следующих линейных функционалов над пространством $C[-1;1]$:

1) $\langle f_1, x\rangle = x(0)$;
2) $\langle f_2, x\rangle = \frac{1}{3}(x(-1)+x(1))$;
3) $\langle f_3, x\rangle = \int_{-1}^{0} x(t)\,dt - \int_{0}^{1} x(t)\,dt$;
4) $\langle f_4, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(1/n)}{n!}$.

□ Проще установить ограниченность этих функционалов, которая, как мы знаем (см. лемму 1 лекции 7), равносильно непрерывности. Имеем

$$|\langle f_1, x\rangle| = |x(0)| \leqslant \|x\|_C \Rightarrow \|f_1\| \equiv \sup_{\|x\|_C=1} |\langle f_1, x\rangle| \leqslant 1,$$

$$|\langle f_2, x\rangle| = \left|\frac{1}{3}(x(-1)+x(1))\right| \leqslant \frac{2}{3}\|x\|_C \Rightarrow \|f_2\| \equiv \sup_{\|x\|_C=1} |\langle f_2, x\rangle| \leqslant \frac{2}{3},$$

$$|\langle f_3, x\rangle| \leqslant \left|\int_{-1}^{0} x(t)\,dt\right| + \left|\int_{0}^{1} x(t)\,dt\right| \leqslant 2\|x\|_C \Rightarrow \|f_3\| \equiv \sup_{\|x\|_C=1} |\langle f_3, x\rangle| \leqslant 2,$$

$$|\langle f_4, x\rangle| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(1/n)}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x(1/n)}{n!}\right| \leqslant \|x\|_C(e-1).\boxtimes$$

Рекомендуется самостоятельно доказать, что f_4 является суммой ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}, \quad \langle f^{(n)}, x\rangle = \frac{x(1/n)}{n!}$$

не только поточечно (т. е. в смысле $*$-слабой сходимости), но и по норме пространства $(C[0,1])^*$.

До сих пор мы получили лишь оценки сверху на нормы каждого из функционалов. Определение нормы подсказывает, как получить оценки снизу. Именно, для любого ненулевого элемента $x_0 \in X$ имеем

$$\|f\| \equiv \sup_{x\neq\vartheta} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|} \geqslant \frac{|\langle f, x_0\rangle|}{\|x_0\|}.$$

Более общо, для любой последовательности ненулевых элементов $\{x_n\} \subset X$ верно

$$\|f\| \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|\langle f, x_n\rangle|}{\|x_n\|}.$$

Эти соображения мы и будем в дальнейшем использовать для вычисления нормы конкретных линейных функционалов. В частности, в примерах 1—4 все оценки сверху для норм точны, именно,

$$\|f_1\| = 1, \quad \|f_2\| = \frac{2}{3}, \quad \|f_3\| = 2, \quad \|f_4\| = e-1.$$

В самом деле, в примерах 1—2, 4 достаточно рассмотреть $x_0(t) \equiv 1$, а в примере 3 нетрудно построить последовательность функций из C[-1;1]

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1; -\frac{1}{n}]; \\ nt, & t \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]; \\ 1, & t \in [\frac{1}{n}; 1], \end{cases} \tag{3.1}$$

для которой $|\langle f_3, x\rangle| \to 2$ (проверить самостоятельно!).

ПРИМЕР 2. Выяснить, будут ли ограниченными в $C[0;1]$ следующие линейные функционалы:

1) $\langle f_1, x\rangle = \int_0^1 x(\sqrt{t}\,)\,dt$;

2) $\langle f_2, x\rangle = \int_0^1 x(t^2)\,dt$.

