Лекция 3
ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ

§ 1. Гладкость гармонических функций

Справедлива следующая важная теорема:
Теорема 1. *Если* $u(x) \in \mathbb{C}(U)$ *обладает свойством* (**??**):

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{B(x,r)} u(y)\, dy$$

для каждого шара $B(x,r) \subset U$, *то* $u(x) \in \mathbb{C}^\infty(U)$.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\omega(x)$ — это функция «шапочка» следующего вида:

$$\omega(x) = a \begin{cases} \exp\left(-1/(1-|x|^2)\right), & \text{при} \quad |x| \leqslant 1; \\ 0, & \text{при} \quad |x| > 1; \end{cases}$$

где константа $a > 0$ выбирается таким образом, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(x)\, dx = 1.$$

Пусть

$$U_\varepsilon = \{x \in U |\ \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}.$$

Шаг 2. Введем следующую функцию:

$$u_\varepsilon(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_U \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy.$$

Учитывая формулу (**??**), мы получим [1]) следующую цепочку выражений:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{B(x,\varepsilon)} \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy =$$

---

[1]) Реально интегрирование ведется по шару $B(x, \varepsilon.)$

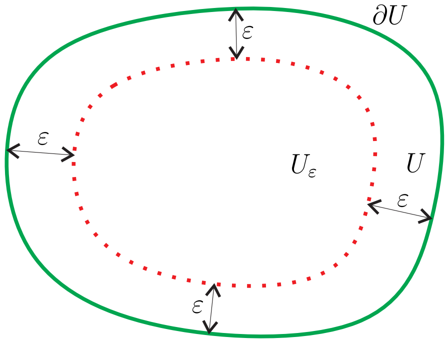

Рис. 1. Область U_ε.

$$= \frac{1}{\varepsilon^N}\int\limits_0^\varepsilon \omega\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int\limits_{\partial B(x,r)} u(z)\,dS_z\right) dr = \frac{1}{\varepsilon^N}u(x)\int\limits_0^\varepsilon \omega\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\omega_N r^{N-1}\,dr =$$

$$= u(x)\frac{1}{\varepsilon^N}\int\limits_{B(0,\varepsilon)}\omega\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right) dy = u(x), \quad (1.1)$$

где мы воспользовались известной формулой коплощади [**?**]

$$\int\limits_{B(x,\varepsilon)} f(y)\,dy = \int\limits_0^\varepsilon\left(\int\limits_{\partial B(x,r)} f(z)\,dS_z\right) dr.$$

Шаг 3. Теперь заметим, что $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}^\infty(U_\varepsilon)$. Значит, в силу (1.1) имеем $u(x) \in \mathbb{C}^\infty(U_\varepsilon)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

§ 2. Локальные оценки для гармонических функций

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 2. *Пусть функция $u(x)$ гармоническая в U. Тогда*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{c_k}{r^{N+k}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \quad (2.1)$$

для любых шара $B(x_0,r) \subset U$ и мультииндекса α длины $|\alpha| = k$. Здесь

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}, \quad c_0 = \frac{N}{\omega_N}, \quad c_k = \frac{N(2^{N+1}Nk)^k}{\omega_N} \quad (2.2)$$

при $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем (2.1), (2.2) индукцией по k. Случай $k = 0$ сразу следует из формулы о среднем (**??**). В случае $k = 1$, дифференцируя уравнение Лапласа, получим

$$\Delta u_{x_i} = 0 \quad \text{в} \quad U,$$

поскольку в силу теоремы 1 имеем $u(x) \in \mathbb{C}^\infty(U)$. Следовательно, функция u_{x_i} является гармонической при $i = \overline{1, N}$. Значит,

