

Разностные схемы для уравнения колебаний в многомерном случае

Для многомерных уравнений колебаний можно составить аналог схемы «крест» и неявной схемы. При этом явная схема «крест» так же, как и в одномерном случае, будет условно устойчивой. В случае неявной схемы весовой параметр σ , с которым в разностное уравнение входят аппроксимированные на сетке слагаемые с пространственными производными, взятые на слоях $j - 1$ и $j + 1$, можно подобрать так, чтобы схема была безусловно устойчивой. Непосредственное решение получающейся при этом системы алгебраических уравнений требует большого числа действий, а соответствующая схема не является экономичной. Поэтому на практике часто от неявной схемы переходят к модифицированной факторизованной схеме, безусловно устойчивой при тех же значениях σ , что и неявная схема, и аппроксимирующей исходную задачу с тем же порядком погрешности аппроксимации, что и неявная схема. Факторизованная схема является экономичной и решается в несколько этапов для каждого координатного направления. Каждая из возникающих при этом вспомогательных задач решается методом прогонки.

1 Двумерное уравнение колебаний в прямоугольной области

Для того чтобы продемонстрировать основные идеи численного решения уравнения колебаний конечно-разностными методами, рассмотрим двумерное уравнение колебаний в прямоугольной области. Пусть нам необходимо решить следующую начально-краевую

задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x, y, t), \quad x \in (0, l_x), \quad y \in (0, l_y), \quad t \in (0, T], \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y), \\ u|_{x=0} = \mu_1(y, t), \quad u|_{x=l_x} = \mu_2(y, t), \\ u|_{y=0} = \mu_3(x, t), \quad u|_{y=l_y} = \mu_4(x, t). \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Введем в области $x \in [0, l_x]$, $y \in [0, l_y]$ равномерную сетку с шагом h_x по переменной x , h_y по переменной y и шагом τ по времени:

$$x_n = nh_x, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad Nh_x = l_x, \quad y_m = mh_y, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad Mh_y = l_y,$$

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad J\tau = T.$$

Граничные условия задачи (1.1) аппроксимируются на сетке точно:

$$w_{0,m}^j = \mu_1(y_m, t_j), \quad w_{N,m}^j = \mu_2(y_m, t_j), \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad (1.2)$$

$$w_{n,0}^j = \mu_3(x_n, t_j), \quad w_{n,M}^j = \mu_4(x_n, t_j), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

Начальные условия задачи аппроксимируем со вторым порядком погрешности по τ :

$$\begin{aligned} w_{n,m}^0 &= \varphi(x_n, y_m), \\ \frac{w_{n,m}^1 - w_{n,m}^0}{\tau} &= \psi(x_n, y_m) + \frac{\tau}{2} (a^2 \Delta \varphi(x_n, y_m) + f(x_n, y_m, 0)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

при $n = 0, 1, \dots, N$, $m = 0, 1, \dots, M$.

Дифференциальное уравнение в задаче (1.1) при $j = 1, 2, \dots, J - 1$ можно аппроксимировать с помощью явной схемы «крест», а можно использовать факторизованную неявную схему.

1.1 Схема «крест» в двумерном случае

Используем для аппроксимации двумерного уравнения колебания шаблон, приведенный на рис. 1.

Заменяя производные в уравнении конечными разностями, приходим к следующему разностному уравнению:

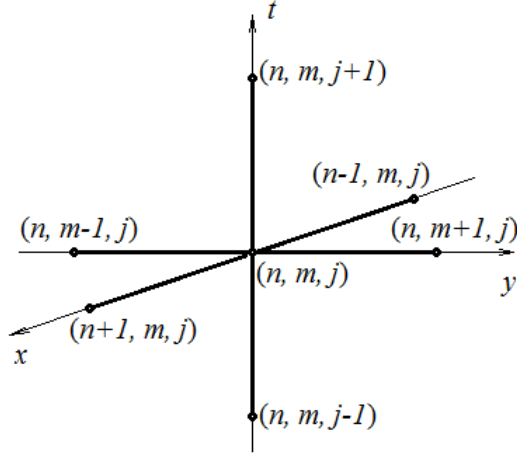


Рис. 1: Шаблон схемы «крест» в двумерном случае

$$\frac{w_{n,m}^{j+1} - 2w_{n,m}^j + w_{n,m}^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \left(\frac{w_{n+1,m}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n-1,m}^j}{h_x^2} + \frac{w_{n,m+1}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n,m-1}^j}{h_y^2} \right) + f_{n,m}^j \quad (1.4)$$

при $j = 1, \dots, J - 1$, $n = 1, \dots, N - 1$, $m = 1, \dots, M - 1$.

В узле (x_n, y_m, t_j) разностное уравнение (1.4) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение с погрешностью $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$.

При каждом фиксированном $j = 1, 2, \dots, J - 1$ неизвестными в уравнении (1.4) являются $w_{n,m}^{j+1}$, которые могут быть легко выражены. После того как все $w_{n,m}^{j+1}$ при $n = 1, \dots, N - 1$, $m = 1, \dots, M - 1$ найдены, для завершения перехода на слой $j + 1$ нужно воспользоваться граничными условиями при $n = 0$, $n = N$, $m = 0$ и $m = M$.

Для исследования схемы «крест» на устойчивость по начальным данным можно использовать метод гармоник. Множители роста при этом удовлетворяют квадратному уравнению:

$$\lambda_{pq}^2 - 2\lambda_{pq} + 1 = -\lambda_{pq} \left(\frac{4a^2\tau^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + \frac{4a^2\tau^2}{h_y^2} \sin^2 \frac{\alpha_p}{2} \right). \quad (1.5)$$

Условие $|\lambda_{pq}| \leq 1$ выполняется, если дискриминант уравнения (1.5) неположителен:

$$\frac{D}{4} = \left(1 - 2a^2\tau^2 \left(\frac{\sin^2 \frac{\alpha_p}{2}}{h_x^2} + \frac{\sin^2 \frac{\alpha_q}{2}}{h_y^2} \right) \right)^2 - 1 \leq 0,$$

то есть когда справедливы неравенства

$$-1 \leq 1 - 2a^2\tau^2 \left(\frac{\sin^2 \frac{\alpha_p}{2}}{h_x^2} + \frac{\sin^2 \frac{\alpha_q}{2}}{h_y^2} \right) \leq 1.$$

Последнее условие выполнено, если:

$$a^2\tau^2 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \leq 1,$$

откуда получаем условие устойчивости схемы «крест» в двумерном случае:

$$a\tau \sqrt{\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}} \leq 1. \quad (1.6)$$

Замечание 1.1 В трехмерном случае условие устойчивости схемы «крест» имеет вид:

$$a\tau \sqrt{\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2}} \leq 1.$$

Схему «крест» удобно использовать в расчетах, не требующих высокой надежности вычислений, то есть когда не может возникнуть локальное нарушение условия (1.6).

