Лекция 2

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 1. Сильный принцип максимума

Следствием теоремы о среднем является, в частности, принцип максимума для уравнения Лапласа в ограниченной области U.

Теорема 1. *Пусть функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$ гармоническая внутри U. Тогда*

$$\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x); \tag{1.1}$$

если U связно и существует точка $x_0 \in U$ такая, что

$$u(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} u(x),$$

то $u(x)$ постоянна внутри U. Кроме того,

$$\min_{x \in \overline{U}} u(x) = \min_{x \in \partial U} u(x); \tag{1.2}$$

если U связно и существует точка $x_0 \in U$ такая, что

$$u(x_0) = \min_{x \in \overline{U}} u(x),$$

то $u(x)$ постоянна внутри U.

Доказательство. Докажем соответствующие утверждения для максимума. Утверждения для минимума доказываются аналогичным образом и мы предлагаем доказать их студентам.

Шаг 1. Предположим, что существует точка $x_0 \in U$ такая, что

$$u(x_0) = M \stackrel{def:}{=} \max_{x \in \overline{U}} u(x).$$

Тогда при

$$0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$$

по теореме о среднем для любого такого $r > 0$ имеем

$$M = u(x_0) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{B(x_0,r)} u(y)\, dS_y. \tag{1.3}$$

Предположим, что найдется такая точка $x_1 \in B(x_0, r)$, в которой

$$u(x_1) < M.$$

Поскольку $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{U}) \subset \mathbb{C}(\overline{B(x_0, r)})$, то найдется такой шар $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$, в котором

$$u(x) < M - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in B(x_1, r_1)$$

при некотором малом $\varepsilon > 0$. В силу формулы (1.3) имеет место цепочка выражений

$$M = u(x_0) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{B(x_0,r)} u(y)\, dS_y =$$

$$= \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{B(x_1,r_1)} u(y)\, dS_y + \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{B(x_0,r)\setminus B(x_1,r_1)} u(y)\, dS_y \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha_N r_1^N}{\alpha_N r^N}(M - \varepsilon) + M\frac{\alpha_N (r^N - r_1^N)}{\alpha_N r^N} = M - \left(\frac{r_1}{r}\right)^N \varepsilon.$$

Отсюда вытекает противоречивые неравенства

$$0 < \varepsilon \leqslant 0.$$

Значит,

$$u(x) = M \quad \text{для всех} \quad x \in B(x_0, r).$$

Шаг 2. Введем следующее множество:

$$U_M \stackrel{def:}{=} \{x \in U :\ u(x) = M\}.$$

В силу (1.3) имеем множество U_M открыто, поскольку вместе с каждой своей точкой $x_0 \in U_M$ содержит малый шар $B(x_0, r)$. С другой стороны, пусть

$$\{x_n\} \subset U_M \quad \text{и} \quad |x_n - x_0| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поскольку $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{U})$, то

$$|u(x_n) - u(x_0)| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поэтому имеем

$$u(x_n) = M \Rightarrow u(x_0) = M \Rightarrow x_0 \in U_M.$$

Следовательно, множество U_M одновременно относительно замкнуто и относительно открыто в U. Поскольку U связно, то $U_M = U$.

Шаг 3. Таким образом, либо точка x_0, в которой достигается максимум, принадлежит U и функция $u(x) = u(x_0)$ — постоянна в U либо $x_0 \in \partial U$. В обоих случаях имеет место равенство (1.1).

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Прямым следствием этого принципа максимума является следующее утверждение:

С л е д с т в и е. *Пусть функция* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$ *гармоническая внутри области* U. *Тогда*

$$\max_{x \in \overline{U}} |u(x)| = \max_{x \in \partial U} |u(x)|. \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть

$$M = \max_{x \in \partial U} |u(x)|.$$

Рассмотрим две функции

$$v_1(x) := u(x) - M, \quad v_2(x) := u(x) + M.$$

Ясно, что

$$v_1(x) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad v_2(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial U.$$

В силу принципа максимума имеем

$$v_1(x) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad v_2(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in U.$$

Итак,

$$-M \leqslant u(x) \leqslant M \quad \text{при} \quad x \in U \Rightarrow |u(x)| \leqslant M \Rightarrow \max_{x \in \overline{U}} |u(x)| = \max_{x \in \partial U} |u(x)|.$$

С л е д с т в и е д о к а з а н о.