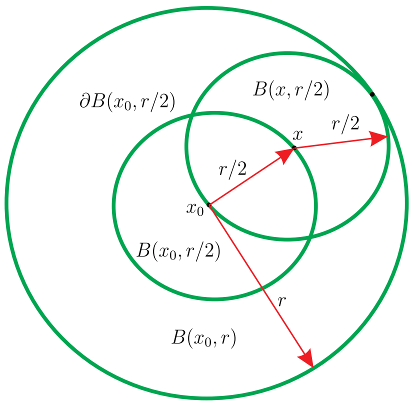

Рис. 2. Шары $B(x_0, r/2)$, $B(x, r/2)$ и $B(x_0, r)$.

$$\begin{aligned}
|u_{x_i}(x_0)| = \left| \frac{N2^N}{\omega_N r^N} \int\limits_{B(x_0, r/2)} u_{x_i}(x)\, dx \right| = \\
= \left| \frac{N2^N}{\omega_N r^N} \int\limits_{\partial B(x_0, r/2)} u(y) n_{yi}\, dS_y \right| \leqslant \\
\leqslant \frac{N2^N}{\omega_N r^N} \sup_{y \in \partial B(x_0, r/2)} |u(y)| \omega_N \left(\frac{r}{2}\right)^{N-1} |n_{yi}| \leqslant \\
\leqslant \frac{2N}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r/2))}. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Заметим, что если $x \in \partial B(x_0, r/2)$, то $B(x, r/2) \subset B(x_0, r) \subset U$ (см. рисунок 14). Поэтому

$$|u(x)| \leqslant \frac{N}{\omega_N} \left(\frac{2}{r}\right)^N \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \quad (2.4)$$

в силу (2.1), (2.2) при $k = 0$. Комбинируя неравенства (2.3), (2.4) находим

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{2^{N+1}N^2}{\omega_N}\frac{1}{r^{N+1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \quad \text{при} \quad |\alpha| = 1. \tag{2.5}$$

Таким образом, (2.1), (2.2) справедливы при $k = 1$.

Шаг 2. Предположим, что $k \geqslant 2$ и формулы (2.1), (2.2) справедливы для всех шаров, лежащих в U, и мультииндексов длины, меньшей или равной $k-1$. Фиксируем $B(x_0, r) \subset U$. Пусть α — это мультииндекс длины $|\alpha| = k$. Тогда

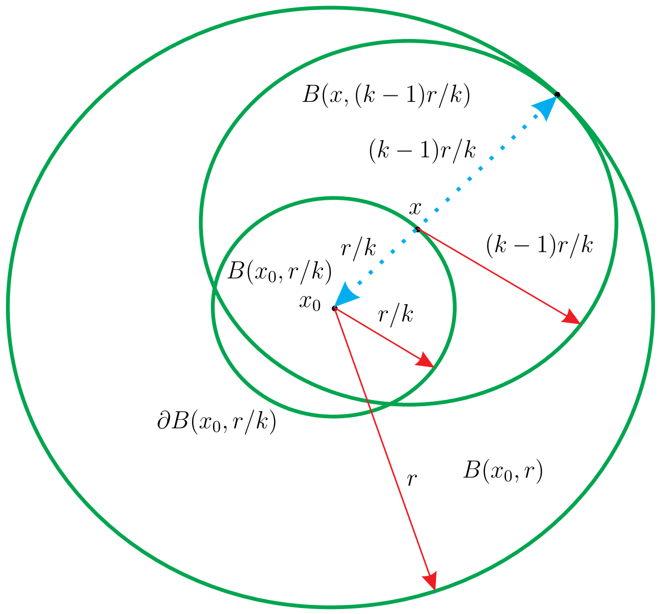

Рис. 3. Шары $B(x_0, r/k)$, $B(x, r(k-1)/k)$ и $B(x_0, r)$.

$$D^\alpha u(x) = (D^\beta u(x))_{x_i} \quad \text{для некоторого} \quad i \in \{1, ..., N\}, \quad |\beta| = k-1.$$

Проводя вычисления, подобные проведенным (2.3), получаем оценку

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{Nk}{r}\|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,r/k))}. \tag{2.6}$$