1.2 Неявная схема для двумерного уравнения колебаний. Эволюционная факторизация.

Двумерный аналог неявной схемы с весами для уравнения колебаний имеет вид:

$$w_{\bar{t}\bar{t}} = a^2 \sum_{s=1}^2 \Lambda_s [\sigma \hat{w} + (1 - 2\sigma)w + \sigma \check{w}] + f, \quad (1.7)$$

где $\Lambda_1 w = w_{\bar{x}\bar{x}}$ и $\Lambda_2 w = w_{\bar{y}\bar{y}}$.

За счет своей симметрии относительно слоя j схема (1.7) обладает погрешностью аппроксимации $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$, однако она не является экономичной, так как переход со слоя на слой требует слишком большого числа действий.

Заметим, что для выражения, на которое действуют операторы Λ_s в правой части уравнения (1.7), справедливо равенство:

$$\sigma \hat{w} + (1 - 2\sigma)w + \sigma \check{w} = \sigma \tau^2 w_{\bar{t}\bar{t}} + w,$$

которое позволяет переписать уравнение (1.7) в виде:

$$\underbrace{\left(E - \sigma \tau^2 a^2 \sum_{s=1}^2 \Lambda_s \right)}_B w_{\bar{t}\bar{t}} = a^2 \sum_{s=1}^2 \Lambda_s w + f. \quad (1.8)$$

Рассмотрим приближенный факторизованный оператор \tilde{B} следующего вида:

$$\tilde{B} = (E - \sigma\tau^2 a^2 \Lambda_1)(E - \sigma\tau^2 a^2 \Lambda_2) = \underbrace{E - \sigma\tau^2 a^2 (\Lambda_1 + \Lambda_2)}_B + \underbrace{\sigma^2 \tau^4 a^4 \Lambda_1 \Lambda_2}_{O(\tau^4)}.$$

Операторы B и \tilde{B} отличаются на величину порядка $O(\tau^4)$. Таким образом, если в уравнении (1.8) заменить оператор B на оператор \tilde{B} , погрешность аппроксимации этим разностным уравнением исходного дифференциального уравнения не будет испорчена (она останется равной $O(\tau^2)$). В результате замены B на \tilde{B} получаем факторизованную разностную схему:

$$(E - \sigma\tau^2 a^2 \Lambda_1)(E - \sigma\tau^2 a^2 \Lambda_2)w_{\bar{t}t} = a^2 \Lambda w + f, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2. \quad (1.9)$$

Исследовать схему (1.9) на устойчивость можно с помощью метода гармоник. При этом для множителей роста получаем следующее квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{4\sigma a^2 \tau^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}\right) \left(1 + \frac{4\sigma a^2 \tau^2}{h_y^2} \sin^2 \frac{\alpha_p}{2}\right) (\lambda_{pq}^2 - 2\lambda_{pq} + 1) = \\ = -\lambda_{pq} 4a^2 \tau^2 \left(\frac{\sin^2 \frac{\alpha_q}{2}}{h_x^2} + \frac{\sin^2 \frac{\alpha_p}{2}}{h_y^2}\right), \end{aligned}$$

которое можно переписать в виде:

$$\lambda_{pq}^2 - 2 \left(1 - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{(1 + 2\sigma\gamma_1)(1 + 2\sigma\gamma_2)}\right) \lambda_{pq} + 1 = 0, \quad (1.10)$$

где введены обозначения

$$\gamma_1 = \frac{2a^2 \tau^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{2a^2 \tau^2}{h_y^2} \sin^2 \frac{\alpha_p}{2}.$$

Условие $|\lambda_{pq}| \leq 1$ выполнено, если дискриминант уравнения (1.10) неположителен, то есть если справедливы неравенства:

$$-1 \leq 1 - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{(1 + 2\sigma\gamma_1)(1 + 2\sigma\gamma_2)} \leq 1 \Leftrightarrow (1 + 2\sigma\gamma_1)(1 + 2\sigma\gamma_2) \geq \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}.$$

Последнее неравенство заведомо выполнено при $\sigma \geq \frac{1}{4}$. Следовательно, как и в одномерном случае, схема (1.9) безусловно устойчива при $\sigma \geq \frac{1}{4}$. На практике целесообразно выбирать $\sigma \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, так чтобы вес $(1 - 2\sigma)$ центрального слоя не был отрицателен.

Добавляя к системе уравнений (1.9), рассматриваемых при $j = 1, 2, \dots, J - 1$, $n = 1, 2, \dots, N - 1$, $m = 1, 2, \dots, M - 1$, разностную аппроксимацию начальных и граничных

условий задачи (1.1), получаем для не разностную схему. Рассмотрим алгоритм ее решения. Введем вспомогательную функцию $w^{(1)} = (E - \sigma\tau^2 a^2 \Lambda_2)w_{\bar{t}\bar{t}}$. Тогда

$$(E - \sigma\tau^2 a^2 \Lambda_1) \underbrace{(E - \sigma\tau^2 a^2 \Lambda_2)w_{\bar{t}\bar{t}}}_{w^{(1)}} = a^2 \Lambda w + f,$$

откуда для $w^{(1)}$ получаем уравнение

$$(E - \sigma\tau^2 a^2 \Lambda_1)w^{(1)} = a^2 \Lambda w + f, \quad n = 1, \dots, N - 1, \quad m = 1, \dots, M - 1. \quad (1.11)$$