$\square$ Нетрудно сообразить, что в обоих случаях имеем

$$|x(\varphi(t))| \leqslant \|x\|_C,$$

где $\varphi(t) = \sqrt{t}$ или $\varphi(t) = t^2$, откуда

$$\int_0^1 x(\varphi(t))\,dt \leqslant 1 \cdot \|x\|_C.$$

Следовательно, $\|f_1\| \leqslant 1$, $\|f_2\| \leqslant 1$. Взяв $x(t) = 1$, устанавливаем, что $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$. ☒

ПРИМЕР 3. Установить ограниченность данного линейного функционала и найти его норму:

1) $\langle f_1, x\rangle = \int_{-1}^{1} tx(t)\,dt, \quad x \in C[-1;1]$;

2) $\langle f_2, x\rangle = \int_{-1}^{1} tx(t)\,dt, \quad x \in L^1[-1;1]$;

3) $\langle f_3, x\rangle = \int_{0}^{1} tx(t)\,dt, \quad x \in C^1[0;1]$;

4) $\langle f_4, x\rangle = \int_{-1}^{1} tx(t)\,dt, \quad x \in L^2[-1;1]$;

5) $\langle f_5, x\rangle = \int_{0}^{1} t^{-1/3}x(t)\,dt, \quad x \in L^2[0;1]$.

□ Рассмотрим все подпункты подробно.

1) Если бы нам нужно было только установить ограниченность функционала f, было бы достаточно оценить подынтегральное выражение следующим образом: $|tx(t)| \leqslant 1 \cdot \|x\|_C$ при $t \in [-1;1]$, откуда $\|f\| \leqslant 2$. Однако ясно, что это слишком грубая оценка, поскольку множитель t «зарезает» значение интеграла. Поэтому проведём более тонкую оценку:

$$\left|\int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |t|\cdot|x(t)|\,dt \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |t|\|x\|_C dt = 2\|x\|_C \int\limits_{0}^{1} t\,dt = \|x\|_C,$$

откуда $\|f\| \leqslant 1$. Можно убедиться, что $\|f\| = 1$, рассмотрев последовательность функций (3.1) (сделайте это самостоятельно). Поэтому норма рассматриваемого функционала равна 1.

2) В силу неравенства Гёльдера при $p = 1$, $q = \infty$ имеем $\|f\| \leqslant 1$. Чтобы показать, что на самом деле $\|f\| = 1$, рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1; 1 - \frac{1}{n}); \\ 1, & t \in [1 - \frac{1}{n}; 1]. \end{cases}$$

Имеем тогда:

$$\|x\|_{L^1[-1;1]} = \frac{1}{n}, \quad \langle f_2, x\rangle = \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} t\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\left(2 - \frac{1}{n}\right),$$

откуда

$$\|f_2\| \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\frac{1}{2n}\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Следовательно, $\|f_2\| = 1$.

3) В данном случае с помощью интегрирования по частям получаем

$$|\langle f,x\rangle| = \left|\frac{t^2}{2}x(t)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{t^2}{2}x'(t)\,dt\right| \leqslant \frac{|x(1)|}{2} + \int\limits_0^1 \frac{t^2}{2}|x'(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|x\|_C + \frac{1}{6}\|x'\|_C \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_C + \frac{1}{2}\|x'\|_C = \frac{1}{2}\|x\|_{C^1}.$$

Обратное неравенство следует из рассмотрения функции $x(t) = 1$. Замечание. В данном случае сработала бы и оценка типа сделанной в п. 1), но мы посчитали полезным продемонстрировать оценку, специфичную для пространства C^1.

4) Пользуясь неравенством Коши — Буняковского и тем фактом, что при совпадении функций оно обращается в равенство, находим $\|f\| = \|t\|_{L^2[-1;1]} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

5) Из аналогичных соображений, пользуясь тем фактом, что $t^{-1/3} \in$ $\in L^2[0;1]$, получаем $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 t^{-2/3}\,dt} = \sqrt{3}$. ☒

ПРИМЕР 4. Рассмотрим линейные функционалы

$$\langle f_\varepsilon, x\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)), \quad f_0 = x'(0), \quad x(t) \in C^1[-1;1].$$

Требуется:

1) установить ограниченность этих функционалов и найти их норму;

2) доказать, что $f_\varepsilon \rightharpoonup f_0$ $*$-слабо;

3) выяснить, имеет ли место сильная сходимость $f_\varepsilon \to f_0$.