Если $x \in \partial B(x_0, r/k)$, то (см. рисунок 15)

$$B\left(x, \frac{k-1}{k}r\right) \subset B(x_0, r) \subset U.$$

Таким образом, из (2.1), (2.2) при $k-1$ следует оценка

$$|D^\beta u(x)| \leqslant \frac{N\left(2^{N+1}N(k-1)\right)^{k-1}}{\omega_N\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{N+k-1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}. \tag{2.7}$$

Следовательно, из оценок (2.6) и (2.7)

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{N\left(2^{N+1}Nk\right)^k}{\omega_N r^{N+k}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))},$$

из которой вытекают оценки (2.1), (2.2) при $|\alpha| = k$.

Теорема доказана.

Следствием этой теоремы является следующая важная и интересная теорема:

Теорема Лиувилля. *Пусть $u(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ является гармонической и ограниченной. Тогда $u(x) = const$.*

Доказательство.

Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $r > 0$ и применим теорему 2 к шару $B(x_0, r)$:

$$|Du(x_0)| \leqslant \frac{c_1\sqrt{N}}{r^{N+1}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \leqslant \frac{\omega_N c_1}{\sqrt{N}\,r}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \to +0$$

при $r \to +\infty$. Тогда $Du = 0$. Следовательно, $u(x)$ — это константа.

Теорема доказана.

В свою очередь важным следствием теоремы Лиувилля является следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ при $N \geqslant 3$. Тогда любое ограниченное решение уравнения*

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N \tag{2.8}$$

имеет вид

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(x-y)f(y)\,dy + c, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где c — это константа.

Доказательство.

Прежде всего заметим, что поскольку $\mathcal{E}_N(x) \to +0$ при $|x| \to +\infty$, то функция

$$\widetilde{u}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(x-y)f(y)\,dy$$

является ограниченным решением уравнения Пуассона (2.8). Если $u(x)$ — это другое ограниченное решение уравнения (2.8), то функция $w(x) = \widetilde{u}(x) - u(x)$ является ограниченной гармонической функцией в $\mathbb{R}^N$. Следовательно, по теореме Лиувилля имеем

$$w(x) = const.$$

Теорема доказана.

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть $u(x)$ гармоническая в области U с гладкой границей ∂U. Предположим, что эта функция

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in U_0 \subset U,$$

где $U_0 \neq \varnothing$ и открыто. Тогда

$$u(x) \equiv 0 \quad \text{в} \quad U.$$

Решение. Разобьем область U на три непересекающиеся части

$$U = U_1 \cup U_2 \cup U_3,$$

где

$$U_1 = \{x \in U : \; u(x) = 0\} \supset U_0,$$
$$U_2 = \{x \in U : \; u(x) > 0\}, \quad U_3 = \{x \in U : \; u(x) < 0\}.$$

Заметим, что

$$\mathrm{int} U_1 \supset U_0,$$

причем граница $\partial\overline{\mathrm{int} U_1}$ замыкания открытого множества $\mathrm{int} U_1$ <u>не может граничить</u> со множествами U_2 и U_3.

$\square$ Действительно, пусть найдется точка $x_0 \in \partial\overline{\mathrm{int} U_1}$ и некоторый шар $B(x_0, \varepsilon)$ имеет непустое пересечение, например, со множеством U_2 при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и при этом не пересекается со множеством U_3. Тогда функция $u(x)$ гармоническая в $B(x_0, \varepsilon)$, причем

$$u(x) = 0 \quad \text{в} \quad B(x_0, \varepsilon) \cap \mathrm{int} U_1 \quad \text{и} \quad u(x) > 0 \quad \text{в} \quad B(x_0, \varepsilon) \cap \mathrm{int} U_2$$

и по построению

$$B(x_0, \varepsilon) = (B(x_0, \varepsilon) \cap \mathrm{int} U_1) \cup (B(x_0, \varepsilon) \cap \mathrm{int} U_2).$$