Для того чтобы при каждом фиксированном $m = 1, 2, \dots, M - 1$ получить для неизвестных $w_{n,m}^{(1)}$ полную систему уравнений, к уравнению (1.11) нужно добавить граничные условия для $w_{n,m}^{(1)}$ при $n = 0$ и $n = N$. Получим их из граничных условий для функции $w_{n,m}^j$:

$$w_{0,m}^{(1)} = (E - \sigma\tau^2 a^2 \Lambda_2)w_{\bar{t}\bar{t}}|_{n=0} = (E - \sigma\tau^2 a^2 \Lambda_2) \frac{\mu_1(y_m, t_{j+1}) - 2\mu_1(y_m, t_j) + \mu_1(y_m, t_{j-1}))}{\tau^2} = \bar{\mu}_{1,m},$$

$$w_{N,m}^{(1)} = (E - \sigma\tau^2 a^2 \Lambda_2)w_{\bar{t}\bar{t}}|_{n=N} = (E - \sigma\tau^2 a^2 \Lambda_2) \frac{\mu_2(y_m, t_{j+1}) - 2\mu_2(y_m, t_j) + \mu_2(y_m, t_{j-1}))}{\tau^2} = \bar{\mu}_{2,m},$$

где $m = 1, \dots, M - 1$.

В результате для $w_{n,m}^{(1)}$ при каждом фиксированном $m = 1, 2, \dots, M - 1$ приходим к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{0,m}^{(1)} = \bar{\mu}_{1,m}, \\ \frac{\sigma\tau^2 a^2}{h_x^2} w_{n-1,m}^{(1)} - \left(1 + \frac{2\sigma\tau^2 a^2}{h_x^2}\right) w_{n,m}^{(1)} + \frac{\sigma\tau^2 a^2}{h_x^2} w_{n+1,m}^{(1)} = - \left\{ a^2 \frac{w_{n-1,m}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n+1,m}^j}{h_x^2} + \right. \\ \left. + a^2 \frac{w_{n,m-1}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n,m+1}^j}{h_y^2} + f_{n,m}^j \right\}, \quad n = 1, \dots, N - 1, \\ w_{N,m}^{(1)} = \bar{\mu}_{2,m}, \end{array} \right. \quad (1.12)$$

которая может быть решена методом прогонки. В результате решения системы (1.12) находим значения вспомогательной функции $w_{n,m}^{(1)}$ для всех $n = 0, 1, \dots, N$ и $m = 1, 2, \dots, M - 1$.

После того, как значения $w_{n,m}^{(1)}$ найдены, рассмотрим уравнение

$$(E - \sigma a^2 \tau^2 \Lambda_2)w_{\bar{t}\bar{t}} = w^{(1)}, \quad n = 1, \dots, N - 1, \quad m = 1, \dots, M - 1.$$

Добавляя к нему граничные условия при $m = 0$ и $m = M$, при каждом фиксированном $n = 1, \dots, N - 1$ получаем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{n,0}^{j+1} = \mu_3(x_n, t_{j+1}), \\ \frac{\sigma\tau^2 a^2}{h_y^2} w_{n,m-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{2\sigma\tau^2 a^2}{h_y^2}\right) w_{n,m}^{j+1} + \frac{\sigma\tau^2 a^2}{h_y^2} w_{n,m+1}^{j+1} = - \left\{ \tau^2 w_{n,m}^{(1)} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma\tau^2 a^2}{h_y^2} (w_{n,m-1}^{j-1} - 2w_{n,m-1}^j) - \left(1 + \frac{2\sigma\tau^2 a^2}{h_y^2}\right) (w_{n,m}^{j-1} - 2w_{n,m}^j) + \right. \\ \left. + \frac{\sigma\tau^2 a^2}{h_y^2} (w_{n,m+1}^{j-1} - 2w_{n,m+1}^j) \right\}, \quad m = 1, \dots, M - 1, \\ w_{n,M}^{j+1} = \mu_4(x_n, t_{j+1}). \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Система (1.13) при каждом фиксированном $n = 1, 2, \dots, N - 1$ решается прогонкой. После того, как $w_{n,m}^{j+1}$ найдены при всех $m = 0, 1, \dots, M$, $n = 1, 2, \dots, N - 1$, значения $w_{0,m}^{j+1}$ и $w_{N,m}^{j+1}$ можно найти из граничных условий при $x = 0$ и $x = l_x$.

2 Пример реализации схемы «крест» и эволюционно-факторизованной схемы для уравнения колебаний в прямоугольнике

Проиллюстрируем применение схемы «крест» и эволюционно-факторизованной безусловно устойчивой схемы на примере следующей начально-краевой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\Delta u, \quad x \in (0, 2), \quad y \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=2} = 2ty, \quad u|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=1} = tx, \\ u|_{t=0} = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = xy. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Задача (2.1) допускает аналитическое решение. Будем искать ее решение в виде суммы двух функций, одна из которых удовлетворяет неоднородным граничным условиям: $u(x, y, t) = v(x, y, t) + q(x, y, t)$, где

$$q|_{x=0} = 0, \quad q|_{x=2} = 2ty, \quad q|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial y}\Big|_{y=1} = tx.$$

Этим условиям удовлетворяет, например, функция $q(x, y, t) = txy$. При этом для функции $v(x, y, t)$ получаем начально-краевую задачу с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 4\Delta v, & x \in (0, 2), \quad y \in (0, 1), \quad t > 0, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=2} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=1} = 0, \\ v|_{t=0} = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Используя для ее решения метод разделения переменных, находим:

$$v = \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right).$$

Следовательно, решение задачи (2.1) имеет вид:

$$u = txy + \cos(\pi\sqrt{2}t) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right). \quad (2.2)$$

Для численного решения задачи (2.1) введем равномерную сетку:

$$\begin{aligned} x_n &= nh_x, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad h_x = \frac{2}{N}, \\ y_m &= mh_y, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad Mh_y = 1 + \frac{h_y}{2} \Leftrightarrow h_y = \frac{1}{M - 1/2}, \\ t_j &= j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad \tau = \frac{T}{J}, \end{aligned}$$

где T — промежуток времени, на котором будем решать задачу.

Аппроксимируем начальные и граничные условия задачи. Граничные условия:

$$\begin{aligned} w_{0,m}^j &= 0, \quad w_{N,m}^j = 2t_j y_m, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ w_{n,0}^j &= 0, \quad \frac{w_{n,M}^j - w_{n,M-1}^j}{h_y} = t_j x_n, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

За счет выбора сетки по направлению y граничное условие Неймана при $y = 1$ аппроксимируется со вторым порядком погрешности аппроксимации.