Важным следствием из принципа максимума является теорема единственности решения задачи Дирихле.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $g(x) \in \mathbb{C}(\partial U)$ *и* $f(x) \in \mathbb{C}(U)$. *Тогда существует не более одного решения* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$ *краевой задачи Дирихле*

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad U, \quad u(x) = g(x) \quad \text{на} \quad \partial U. \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — это два решения краевой задачи (1.5). Тогда функция $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ будет решением соответствующей однородной задачи, а тогда в силу следствия к теореме 1 мы получим, что

$$\max_{x \in \overline{U}} |u(x)| = \max_{x \in \partial U} |u(x)| = 0 \Rightarrow u_1(x) = u_2(x) \quad \text{при} \quad x \in U.$$

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Наконец, справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а 3. *Гармоническая в* U *функция* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$, *отличная от постоянной, при любом* $x \in U$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{y \in \partial U} u(y) < u(x) < \max_{y \in \partial U} u(y). \tag{1.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Это прямое следствие теоремы 1. Действительно, если найдется такие точки $x_1, x_2 \in U$, в которых достигается минимум и максимум функции $u(x)$, соответственно, то функция равна постоянной, что противоречит нашим предположениям.

Теорема доказана.

Кроме того, имеет место следующее важное утверждение в случае ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^N$:

Лемма 1. *Пусть функция* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$ *и пусть* $\Delta u(x) \geqslant 0$ *в* U. *Тогда для любой точки* $x \in U$

$$u(x) \leqslant \max_{y \in \partial U} u(y). \tag{1.7}$$

Пусть функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$ *и пусть* $\Delta u(x) \leqslant 0$ *в* U. *Тогда для любой точки* $x \in U$

$$u(x) \geqslant \min_{y \in \partial U} u(y). \tag{1.8}$$

Доказательство.

Шаг 1. Докажем сначала неравенство (1.7). Прежде всего, поскольку $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{U})$ и область U ограниченна, получим, что найдется постоянная

$$c_1 > \max_{x \in \overline{U}} |u(x)|.$$

Поэтому функция

$$u(x) + c_1 > 0 \quad \text{при} \quad x \in U$$

и для этой функции выполнены все условия теоремы. Поэтому без ограничения общности будем считать, что

$$u(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in U.$$

Шаг 2. Пусть

$$v(x) \stackrel{def:}{=} \frac{u(x)}{1 - \varepsilon|x|^2}, \quad \varepsilon = const > 0. \tag{1.9}$$

Поскольку область U ограничена, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$1 - \varepsilon|x|^2 > 0 \quad \text{при} \quad x \in U.$$

Заметим, что имеет место выражение

$$0 \leqslant \Delta u(x) = (1 - \varepsilon|x|^2)\Delta v(x) - 4\varepsilon \sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} - 2\varepsilon N v(x). \tag{1.10}$$

Шаг 3. Если $v(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x_0 \in U$, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x_j^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial v(x_0)}{\partial x_j} = 0, \quad v(x_0) = u(x_0)(1 - \varepsilon|x_0|^2) > 0 \tag{1.11}$$

при $j = \overline{1, N}$. Поэтому мы приходим в противоречие с неравенством (1.10), поскольку в силу (1.11) получим

$$(1 - \varepsilon|x|^2)\Delta v(x) - 4\varepsilon \sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} - 2\varepsilon N v(x) < 0.$$

Поэтому для любой точки $x \in U$ выполнено неравенство

$$v(x) \leqslant \max_{y \in \partial U} v(y) \Rightarrow \frac{u(x)}{1 - \varepsilon|x|^2} \leqslant \max_{y \in \partial U} \frac{u(y)}{1 - \varepsilon|y|^2}.$$

Устремляя $\varepsilon \to +0$ в последнем неравенстве, мы получим неравенство (1.7).

Шаг 4. Если $\Delta u(x) \leqslant 0$, то $\Delta\left(-u(x)\right) \geqslant 0$ и, следовательно, по доказанному имеем

$$-u(x) \leqslant \max_{y \in \partial U}\left(-u(y)\right) \Rightarrow u(x) \geqslant -\max_{y \in \partial U}\left(-u(y)\right) = \min_{y \in \partial U} u(y),$$

что доказывает неравенство (1.8).

Лемма доказана.

Следствие. *Если в условиях леммы имеют место соответствующие строгие неравенства*

$$\Delta u(x) > 0 \quad \textit{или} \quad \Delta u(x) < 0 \quad \textit{при} \quad x \in U, \tag{1.12}$$

то будут иметь место соответствующие строгие неравенства

$$u(x) < \max_{y \in \partial U} u(y) \quad \textit{или} \quad u(x) > \min_{y \in \partial U} u(y) \quad \textit{при} \quad x \in U. \tag{1.13}$$

Доказательство.