Но это противоречит принципу максимума. Это означает, что открытое множество $\mathrm{int} U_1$ не может граничить с открытыми множествами U_2 и U_3. $\boxtimes$

Следовательно,

$$\overline{\mathrm{int} U_1} \cap \left(\overline{U_2 \cup U_3}\right) = \varnothing.$$

Однако,

$$\partial\overline{U_2 \cup U_3} \subset U_1.$$

В силу связности U приходим к выводу о том, что

$$U_2 = U_3 = \varnothing.$$

Задача 2. Найти все гармонические в $\mathbb{R}^3$ функции, принадлежащие $L^2(\mathbb{R}^3)$.

З а м е ч а н и е 1. Мы предложим два решения этой задачи. [1])

Р е ш е н и е. С п о с о б 1 . [2]) Решение проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Известно, что классическое решение $v_R(r,\vartheta,\varphi)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре радиуса R представимо в виде равномерно (в этом шаре) сходящегося ряда (сингулярные члены заведомо отбросили!)

$$v_R(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{n} P_n^{(m)}(\cos\vartheta)(A_{nm}^R \cos m\varphi + B_{nm}^R \sin m\varphi), \quad (3.1)$$

причем коэффициенты разложения могут быть найдены (однозначно!) по формулам

$$B_{n0}^a = 0, \quad n\in\mathbb{Z}_+, \quad (3.2)$$

$$A_{nm}^a = \frac{1}{a^n \|P_n^{(m)}\|^2 \|\cos m\varphi\|^2} \int_\Omega d\sigma\, f(\vartheta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\cos m\varphi, \quad (3.3)$$

$$B_{nm}^a = \frac{1}{a^n \|P_n^{(m)}\|^2 \|\sin m\varphi\|^2} \int_\Omega d\sigma\, f(\vartheta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\sin m\varphi, \quad (3.4)$$

при $n\in\mathbb{Z}_+$, $m=0,1,\ldots n$, где

$$f(\vartheta,\varphi)=v_a(a,\vartheta,\varphi), \qquad \int_\Omega d\sigma\ldots = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta\, \sin\vartheta\ldots.$$

Шаг 2. Фиксируем некоторое $a>0$. Тогда, поскольку $u(r,\vartheta,\varphi)$ является, в частности, решением задачи в шаре радиуса a, получим для нее разложение по формуле (3.1):

$$u(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{n} P_n^{(m)}(\cos\vartheta)(A_{nm}^a \cos m\varphi + B_{nm}^a \sin m\varphi) \quad (3.5)$$

при $r\leqslant a$, где

$$B_{n0}^a = 0, \quad n\in\mathbb{Z}_+, \quad (3.6)$$

$$A_{nm}^a = \frac{1}{a^n \|P_n^{(m)}\|^2 \|\cos m\varphi\|^2} \int_\Omega d\sigma\, u(a,\vartheta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\cos m\varphi, \quad (3.7)$$

$$B_{nm}^a = \frac{1}{a^n \|P_n^{(m)}\|^2 \|\sin m\varphi\|^2} \int_\Omega d\sigma\, u(a,\vartheta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\sin m\varphi \quad (3.8)$$

при $n\in\mathbb{Z}_+$, $m=0,1,\ldots n$.

---

[1]) Второй способ нам любезно сообщил А. А. Панин.

[2]) Решение этой задачи было любезно сообщено автору А. А. Паниным с идеей доказательства А. Л. Делицына.