Начальные условия:

$$\begin{aligned} w_{n,m}^0 &= \sin\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{2}\right), \\ \frac{w_{n,m}^1 - w_{n,m}^0}{\tau} &= x_n y_m + \frac{\tau}{2} (4\Delta u)|_{t=0} = x_n y_m - \tau\pi^2 \sin\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{2}\right), \end{aligned}$$

при $n = 0, 1, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M$.

Схема «крест». Для устойчивости схемы «крест» будем задавать N и M произвольно, а число J интервалов по времени подбирать так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{2T}{J} \sqrt{\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}} \leq 1.$$

Например, пусть

$$J = 1 + \text{round} \left(2T \sqrt{\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}} \right).$$

Разностная аппроксимация уравнения колебаний в задаче (2.1) имеет вид:

$$\frac{w_{n,m}^{j+1} - 2w_{n,m}^j + w_{n,m}^{j-1}}{\tau^2} = 4 \left(\frac{w_{n+1,m}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n-1,m}^j}{h_x^2} + \frac{w_{n,m+1}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n,m-1}^j}{h_y^2} \right), \quad (2.3)$$

где $n = 1, 2, \dots, N-1$, $m = 1, 2, \dots, M-1$, $j = 1, 2, \dots, J-1$. Когда начальные условия заданы, при $j = 1$ в уравнении (2.3) неизвестными являются значения $w_{n,m}^{j+1}$, которые легко могут быть найдены по формуле

$$w_{n,m}^{j+1} = 2w_{n,m}^j - w_{n,m}^{j-1} + 4\tau^2 \left(\frac{w_{n+1,m}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n-1,m}^j}{h_x^2} + \frac{w_{n,m+1}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n,m-1}^j}{h_y^2} \right)$$

в цикле при $n = 1, 2, \dots, N-1$, $m = 1, 2, \dots, M-1$. После этого можно найти значения $w_{0,m}^{j+1}$, $w_{N,m}^{j+1}$, $w_{n,0}^{j+1}$ и $w_{n,M}^{j+1}$, пользуясь граничными условиями:

$$w_{0,m}^{j+1} = 0, \quad w_{N,m}^{j+1} = 2t_{j+1}y_m, \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

$$w_{n,0}^{j+1} = 0, \quad w_{n,M}^{j+1} = w_{n,M-1}^{j+1} + h_y t_{j+1} x_n, \quad n = 1, \dots, N-1.$$

Когда переход на слой $j = 2$ завершен, аналогично можно найти значения $w_{n,m}^{j+1}$ на всех оставшихся временных слоях.

Результаты расчетов по схеме «крест» для нескольких моментов времени в случае, когда $T = 1$, $N = 100$ и $M = 50$, приведены на рис. 2 - 4.

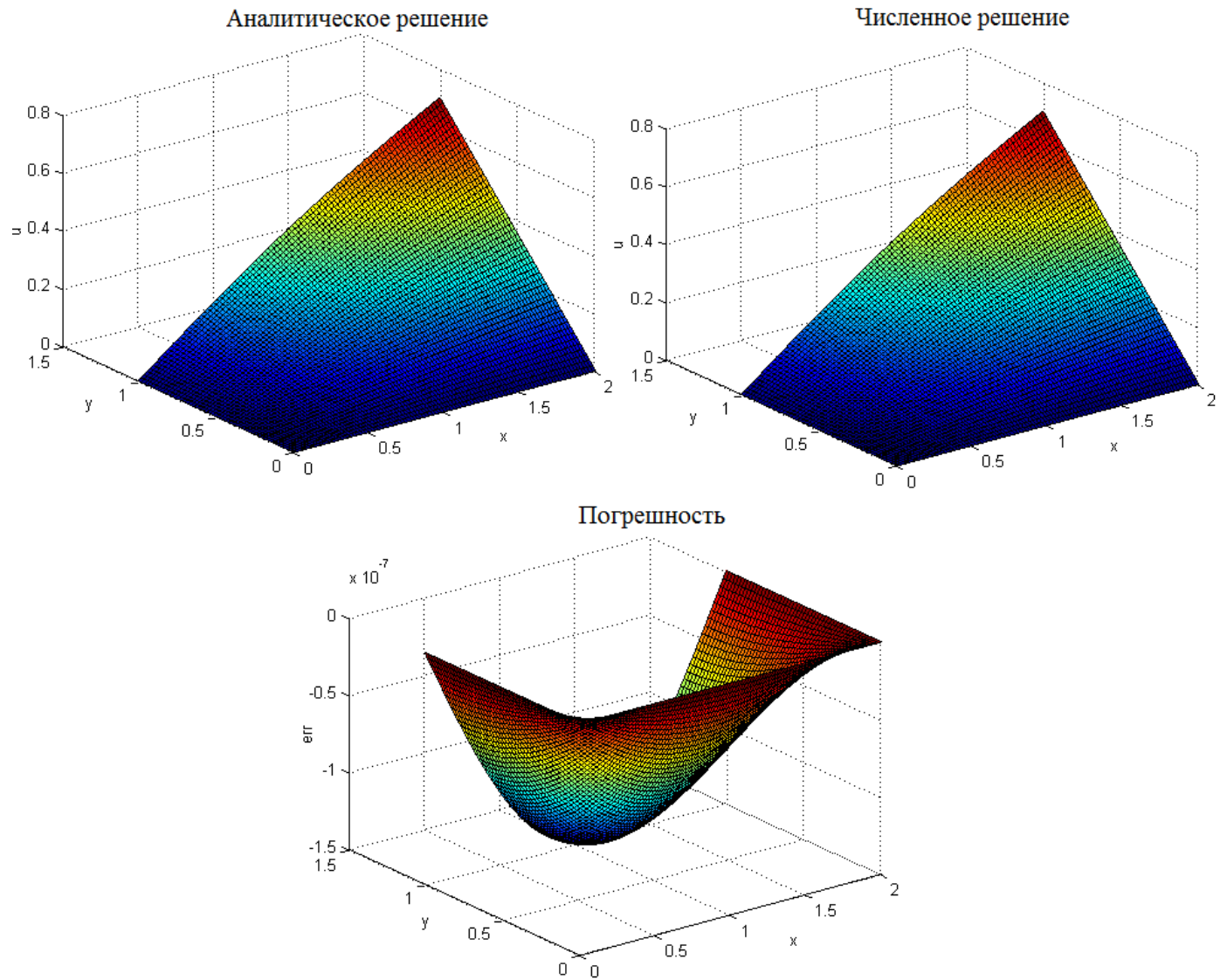


Рис. 2: График аналитического решения задачи (2.1), ее численного решения по схеме «крест», а также погрешности в момент времени $t = 0.3451$ (соответствует $j = 50$)