Действительно, пусть, например, $\Delta u(x) > 0$ при $x \in U$. Тогда согласно результату леммы 1 имеет место неравенство (1.7). Предположим, что существует точка $x_0 \in U$, в которой достигается равенство в неравенстве (1.7). Но тогда в этой точке максимума выполнено неравенство

$$\Delta u(x_0) \leqslant 0,$$

что противоречит неравенству $\Delta u(x) > 0$ при $x \in U$.

Следствие доказано.

Замечание 1. Заметим, что для неограниченных областей $U \subset \mathbb{R}^N$ естественная переформулировка, например, следствия из принципа максимума, т. е. равенства (1.4)

$$\max_{x \in \overline{U}} |u(x)| = \max_{x \in \partial U} |u(x)|, \tag{1.14}$$

вообще говоря, не имеет места. Достаточно привести следующий пример:

ПРИМЕР 1. Пусть $N \geqslant 2$ и

$$U = \left\{(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N : \, -\frac{\pi}{2} < x_N < \frac{\pi}{2}\right\},$$

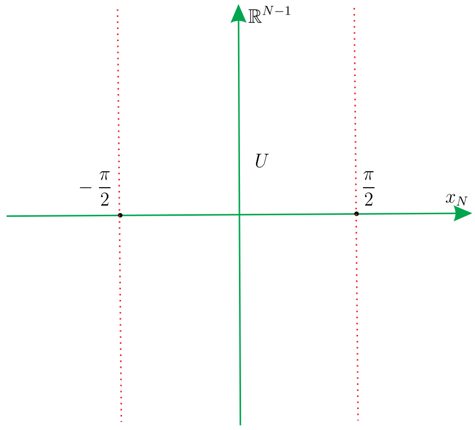

Рис. 1. Область U.

Функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$ гармоническая в области U удовлетворяет граничным условиям

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial U \stackrel{def:}{=} \left\{ (x_1, ..., x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad x_N = \pm\frac{\pi}{2} \right\}.$$

Решением этой задачи является следующая неограниченная функция:

$$u(x) = \cos(x_N) v(x_1, ..., x_{N-1}),$$

где

$$v(x_1, ..., x_{N-1}) = \exp\left(\frac{x_1}{\sqrt{N-1}}\right) \cdots \exp\left(\frac{x_{N-1}}{\sqrt{N-1}}\right).$$

Этот пример подсказывает нам, что в классе ограниченных функций утверждение все таки имеет место.

§ 2. Лемма Олейник–Хопфа о знаке косой производной на границе шара

Теперь мы можем доказать *лемму Олейник–Хопфа* о знаке косой производной в точке минимума.

Л е м м а О л е й н и к – Х о п ф а. *Пусть гармоническая в шаре $B(x_0, R)$ функция $u(x) \not\equiv const$, $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{B(x_0, R)})$ и пусть $u(x)$ принимает наименьшее значение в точке $x_1 \in \partial B(x_0, R)$. Если в точке x_1 существует производная*

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \tau},$$

где τ — направление, образующее острый угол β с внешней нормалью n_x к $\partial B(x_0, R)$ в точке x_1, то

$$\frac{\partial u(x_1)}{\partial \tau} < 0. \tag{2.1}$$

Доказательство.

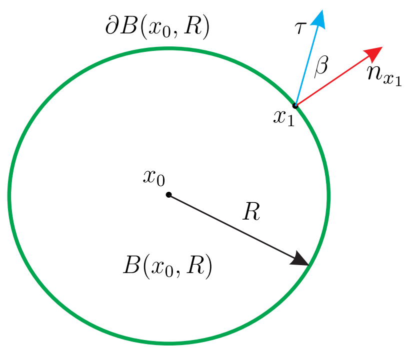

Рис. 2. Поле τ внешних направлений.

Шаг 1. В области

$$U \overset{def:}{=} B(x_0, R) \backslash \overline{B(x_0, R/2)}$$

введем функцию

$$w(x) = |x - x_0|^{2-N} - R^{2-N} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,$$

$$w(x) = \ln \frac{1}{|x - x_0|} - \ln \frac{1}{R} \quad \text{при} \quad N = 2.$$

Прежде всего заметим, что

$$\Delta w(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in U.$$

Шаг 2. Введем следующую функцию:

$$v(x) \overset{def:}{=} u(x) - u(x_1) - \varepsilon w(x).$$

Прежде всего заметим, что эта функция неотрицательна на границе $\partial U = \partial B(x_0, R) \cup \partial B(x_0, R/2)$ области U при достаточно малом $\varepsilon > 0$. $\square$ Действительно,

$$w(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial B(x_0, R) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v(x) = u(x) - u(x_1) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial B(x_0, R). \tag{2.2}$$

Кроме того, понятно, что

$$\Delta\left(u(x) - u(x_1)\right) = 0 \quad \text{в} \quad B(x_0, R), \tag{2.3}$$