Шаг 3. Фиксируем некоторое $b > a$. Получим для функции $u(r, \vartheta, \varphi)$ представление

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{n} P_n^{(m)}(\cos\vartheta)(A_{nm}^b \cos m\varphi + B_{nm}^b \sin m\varphi) \tag{3.9}$$

при $r \leqslant b$, где

$$B_{n0}^b = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.10}$$

$$A_{nm}^a = \frac{1}{b^n \|P_n^{(m)}\|^2 \|\cos m\varphi\|^2} \int\limits_{\Omega} d\sigma\, u(a, \vartheta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos\vartheta) \cos m\varphi, \tag{3.11}$$

$$B_{nm}^b = \frac{1}{b^n \|P_n^{(m)}\|^2 \|\sin m\varphi\|^2} \int\limits_{\Omega} d\sigma\, u(a, \vartheta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos\vartheta) \sin m\varphi \tag{3.12}$$

при $n \in \mathbb{Z}_+$, $m = 0, 1, \ldots n$.

Шаг 4. В силу вышесказанного ряд (3.9) при $r = a$ представляет $u(a, \vartheta, \varphi)$. Следовательно, можно подставить $r = a$ в оба ряда (3.5) и (3.9) и получить:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sum_{m=0}^{n} P_n^{(m)}(\cos\vartheta)(A_{nm}^a \cos m\varphi + B_{nm}^a \sin m\varphi) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sum_{m=0}^{n} P_n^{(m)}(\cos\vartheta)(A_{nm}^b \cos m\varphi + B_{nm}^b \sin m\varphi), \tag{3.13}$$

откуда в силу единственности разложения на сфере по сферическим гармоникам имеем

$$A_{nm}^a = A_{nm}^b =: A_{nm}, \quad B_{nm}^a = B_{nm}^b =: B_{nm}. \tag{3.14}$$

Следовательно, функция $u(r, \vartheta, \varphi)$ имеет разложение вида (3.1) с коэффициентами, не зависящими от r, в любом шаре, а следовательно, и во всем пространстве.

Шаг 5. При произвольно выбранных допустимых n, m в силу формул (3)—(4) и неравенства Коши—Буняковского имеем

$$(A_{nm} r^n)^2 =$$
$$= \frac{1}{\|P_n^{(m)}\|^2 \|\cos m\varphi\|^2} \left(\int\limits_{\Omega} d\sigma\, u(r, \vartheta, \varphi) P_n(\cos\vartheta) \cos m\varphi \right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega} d\sigma\, u^2(r, \vartheta, \varphi). \tag{3.15}$$

Интегрируя по r, получаем отсюда

$$\int\limits_0^\infty dr\, r^2 (A_{nm} r^n)^2 \leqslant \int\limits_0^\infty dr\, r^2 \int\limits_\Omega d\sigma\, u^2(r,\vartheta,\varphi) = \|u\|^2_{\mathbb{R}^3} < +\infty, \qquad (3.16)$$

что возможно лишь при $A_{nm} = 0$. Аналогично — для B_{nm}.

Решение. Способ 2. Предположим, в какой-то точке M_0 функция u отлична от 0 и равна C. Выберем эту точку в качестве начала координат (что можно сделать, т. к. лапласиан инвариантен относительно сдвигов) и воспользуемся формулой среднего значения:

$$C = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Phi_R} u(R,\vartheta,\varphi)\, dS, \qquad (3.17)$$

где R произвольно, Φ_R — сфера радиуса R с центром в новом начале координат. Тогда в силу неравенства Коши—Буняковского

$$(4\pi R^2)^2 C^2 \leqslant \int\limits_{\Phi_R} u^2(R,\vartheta,\varphi)\, dS \cdot 4\pi R^2, \qquad (3.18)$$

или

$$4\pi R^2 C^2 \leqslant \int\limits_{\Phi_R} u^2(R,\vartheta,\varphi)\, dS \qquad (3.19)$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} C^2\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^\infty dR \int\limits_{\Phi_R} dS\, C^2 = \int\limits_0^\infty dR\, 4\pi R^2 C^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty dR \int\limits_{\Phi_R} dS\, u^2 = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} < +\infty, \qquad (3.20)$$

откуда $C = 0$. В силу произвольности выбранной точки M_0 имеем требуемое утверждение. [1]

Задача 3. Найти все гармонические в $\mathbb{R}^3$ функции, для которых конечен интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2}{(1+|x|)^3}\, dx < +\infty.$$

Решение. Аналогично первому способу решения предыдущей задачи.