□ Проведём рассуждение в несколько этапов.

1) Заметим прежде всего, что норма каждого из рассматриваемых функционалов не превосходит 1. В самом деле,

$$|\langle f_0, x\rangle| = |x'(0)| \leqslant \|x'\|_C \leqslant \|x\|_C + \|x'\|_C \equiv \|x\|_{C^1},$$

$$|\langle f_\varepsilon, x\rangle| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon))\right| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x'(t)\,dt\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon}\|x'\|_C \leqslant \|x\|_{C^1}. \tag{3.2}$$

Легко видеть, что $\|f_0\| = 1$. Чтобы это установить, достаточно рассмотреть функции

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{\mathbf{sgn}\, t}{2n}, & t \notin [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]; \\ t - \frac{n}{2}t|t|, & t \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Читатель легко убедится самостоятельно, что $x_n(t) \in C^1[-1;1]$. Тогда имеем $\|x_n\|_{C^1} = 1 + \frac{1}{2n}$, $\langle f_0, x_n\rangle = 1$.

Для функционалов f_ε можно доказать, что $\|f_\varepsilon\| = \frac{1}{1+\varepsilon}$, но для этого понадобится провести более тонкие оценки. Заметим прежде всего, что

$$|\langle f_\varepsilon, x\rangle| \leqslant \frac{\|x\|_C}{\varepsilon}. \tag{3.3}$$

Но тогда
$$\frac{\|x\|_{C^1}}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} \equiv \frac{\|x\|_C + \|x'\|_C}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} = \frac{\|x\|_C}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} + \frac{\|x'\|_C}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} \geqslant \varepsilon + 1,$$
где в последнем неравенстве мы оценили первое слагаемое с помощью (3.3), а второе — с помощью неравенства $|\langle f_\varepsilon, x\rangle| \leqslant \|x'\|_C$, полученного по ходу дела в цепочке (3.2). Итак, для любой функции $x(t) \in C^1[-1;1]$ имеем
$$\frac{\|x\|_{C^1}}{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|} \geqslant \varepsilon + 1, \quad \text{или} \quad \frac{|\langle f_\varepsilon, x\rangle|}{\|x\|_{C^1}} \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}.$$
Отсюда получаем, что
$$\|f_\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}. \tag{3.4}$$
Установим теперь обратное неравенство. Для этого при каждом фиксированном ε рассмотрим нечётные функции $x_{n\varepsilon}$, определённые при $t \geqslant 0$ следующим образом:
$$x_{n\varepsilon}(t) = \begin{cases} t, & t \in [0;\varepsilon), \\ \varepsilon + (t-\varepsilon) - \frac{n}{2}(t-\varepsilon)^2, & t \in [\varepsilon; \varepsilon + \frac{1}{n}]; \\ \varepsilon + \frac{1}{2n}, & t \in (\varepsilon + \frac{1}{n}; 1]. \end{cases}$$
Читатель легко проверит, что $x_{n\varepsilon}(t) \in C^1[-1;1]$ и $\|x_{n\varepsilon}\|_{C^1} = \varepsilon + \frac{1}{2n} + 1$.

Теперь легко видеть, что
$$\frac{\langle f_\varepsilon, x_{n\varepsilon}\rangle}{\|x\|_{C^1}} = \frac{\frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon))}{\|x\|_{C^1}} = \frac{\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon}}{1+\varepsilon+\frac{1}{2n}} \to \frac{1}{1+\varepsilon}$$
при $n \to \infty$, а поэтому $\|f_\varepsilon\| \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}$. Обратное неравенство было доказано выше.