поэтому в силу (2.2) и (2.3) из формулы (1.8) леммы 1 получим, что

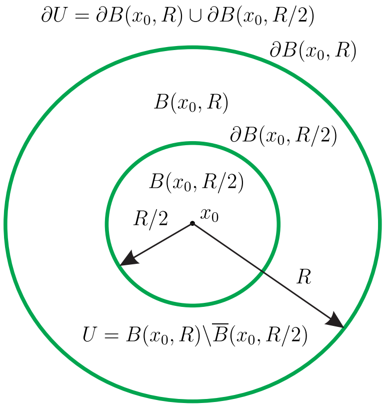

Рис. 3. Область U и ее граница ∂U.

$$u(x) - u(x_1) > 0 \quad \text{в} \quad B(x_0, R) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(x) - u(x_1) \geqslant a > 0 \quad \text{на} \quad \partial B(x_0, R/2).$$

Поэтому

$$v(x) \geqslant a - \varepsilon w(x) > 0 \quad \text{на} \quad \partial B(x_0, R/2)$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$. ⊠

Шаг 3. Поэтому в силу того, что

$$\Delta v(x) = 0 \quad \text{в} \quad U \quad \text{и} \quad v(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial U$$

и леммы 1 вытекает, что

$$v(x) \geqslant \min_{y \in \partial U} v(y) = 0.$$

Таким образом, $v(x) \geqslant 0$ в U и $v(x_1) = 0$. Поэтому

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial \tau} \leqslant 0. \tag{2.4}$$

□ Действительно, напомним определение производной по внутреннему направлению τ_1 к точке $x_1 \in \partial U$ минимума функции $v(x)$. Рассмотрим луч, проходящий через точку $x_1 \in \partial U$ и параллельный внутреннему направлению

$$\tau_1 = \left(\cos\beta_{x_{1,1}}, ..., \cos\beta_{x_{1,N}}\right), \quad \sum_{j=1}^{N} \cos^2\beta_{x_{1,j}} = 1.$$

Тогда производная функции $v(x)$ по внутреннему направлению τ_1 определяется следующим образом:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau_1} := \lim_{0 < \lambda \to 0} \frac{v(x_1 + \lambda\tau_1) - v(x_1)}{\lambda} \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Отсюда сразу же вытекает, что для внешнего направления $\tau = -\tau_1$ получим противоположное неравенство (2.4). ⊠

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial \tau} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x_1)}{\partial \tau} \leqslant \varepsilon \frac{\partial w(x_1)}{\partial \tau} = \\ = -(N-2)\varepsilon R^{1-N} \cos\beta < 0 \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,$$

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial \tau} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x_1)}{\partial \tau} \leqslant \varepsilon \frac{\partial w(x_1)}{\partial \tau} = -\frac{\varepsilon}{R} \cos\beta < 0 \quad \text{при} \quad N = 2,$$

где β — это острый угол между вектором τ и вектором внешней нормали n_{x_1} в точке $x_1 \in \partial B(x_0, R)$.

Лемма доказана.

Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Пуассона.

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad U, \quad \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} = g(y) \quad \text{на} \quad \partial U, \tag{2.6}$$

где $U \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей ∂U, n_y — это поле внешних нормалей в каждой точке $y \in \partial U$.

Пусть $f(x) \in \mathbb{C}(U)$, $g(y) \in \mathbb{C}(\partial U)$. Решение задачи Неймана (2.6) будем рассматривать в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{U})$. Предположим, что каждая точка границы $x_1 \in \partial U$ такова, что существует шар $B(x_0, r) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\right\} \subset U$, для которого $\partial B(x_0, r) \cap \partial U = \{x_1\}$. Далее в третьей тематической лекции мы введем понятие ляпуновских поверхностей $A^{0,h}$. Тогда для выполнения сформулированного условия сферичности изнутри достаточно потребовать, чтобы $\partial U \in A^{0,h}$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Решение задачи Неймана в классе* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{U})$ *при указанных условиях на функции* $f(x)$, $g(y)$ *и границу* ∂U *единственно с точностью до постоянной* [1].

Доказательство.

Пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{U})$ — это какие-то два решения задачи Неймана (2.6). Тогда функция

$$v(x) := u_1(x) - u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{U})$$

— это решение соответствующей однородной задачи

$$\Delta v(x) = 0 \quad \text{в} \quad U, \quad \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} = 0 \quad \text{на} \quad \partial U. \tag{2.7}$$

Предположим, что $v(x) \neq const$. Пусть

$$M := \max_{x \in \partial U} v(x), \quad m := \min_{x \in \partial U} v(x).$$

[1] Т. е. если $u(x)$ — это решение задачи Неймана, то любое другое решение представимо в виде $u(x) + const$.