[1] Очевидно, что в силу теоремы о среднем значении в N-мерном случае результат задачи можно получить и в $\mathbb{R}^N$.

Задача 4. Пусть для гармонической во всем пространстве $\mathbb{R}^N_x$ функции при любом $x \in \mathbb{R}^N_x$ выполнено неравенство

$$u(x) \geqslant -c_1,$$

где $c_1 > 0$ — постоянная. Тогда $u(x) = const$.

Решение. Рассмотрим следующую функцию:

$$v(x) \stackrel{def:}{=} u(x) + c_1 > 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N_x$$

и функция $v(x)$ является гармонической в $\mathbb{R}^N_x$. Согласно теоремы о среднем значении для гармонической функции [1])

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}$$

при любом $R > 0$ и для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^N_x$ имеем:

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial x_j} = \\ = \frac{1}{\alpha_N R^N} \int\limits_{B(x_0,R)} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\, dx = \frac{1}{\alpha_N R^N} \int\limits_{\partial B(x_0,R)} v(y) \cos(n_y, e_j)\, ds_y \qquad (3.21)$$

при $j = \overline{1,N}$. Так как $v(x)$ — это положительная функция, то по известной теореме о среднем значении для интеграла имеем

$$\int\limits_{\partial B(x_0,R)} v(y) \cos(n_y, e_j)\, ds_y = \cos(n_{y_0}, e_j) \int\limits_{\partial B(x_0,R)} v(y)\, ds_y, \qquad (3.22)$$

где $y_0 \in \partial B(x_0, R)$ — это некоторая точка. Теперь воспользуемся теоремой о среднем для интеграла по сфере $\partial B(x_0, R)$ и получим следующее равенство:

$$v(x_0) = \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x_0,R)} v(y)\, ds_y. \qquad (3.23)$$

Собирая равенства (3.21)–(3.23), мы приходим к следующей цепочке равенств:

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial x_j} = \frac{\omega_N R^{N-1}}{\alpha_N R^N} \cos(n_{y_0}, e_j) v(x_0) = \\ = \frac{N \cos(n_{y_0}, e_j)}{R} v(x_0) \quad \text{при} \quad j = \overline{1,N} \qquad (3.24)$$

для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^N_x$. Устремляя $R \to +\infty$ мы получим, что $v(x) = const$. Следовательно, $u(x) = const$.

[1]) Производная гармонической в области функции является гармонической функцией.

Задача 5. Найти все гармонические в $\mathbb{R}^2$ функции $u(x, y)$, для которых

$$u_x(x, y) < u_y(x, y) \quad \text{для всех} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Решение. Прежде всего заметим, что производные гармонической функции в области $\mathbb{R}^2$ — тоже гармонические функции. Поэтому функция $u_y(x, y) - u_x(x, y)$ является гармонической функцией в $\mathbb{R}^2$, причем

$$u_y(x, y) - u_x(x, y) > 0 \quad \text{для всех} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

В силу предыдущей задачи имеем в этом случае

$$u_y(x, y) - u_x(x, y) = c \quad \text{для всех} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.25}$$

где $c \geqslant 0$ — это постоянная. Наша задача теперь решить уравнение в частных производных первого порядка (3.25). Воспользуемся с этой целью уравнениями характеристик:

$$-dx = dy = \frac{du}{c}.$$

Эта система имеет два независимых первых интеграла

$$x + y = c_1, \quad u + cx = c_2,$$

т. е. решение имеет вид

$$u = -cx + \varphi(x + y)$$

с произвольной гармонической функцией φ. Таким образом,

$$0 = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 2\varphi'' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(x + y) = k_1(x + y) + k_2 \Rightarrow u(x, y) = m_1 x + m_2 y + m_3.$$

Так как $u_x < u_y$, то $m_1 < m_2$.