2) Для любой функции $x(t) \in C^1[-1;1]$ имеем
$$\langle f_\varepsilon, x\rangle =$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)) = \frac{1}{2}\left[\frac{x(\varepsilon)-x(0)}{\varepsilon} - \frac{x(0)-x(-\varepsilon)}{\varepsilon}\right] \to \frac{2x'(0)}{2} = x'(0)$$
при $\varepsilon \to 0$.

3) Сильная сходимость места не имеет. В самом деле, рассмотрим функции $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin nt$. Ясно, что $\|x_n\|_{C^1} \leqslant \frac{n+1}{n}$. В то же время
$$|\langle f_\varepsilon - f, x_n\rangle| = \left|\frac{1}{2\varepsilon} \cdot \frac{\sin n\varepsilon + \sin n\varepsilon}{n} - 1\right| = \left|\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} - 1\right|,$$
и поэтому
$$\|f_\varepsilon - f\| \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left|\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} - 1\right|}{\frac{n+1}{n}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n+1} \cdot \left|\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} - 1\right| = 1$$
при каждом фиксированном ε. Отсюда и следует, что $f_n \not\to f$. ☒

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Доказать, что всякое нормированное пространство становится метрическим, если положить $\rho(x, y) = \|x - y\|$. (На самом деле мы уже не раз этим пользовались.) Указание. Требуется проверить аксиомы метрики.

В дальнейшем мы будем использовать метрические понятия (полнота, замкнутость и т. д.) применительно к нормированному пространству, используя без оговорок именно эту метрику. При этом сходимость по ней (в отличие от других возможных типов) называется сильной сходимостью.

Задача 2. Доказать, что норма непрерывна как функция своего аргумента: если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$. Верно ли обратное?

Задача 3. Доказать, что следующие линейные пространства с указанным образом введёнными нормами являются а) нормированными; б) банаховыми:
1) $l^\infty \equiv m$ — пространство ограниченных последовательностей $\{x_n\}$, $\|\{x_n\}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$;
2) l^1 — пространство последовательностей $\{x_n\}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^\infty |x_n|$ сходится, $\|\{x_n\}\| = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$;
3*) l^p — пространство последовательностей $\{x_n\}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ сходится, $\|\{x_n\}\| = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in (1; +\infty)$;
4а, б*) $L^\infty([0; 1])$;
5а, б) $C[0; 1]$;
6а, б) $C^{(1)}[0; 1]$.

Задача 4. Доказать, что двумерное координатное пространство $\mathbb{R}^2$ будет а) нормированным, б) банаховым, если ввести норму на нём каждым из следующих способов:
1) $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2) $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$;
3) $\|(x, y)\| = |x| + |y|$.
Соответствующие нормированные пространства мы будем обозначать $l^2_{(2)} \equiv E^2$, $l^\infty_{(2)}$, $l^1_{(2)}$ (обозначения не общепринятые!). Изобразить единичные шары $\|(x, y)\| < 1$ в каждом случае.

Задача 5. 1) Доказать, что все нормы из предыдущей задаче эквивалентны. 2) Доказать, что в том же пространстве можно ввести норму по формуле $\|(x, y)\| = \sqrt{100x^2 + y^2}$ и что она будет эквивалентна любой норме из предыдущей задачи. (Это полезно для численных методов, если в рассматриваемой задаче характерная величина x составляет 0,01 от характерной величины y.)

Задача 6. Можно ли ввести норму так: $\|(x, y)\| = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$?

Задача 7. Установить непрерывность следующих линейных функционалов:
1) $\langle f,x\rangle = x_1 + x_2, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \in l^2$;
2) $\langle f,x\rangle = x_1 + x_2, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \in m$;
3) $\langle f,x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \in l^2$;
4) $\langle f,x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}, \quad x = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \in l^1$;
5) $\langle f_\varepsilon,x\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)), \quad \varepsilon \in [-1;1], \quad x \in C[-1;1]$;
6) $\langle f,x\rangle = \int_0^1 x(t)\,dt, \quad x \in C[-1;1]$.
В п. 1)—4) требуется также найти норму функционалов.