Поскольку $v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$, то в силу результата теоремы 3 имеет место неравенство

$$m < v(x) < M \quad \text{при} \quad x \in U.$$

Следовательно, функция $v(x)$ принимает наименьшее значение m и наибольшее значение M на границе ∂U. Пусть, например, $x_1 \in \partial U$ — это точка, где гармоническая функция $v(x)$ принимает наименьшее значение. Тогда согласно условие сферичности изнутри границы ∂U найдется такой шар $B(x_0, r) \subset U$ и $\partial B(x_0, r) \cap \partial U = \{x_1\}$. В этом шаре функция $v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(B(x_0, r)) \cap \mathbb{C}(\overline{B(x_0, r)})$ отлична от постоянной и принимает наименьшее значение только в точке $x_1 \in \partial B(x_0, r)$. Следовательно, в этой точке в силу леммы Олейник–Хопфа имеем

$$\frac{\partial v(x_1)}{\partial n_{x_1}} < 0,$$

поскольку n_{x_1} — это внешняя нормаль к границе шара $B(x_0, r)$. Но это противоречит равенству

$$\frac{\partial v(y)}{\partial n_y} = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \partial U.$$

Аналогичным образом рассматривается случай точки границы ∂U, где функция $v(x)$ принимает максимальное значение.

Следовательно, $v(x) = const$.

Лемма доказана.

Замечание 2. Отметим, что в том случае, когда τ_y — это касательное направление в точке $y \in \partial U$ $(U \subset \mathbb{R}^2)$, то утверждение леммы Олейник–Хопфа не имеет места. Поэтому используя принцип максимума доказать единственность с точностью до произвольной постоянной решения *задачи касательной производной*

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad U, \quad \frac{\partial u(y)}{\partial \tau_y} = g(y) \quad \text{на} \quad \partial U, \tag{2.8}$$

нельзя. Ниже в тематической лекции 5 мы обсудим этот вопрос используя энергетический метод.

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть $N = 2$, $\varepsilon > 0$ и

$$U \subset \left\{ z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < y < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}.$$

Пусть $u(x, y)$ — это гармоническая функция в U такая, что

$$u(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \partial U.$$

Доказать, что если U неограниченная и

$$\limsup_{|x|\to+\infty} |u(x,y)|e^{-|x|} = 0,$$

то $u(x,y) \equiv 0$ в U.

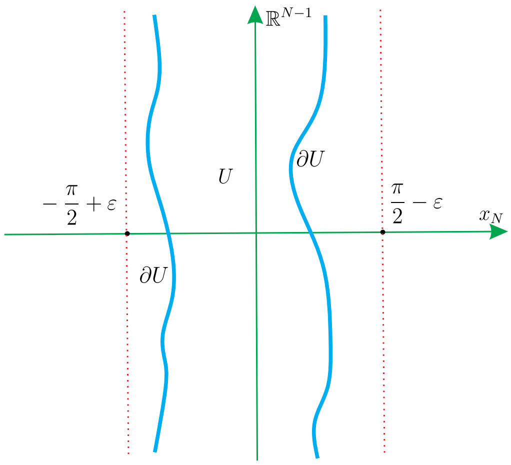

Рис. 4. Область U и ее граница ∂U.

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$u_0(x,y) \overset{def:}{=} \gamma \operatorname{ch}(x)\cos(y), \quad \gamma > 0,$$

где положительная постоянная γ произвольна. Рассмотрим две вспомогательные функции

$$w_1(x,y) \overset{def:}{=} u(x,y) - u_0(x,y), \quad w_2(x,y) \overset{def:}{=} u(x,y) + u_0(x,y).$$

Обе функции гармонические в $U \cap B(0,R)$ при любом $R > 0$. Заметим, что, с одной стороны,

$$w_1(x,y) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad w_2(x,y) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial U.$$

С другой стороны, для любого фиксированного $\gamma > 0$ при достаточно большом $R > 0$ имеем

$$w_1(x,y) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad w_2(x,y) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial B_R \cap \overline{U}.$$

В силу принципа максимума для ограниченной области $U \cap B(0,R)$ получим, что

$$w_1(x,y) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad w_2(x,y) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial U \cap B(0,R).$$

Откуда получаем, что

$$|u(x,y)| \leqslant u_0(x,y) = \gamma \operatorname{ch}(x)\cos(y) \quad \text{для всех} \quad (x,y) \in U \cap B(0,R).$$

Переходя к пределу при $\gamma \to +0$ при фиксированной точке $(x, y) \in U$, получим
$$u(x, y) = 0 \quad \text{для любой точки} \quad (x, y) \in U.$$

З а д а ч а 2. Доказать, что если
$$U = \left\{ x = (x_1, ..., x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N : \ -\frac{\pi}{4} < x_N < \frac{\pi}{4} \right\}$$
и ограниченная гармоническая функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$, то равенство (1.14), являющееся следствием из принципа максимума, остается в силе для ограниченных функций $u(x)$ и для такой неограниченной области U.