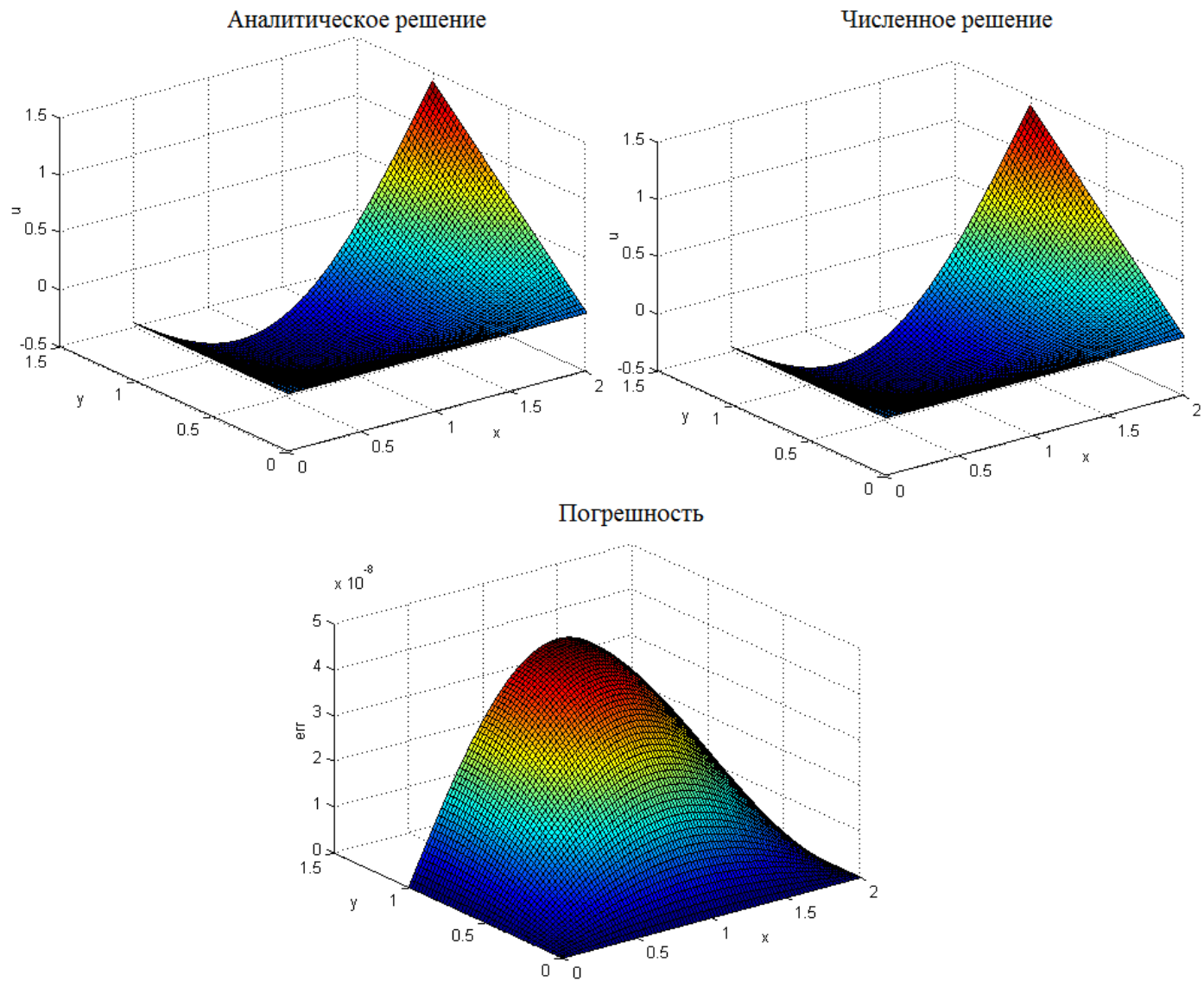


Рис. 3: График аналитического решения задачи (2.1), ее численного решения по схеме «крест», а также погрешности в момент времени $t = 0.6972$ (соответствует $j = 100$)