Задача 8. Рассмотрим на пространстве $C[0;1]$ линейные функционалы

$$\langle f_n, x\rangle = \int\limits_0^1 x(t^n)\,dt, \quad \langle f,x\rangle = x(0).$$

1) Доказать ограниченность и найти норму этих функционалов.
2*) Доказать, что $f_n \xrightarrow{*} f$.

Задача 9. 1) Пусть последовательность $\{x_n\} \subset X$ ограничена и для каждого f из некоторого всюду плотного в X^* множества $\langle f, x_n\rangle \to \to \langle f, x\rangle$. Доказать, что $x_n \rightharpoonup x$.
2) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для $*$-слабой сходимости функционалов.
3)* Можно ли отказаться от условия ограниченности последовательности?

Задача 10. Пусть X — вещественное линейное пространство, f — определённый на нём линейный функционал. Доказать, что он непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ множества

$$\{x \in X \mid \langle f,x\rangle < c\}, \quad \{x \in X \mid \langle f,x\rangle > c\}$$

открыты относительно метрики пространства X (порождённой нормой).

Задача 11. Пусть B — банахово пространство, $f \in B^*$ и для некоторого шара $\overline{B}_r(x_0) \equiv \{x \in B \mid \|x - x_0\| \leqslant r\}$ верно

$$\sup_{x,y \in \overline{B}_r(x_0)} |\langle f,x\rangle - \langle f,y\rangle| = 1. \tag{4.1}$$

Найти $\|f\|$.

Цикл задач по связи нормы и топологии.

Задача 12. Доказать, что нормированное пространство становится линейным топологическим, если в качестве базы окрестностей нуля взять а) все открытые шары с центром в нуле; б) открытые шары радиусов $r_n = \frac{1}{n}$ с центром в нуле. Указание. Сначала опишите топологию, задаваемую такой базой окрестностей нуля, затем проверьте, что она согласована с линейными операциями.

Задача 13. (Продолжение.) Одну и ту же или разные топологии задают на $\mathbb{R}^2$ нормы 1)—3) из задачи 4 и норма из задачи 5?

З а д а ч а 14. (П р о д о л ж е н и е.) 1) Доказать, что во всяком нормированном пространстве всякий открытый и всякий замкнутый шар выпуклы. 2) Доказать, что в нормированной пространстве замкнутый шар с центром в нуле является уравновешенным и поглощающим множеством.
(С учётом задач 12, 14 мы видим, что всякое нормированное пространство есть локально выпуклое линейное топологическое пространство.)

З а д а ч а 15. Нормированное пространство называется строго выпуклым, если равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ достигается лишь для «коллинеарных» (т. е. пропорциональных, $x = \lambda y$ при некотором λ или $y = \vartheta$) x и y. Какие из пространств, построенных в задаче 4, строго выпуклы?

З а д а ч а 16*. (П р о д о л ж е н и е.) Можно ли задать обычную метрическую топологию (порождаемую нормой из задачи 4, п. 1)) с помощью базы, состоящей из невыпуклых множеств? (Если да, то станет понятно, почему в определении локально выпуклого ЛТП говорится «…базу можно выбрать…».)

З а д а ч а 17. Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится по одной из эквивалентных норм, то она сходится и по другой. Может ли некоторая последовательность сходиться к разным пределам (в зависимости от нормы), если эти нормы: а) эквиваленты, б) не обязательно эквивалентны?

З а д а ч а 18. Установить сепарабельность пространств l^p, $p \in (1; +\infty)$. (Заметим, что сепарабельность l^1 и несепарабельность $m \equiv l^\infty$ уже установлены.)