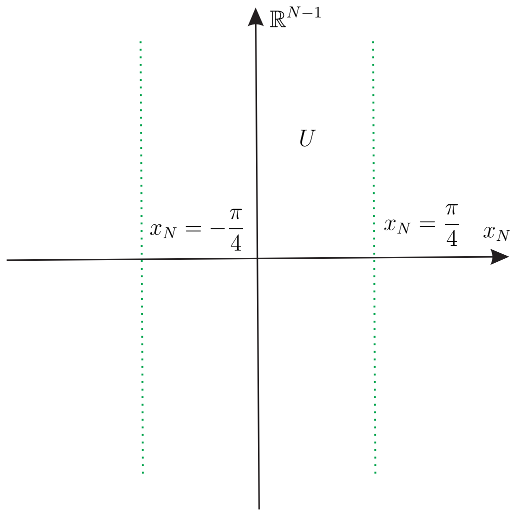

Рис. 5. Полоса U.

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:
$$v(x) \stackrel{def:}{=} u(x) - \varepsilon \cos(x_N) \left(\operatorname{ch}(x_1) + \cdots + \operatorname{ch}(x_{N-1}) \right)$$
при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$. Рассмотрим ограниченную область
$$U_R \stackrel{def:}{=} U \cap B(0, R), \quad R > 0.$$

Поскольку $u(x)$ ограничена, а
$$-\varepsilon \cos(x_N) \left(\operatorname{ch}(x_1) + \cdots + \operatorname{ch}(x_{N-1}) \right) \Big|_{x \in U \cap \partial B(0,R)} \to -\infty$$
при $R \to +\infty$, то максимум функции $v(x)$ достигается на части $\partial U \cap \cap \overline{B(0, R)}$ границы $\partial(U \cap B(0, R))$. Итак, имеем
$$\max_{x \in \overline{U_R}} v(x) = \max_{\partial U \cap \overline{B(0,R)}} v(x).$$

Устремляя $R \to +\infty$, мы получим равенство

$$\max_{x\in\overline{U}} v(x) = \max_{\partial U} v(x) \Rightarrow \max_{x\in\overline{U}} u(x) = \max_{\partial U} u(x)$$

в пределе при $\varepsilon \to +0$. Стандартным образом приходим к равенству (1.14).

Задача 3. Доказать, что если

$$U \stackrel{def:}{=} \left\{x = (x_1, ..., x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N : \ x_n > 0\right\}$$

и ограниченная гармоническая функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U) \cap \mathbb{C}(\overline{U})$, то (1.14) остается в силе в случае полупространства U.

Решение. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего рассмотри полосу

$$U_R = \left\{x = (x_1, ..., x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N : \ 0 < x_N < R\right\}.$$

Докажем, что если гармоническая в U_R ограниченная функция $w(x) \in \in \mathbb{C}^{(2)}(U_R) \cap (\overline{U_R})$ удовлетворяет граничным условиям

$$w(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x_N = 0 \quad \text{и} \quad x_N = R,$$

то $w(x) \leqslant 0$ в U_R. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть область

$$U_{R,r} \stackrel{def:}{=} U_R \cap B(0, r)$$

при $r > 0$.

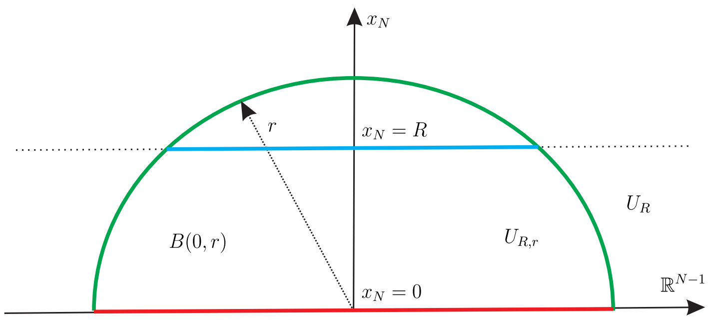

Рис. 6. Области U_R и $U_{R,r}$.