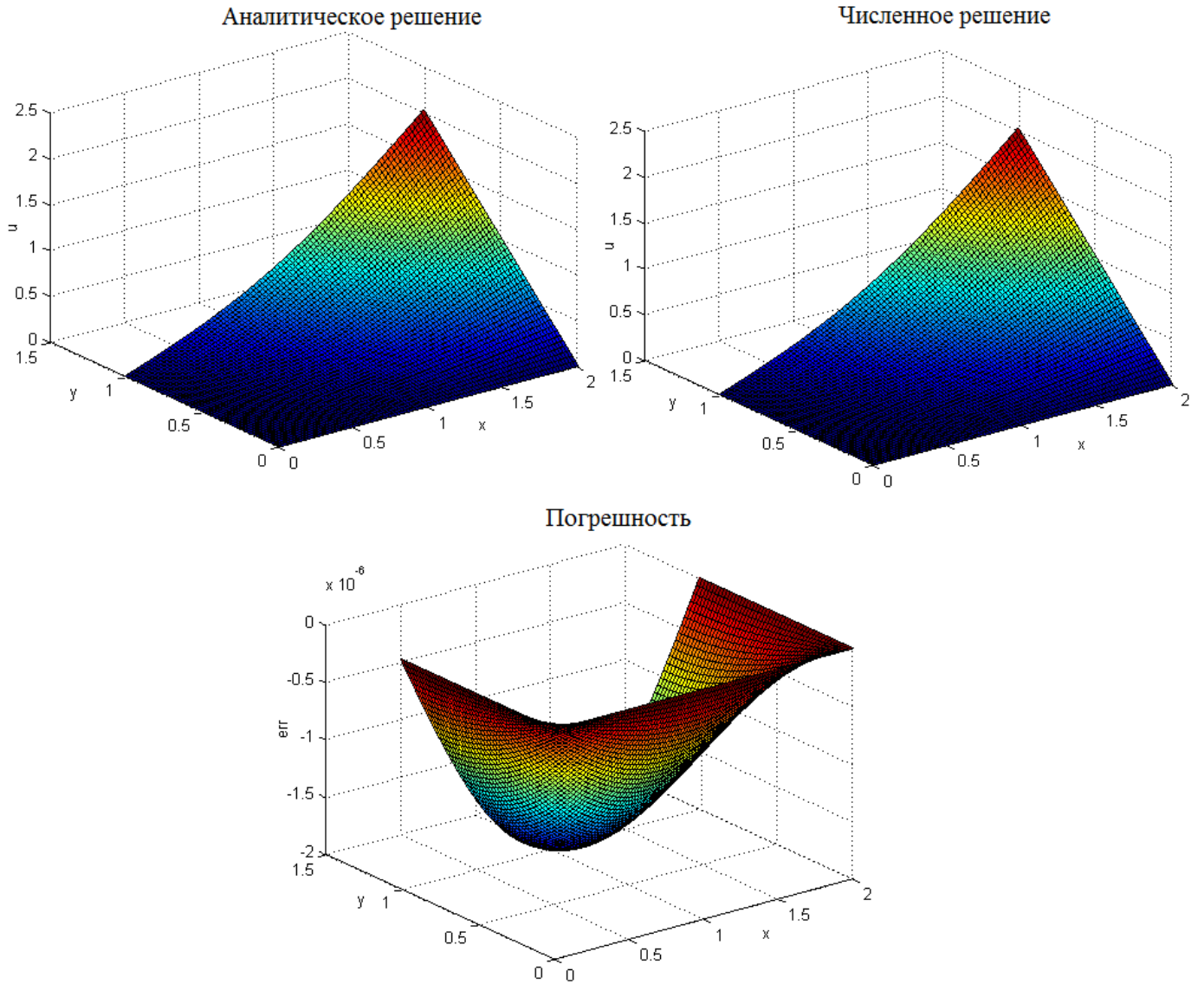


Рис. 4: График аналитического решения задачи (2.1), ее численного решения по схеме «крест», а также погрешности в момент времени $t = 1$ (соответствует $j = J = 143$)

Эволюционно-факторизованная схема. При использовании эволюционно- факторизованной схемы переход со слоя j на слой $j + 1$ осуществляется в два этапа с использованием вспомогательной функции $w_{n,m}^{(1)}$. Прежде всего, получим для этой функции граничные условия, пользуясь тем, что в рассматриваемой задаче

$$u|_{x=0} = \mu_1(y, t), \quad u|_{x=2} = \mu_2(y, t),$$

где $\mu_1(y, t) = 0$, $\mu_2(y, t) = 2ty$. Следовательно, в нашем случае

$$\bar{\mu}_{1,m} = (E - 4\sigma\tau^2\Lambda_2)\mu_{1,\bar{t}t} = 0, \quad \bar{\mu}_{2,m} = (E - 4\sigma\tau^2\Lambda_2)\mu_{2,\bar{t}t} = 0,$$

так как $\mu_1 = 0$ и $\mu_{2,\bar{t}t} = 2y_m \frac{(j+1)\tau - 2j\tau + (j-1)\tau}{\tau^2} = 0$.

Для функции $w_{n,m}^{(1)}$ при каждом фиксированном $m = 1, 2, \dots, M - 1$ получаем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{0,m}^{(1)} = 0, \\ \frac{4\sigma\tau^2}{h_x^2} w_{n-1,m}^{(1)} - \left(1 + \frac{8\sigma\tau^2}{h_x^2}\right) w_{n,m}^{(1)} + \frac{4\sigma\tau^2}{h_x^2} w_{n+1,m}^{(1)} = -4 \left(\frac{w_{n-1,m}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n+1,m}^j}{h_x^2} + \right. \\ \left. + \frac{w_{n,m-1}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n,m+1}^j}{h_y^2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \\ w_{N,m}^{(1)} = 0. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Решая систему (2.4) прогонкой в цикле по m , находим $w_{n,m}^{(1)}$ при всех $n = 0, 1, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots, M - 1$.

Переход на слой $j + 1$ осуществим, пользуясь уравнением $(E - 4\sigma\tau^2\Lambda_2)w_{tt} = w^{(1)}$ и граничными условиями для функции $w_{n,m}^{j+1}$ при $m = 0$ и $m = M$. В результате при каждом фиксированном $n = 1, 2, \dots, N - 1$ получаем систему с трехдиагональной матрицей:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{n,0}^{j+1} = 0, \\ \frac{4\sigma\tau^2}{h_y^2} w_{n,m-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{8\sigma\tau^2}{h_y^2}\right) w_{n,m}^{j+1} + \frac{4\sigma\tau^2}{h_y^2} w_{n,m+1}^{j+1} = - \left(\tau^2 w_{n,m}^{(1)} + \right. \\ \left. + \frac{4\sigma\tau^2}{h_y^2} (w_{n,m-1}^{j-1} - 2w_{n,m}^j) - \left(1 + \frac{8\sigma\tau^2}{h_y^2}\right) (w_{n,m}^{j-1} - 2w_{n,m}^j) + \right. \\ \left. + \frac{4\sigma\tau^2}{h_y^2} (w_{n,m+1}^{j-1} - 2w_{n,m+1}^j) \right), \quad m = 1, 2, \dots, M - 1, \\ w_{n,M}^{j+1} = w_{n,M-1}^{j+1} + h_y t_{j+1} x_n. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Решая систему (2.5) методом прогонки в цикле по n , находим значения $w_{n,m}^{j+1}$ при всех $n = 1, 2, \dots, N - 1$ и $m = 0, 1, \dots, M$. При $n = 0$ и $n = N$ значения функции $w_{n,m}^{j+1}$ получаем из граничных условий:

$$w_{0,m}^{j+1} = 0, \quad w_{N,m}^{j+1} = 2t_{j+1}y_m, \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

Результаты численного решения задачи с помощью эволюционно-факторизованной схемы для тех же параметров сетки, что и в случае схемы «крест», представлены на рис. 5 - 7.