Задача 6. Получить аналог теоремы Лиувилля для классических решений нелинейного уравнения

$$\Delta u(x) = |u(x)|^p \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad p > 1, \quad N \geqslant 2. \tag{3.26}$$

Решение. Прежде всего введем следующую пробную функцию:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| \leqslant 1; \\ 0, & \text{если} \quad |x| \geqslant 2, \end{cases} \tag{3.27}$$

причем $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Такая пробная функция существует. По этой пробной функции введем следующую функцию:

$$\varphi_R(x) \stackrel{def:}{=} \varphi\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad R > 1. \tag{3.28}$$

Будем рассматривать классические решения $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N) \subset$ $\subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ уравнения (3.26). Умножим обе части уравнения (3.26) на пробную функцию (3.28) и проинтегрируем по частям, в результате получим соответствующие равенства:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x)\varphi_R(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)\Delta\varphi_R(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx. \quad (3.29)$$

Все рассматриваемые интегралы существуют в смысле Римана, поскольку носитель функции $\varphi_R(x)$ компактный. Воспользуемся теперь неравенством Гельдера с параметрами

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, \quad q_1 = p, \quad q_2 = p' = \frac{p}{p-1},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)\Delta\varphi_R(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R^{1/p}(x)u(x)\frac{\Delta\varphi_R(x)}{\varphi_R^{1/p}(x)}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx\right)^{1/p'} \quad (3.30)$$

Из (3.29) и (3.30) вытекают неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx\right)^{1/p'} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx + \frac{1}{p'}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{p}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \leqslant \frac{1}{p'}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx, \quad (3.31)$$

где мы воспользовались арифметическим неравенством Гельдера

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^{q_1}}{q_1} + \frac{b^{q_2}}{q_2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, \quad a, b \geqslant 0,$$

а также тем, что

$$1-\frac{1}{p}=\frac{1}{p^{'}},\quad p>1.$$

Рассмотрим правую часть итогового неравенства в (3.31). Сделаем замену переменных в нем

$$\xi=\frac{x}{R},\quad x\in\mathbb{R}^N$$

и получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p^{'}}}{\varphi_R^{p^{'}/p}(x)}\,dx=c_1R^{N-2p^{'}},\tag{3.32}$$

$$c_1=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\left|\Delta_\xi\varphi(|\xi|^2)\right|^{p^{'}}}{\varphi^{p^{'}/p}(|\xi|^2)}\,d\xi=\int\limits_{1\leqslant|\xi|^2\leqslant 2}\frac{\left|\Delta_\xi\varphi(|\xi|^2)\right|^{p^{'}}}{\varphi^{p^{'}/p}(|\xi|^2)}\,d\xi,$$

поскольку $\varphi(|\xi|^2)=1$ при $|\xi|\leqslant 1$ и $\varphi(|\xi|^2)=0$ при $|\xi|\geqslant 2$. Отметим, что существует функция $\varphi=\varphi(s)$, для которой $0<c_1<+\infty$. Из итогового неравенства (3.31) и равенства (3.32) вытекает следующая оценка:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx\leqslant c_1R^{N-2p^{'}}\to+0\tag{3.33}$$

при условии

$$N<2p^{'}\Rightarrow 1<p<p_{kr}=\begin{cases}+\infty, & \text{если}\quad N=2;\\ N/(N-2), & \text{если}\quad N\geqslant 3.\end{cases}$$

Итак, при $p\in(1,p_{kr})$ в силу теоремы Беппо Леви приходим при $R\to\to+\infty$ к равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^p\,dx=0\Rightarrow u(x)=0.$$

Таким образом, получен аналог теоремы Лиувилля в нелинейном случае. Заметим, что при $p>p_{kr}$ есть результаты о существовании нетривиальных решений уравнения (3.26) в $\mathbb{R}^N$.