Затем рассмотреть новую вспомогательную функцию

$$w_1(x) \stackrel{def:}{=} w(x) - \varepsilon \cos\left(\frac{x_N}{R}\right) \left[\operatorname{ch}(x_1) + \cdots + \operatorname{ch}(x_{N-1})\right], \quad \varepsilon > 0.$$

Далее провести рассуждения как в предыдущей задачи и предельными переходами при $r \to +\infty$ и $\varepsilon \to +0$ получить, что

$$w(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in U_R.$$

Шаг 2. Рассмотрим в полосе U_R следующую вспомогательную функцию:

$$v(x) \stackrel{def:}{=} \frac{x_N}{R} \sup_{x_N=R} u(x) + \left(1 - \frac{x_N}{R}\right) \sup_{x_N=0} u(x).$$

Ясно, что эта функция является гармонической в U_R. Справедливы следующие свойства:

$$v(x)\Big|_{x_N=0} = \sup_{x_N=0} u(x), \quad v(x)\Big|_{x_N=R} = \sup_{x_N=R} u(x).$$

Рассмотрим вспомогательную гармоническую функцию в U_R

$$w(x) \stackrel{def:}{=} v(x) - u(x).$$

Ясно, что

$$w(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x_N = 0 \quad \text{и} \quad x_N = R.$$

В силу первого шага имеем

$$w(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad U_R \Rightarrow u(x) \leqslant v(x) \quad \text{при} \quad x \in U_R.$$

Осталось при фиксированном $x \in U_R$ перейти к пределу при $R \to +\infty$ и получить равенство

$$u(x) \leqslant \sup_{x_N=0} u(x) \Rightarrow \max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x_N=0} u(x).$$

Далее стандартным образом приходим к равенству (1.14).

З а д а ч а 4. Найти все такие $\alpha > 0$, что решение $u(x, y)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, удовлетворяющее неравенству

$$|u(x, y)| \leqslant M\left(1 + x + |y|\right)^\alpha,$$

где $M = const > 0$, единственно.

Р е ш е н и е. Пусть существует два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Обозначим

$$v(x, y) \stackrel{def:}{=} u_1(x, y) - u_2(x, y).$$

Легко видеть, что $v(x, y)$ удовлетворяет однородной задаче Дирихле. Общее решение такой задачи в полуплоскости имеет вид [1])

$$v(\rho, \vartheta) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c_k \rho^k + d_k \rho^{-k}\right) \sin(k\vartheta).$$

С учетом условия

$$|v| \leqslant |u_1| + |u_2| \leqslant M_1\left(1 + \rho\cos(\vartheta) + |\rho\sin(\vartheta)|\right)^\alpha \leqslant M_2(1 + \rho)^\alpha$$

[1]) Решение получается стандартным методом разделяющихся переменных для уравнения в полярных координатах.

заключаем, что решение имеет вид

$$v(\rho,\vartheta)=\sum_{k=1}^{K} c_k\rho^k\sin(k\vartheta).$$

Здесь константа K равна целой части α. Таким образом, при $\alpha\geqslant 1$ существует ненулевая функция $v(x,y)$ и, следовательно, решение исходной задачи неединственно. При $\alpha<1$ существует только нулевое $v(x,y)$, поэтому решение исходной задачи единственно.

Задача 5. Пусть $N\geqslant 2$ и $U=\left\{x\in\mathbb{R}^N:\ x_N>0\right\}$. Предположим, что функция $u(x)\in\mathbb{C}^{(2)}(U)\cap\mathbb{C}(\overline{U})$, ограниченная и гармоническая в U. Выберем $\delta\in(0,1)$ и предположим, что верно неравенство

$$|u(x)-u(y)|\leqslant|x-y|^{\delta}$$

для всех $x,y\in\partial U\overset{def:}{=}\left\{(x_1,...,x_{N-1})\in\mathbb{R}^{N-1},\quad x_N=0\right\}$. Используя принцип максимума, доказать, что найдется константа $M=M(N,\delta)>$ >0 такая, что

$$|u(x)-u(y)|\leqslant M|x-y|^{\delta}\quad \text{для всех}\quad x,y\in U.$$

Решение. Решение проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение:

Пусть $N=2$ *и* $\Omega=\{(x,y):\ x>0\}$. *При* $\delta\in(0,1)$ *существует гармоническая неотрицательная функция в* Ω, *непрерывная в* $\overline{U}$ *и равная* $|y|^{\delta}$ *на* ∂U.