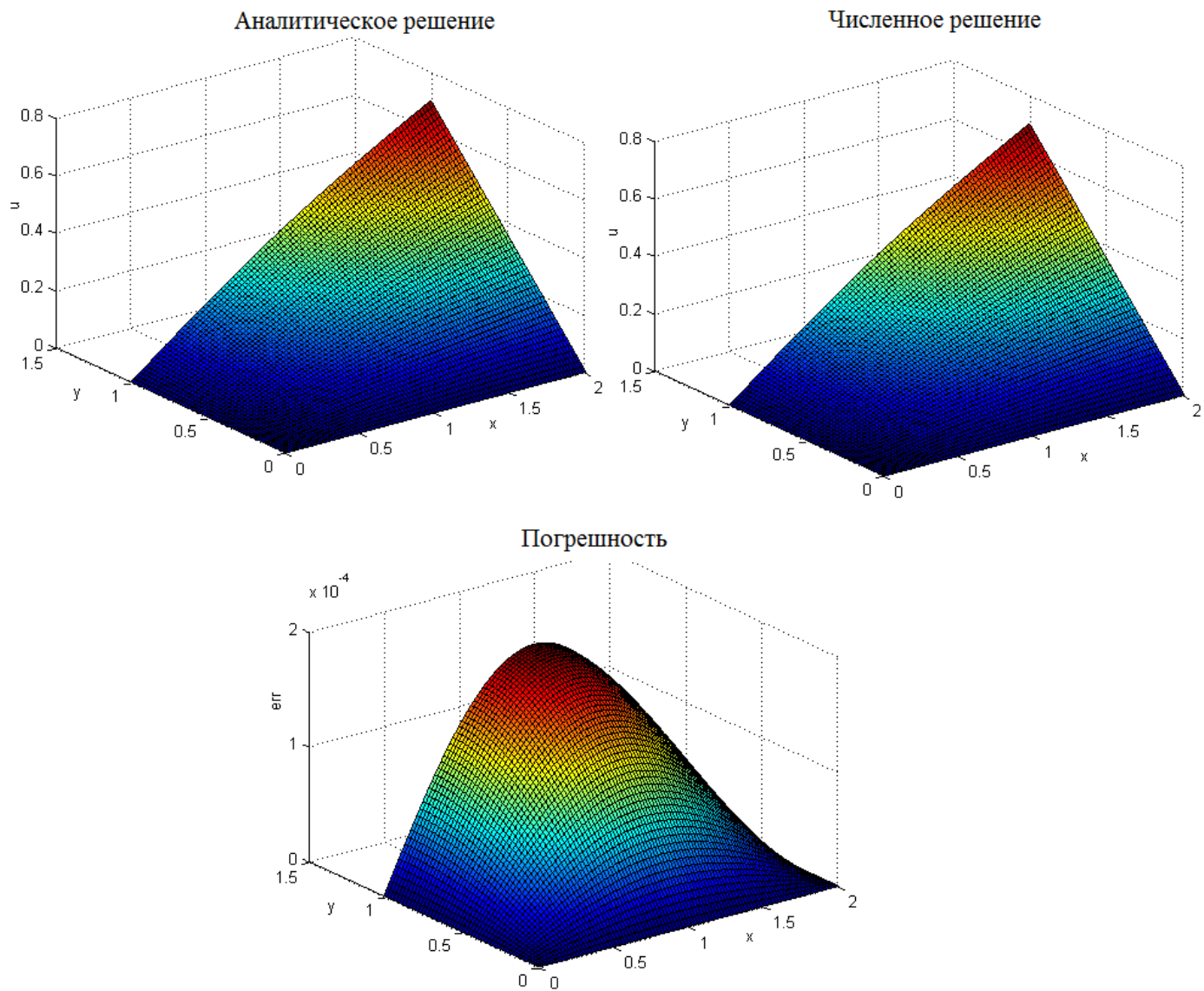


Рис. 5: График аналитического решения задачи (2.1), ее численного решения с помощью эволюционно-факторизованной схемы, а также погрешности в момент времени $t = 0.3451$ (соответствует $j = 50$)

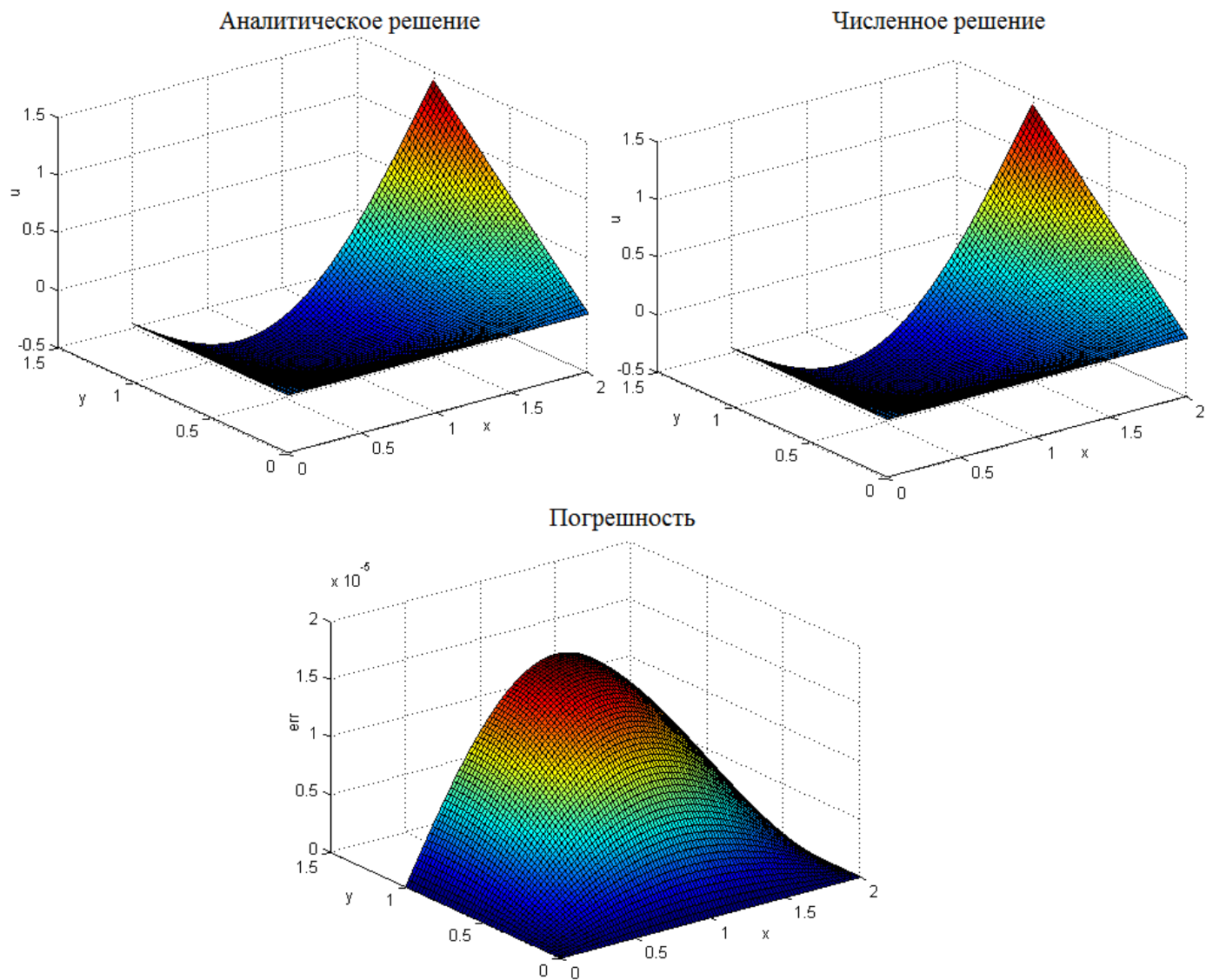


Рис. 6: График аналитического решения задачи (2.1), ее численного решения с помощью эволюционно-факторизованной схемы, а также погрешности в момент времени $t = 0.6972$ (соответствует $j = 100$)

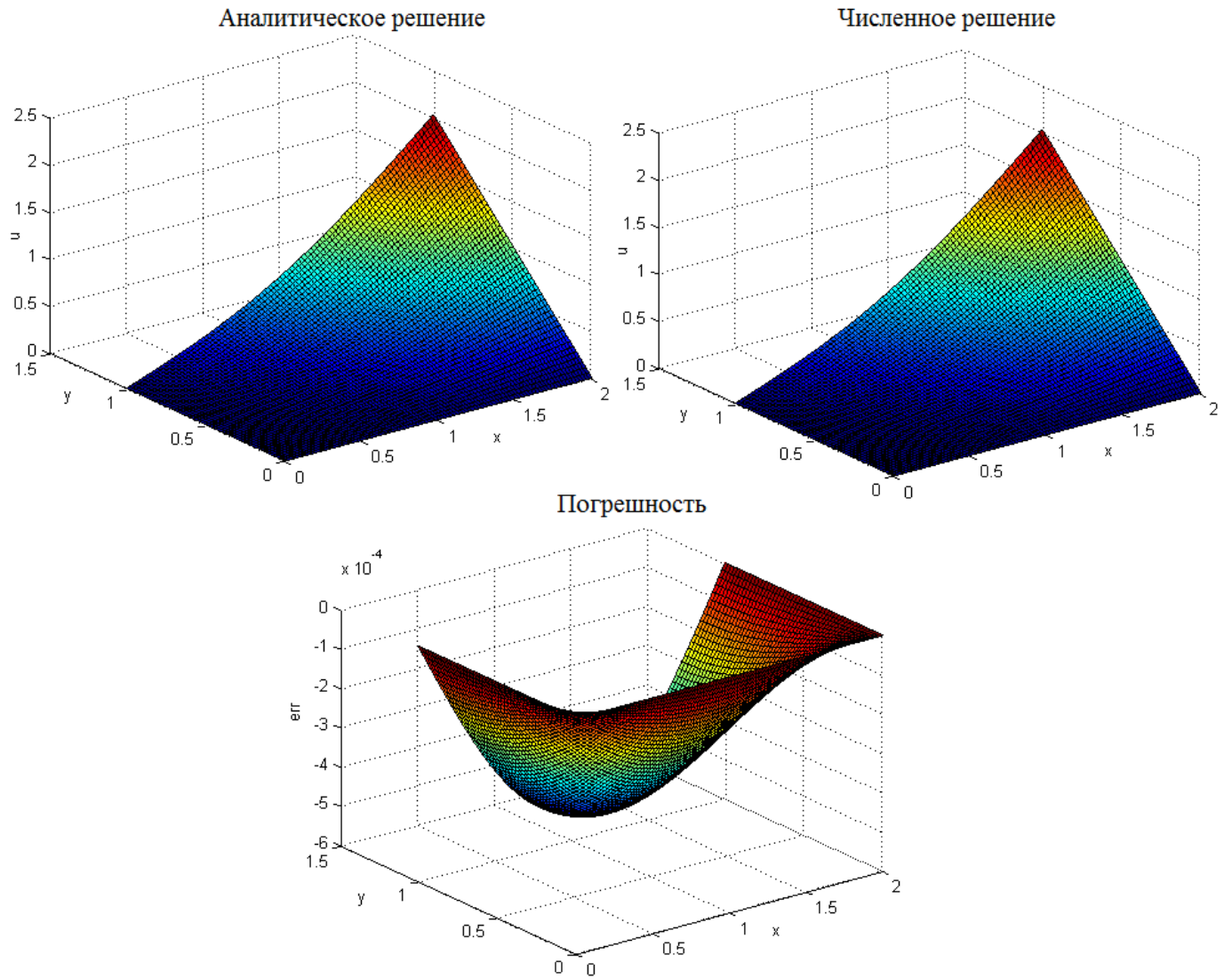


Рис. 7: График аналитического решения задачи (2.1), ее численного решения с помощью эволюционно-факторизованной схемы, а также погрешности в момент времени $t = 1$ (соответствует $j = J = 143$)

3 Задания для самостоятельного решения

Решите начально-краевую задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + 2(x + y), \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 1), \quad t \in (0, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t^2(1 + y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = t^2, \quad u|_{y=1} = t^2(x + 1), \\ u|_{t=0} = 5 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{2}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \end{array} \right.$$

аналитически и численно с помощью схемы крест и эволюционно-факторизованной схемы.

Сравните результаты.