□ Нужно рассмотреть функцию комплексного аргумента $w=$ $=w(z)=z^{\delta}$ и выделить действительную часть этой функции. Тогда функция

$$v=v(x,y)=\mathrm{Re}w(z)$$

будет обладать требуемыми свойствами [1]. ⊠

Шаг 2. Пусть $w=w(x,y)$ — это функция двух переменных ($(x,y)\in$ $\in\mathbb{R}^2$), существование которой доказано на первом шаге. Для $x\in U$ рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$v(x)\overset{def:}{=}w(x_N,x_1)+\cdots+w(x_N,x_{N-1}).$$

Как нетрудно убедиться, функция $v(x)$ является гармонической в области U. Кроме того, по построению (см. шаг 1) имеет место равенство

$$v(x)|_{x_N=0}=w(0,x_1)+\cdots+w(0,x_{N-1})=|x_1|^{\delta}+\cdots+|x_{N-1}|^{\delta}.$$

Теперь по этой функции $v(x)$ построим новую функцию

$$h(x)\overset{def:}{=}u(x)-u(0)-v(x).$$

[1] Эта функция является гармонической как действительная часть аналитической функции.

По построению эта функция является гармонической в U. Кроме того,

$$h(x)|_{x_N=0} = u|_{x_N=0} - u(0) - v(x)|_{x_N=0} \leqslant \\ \leqslant |x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2|^{\delta/2} - |x_1|^\delta - \cdots - |x_{N-1}|^\delta \leqslant 0$$

Шаг 3. Теперь рассмотрим функцию $h(x)$ в области

$$U_R = U \cap B(0,R) \quad \text{при} \quad R > 0.$$

Заметим, что функция $u(x)$ ограниченная в U, а функция $v(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$. Поэтому множество тех $x \in U_R$, для которых функция $h(x) \geqslant 0$ является ограниченным в $\mathbb{R}^N$. Следовательно, при достаточно большом $R > 0$ получим

$$h(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial(B(0,R) \cap U).$$

Согласно принципу максимума в ограниченной области U_R получим, что

$$h(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in U_R$$

для любого $R > 0$. Итак, получим, что

$$u(x) - u(0) \leqslant v(x) \leqslant M_1(N,\delta)|x|^\delta \quad \text{для всех} \quad x \in U.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть вспомогательную функцию

$$g(x) \stackrel{def:}{=} u(x) - u(0) + v(x).$$

И доказать, что в силу принципа максимума имеет место следующее неравенство:

$$u(x) - u(0) \geqslant v(x) \geqslant |x|^\delta \quad \text{для всех} \quad x \in U.$$

Итак, мы доказали, что

$$|u(x) - u(0)| \leqslant M(N,\delta)|x|^\delta \quad \text{для всех} \quad x \in U$$

при

$$M = \max\{1, M_1\}.$$

Шаг 4. Сдвинув начало координат в точку $y \in \partial U$ мы получим неравенство

$$|u(x+y) - u(y)| \leqslant M(N,\delta)|x|^\delta \quad \text{для всех} \quad x \in U, \quad y \in \partial U.$$

Оставшуюся часть доказать студентам!

Задача 6. Пусть Ω_1 и Ω_2 — это две ограниченные области в $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 2$ с гладкими границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, причем $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ и $u_k(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega_k) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega_k})$ при $k = 1, 2$. Пусть

$$\Delta u_k(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega_k, \quad u_k(x) = f_k(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega_k,$$
$$f_1(x_1) < f_2(x_2) \quad \text{для всех} \quad x_1 \in \partial\Omega_1, \quad x_2 \in \partial\Omega_2.$$

Что больше:

$$u_1(x_0) \quad \text{или} \quad u_2(x_0)$$

в произвольной точке $x_0 \in \Omega_1$?

Решение. В силу слабого принципа максимума для функций $u_2(x)$ и $u_1(x)$ справедливо неравенство

$$u_2(x_0) > \min_{x \in \partial\Omega_2} u_2(x) = \min_{x \in \partial\Omega_2} f_2(x) > \max_{x \in \partial\Omega_1} f_1(x) = \max_{x \in \partial\Omega_1} u_1(x) > u_1(x_0)$$

для всех $x_0 \in \Omega_1 \subset \Omega_2$.

Задача 7. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(B(1,0)) \cap \mathbb{C}(\overline{B(1,0)})$ и

$$u_{x_1x_1} + u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} = 1 \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \in B(0,1) \subset \mathbb{R}^2. \tag{3.1}$$

Может ли $u(x)$ иметь внутри $B(1,0)$ максимум, минимум?

Ответ. Максимум не может. Минимум может.

Решение. Матрица соответствующей квадратичной формы эллиптического уравнения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

Поэтому существует ортогональное преобразование (поворот)

$$x = \widehat{P}y,$$

конкретный вид которого нам не важен, приводящий исходную задачу к следующей:

$$v_{y_1y_1} + 3v_{y_2y_2} = 2, \quad v(y) = u(\widehat{P}y) \quad \text{при} \quad y = (y_1, y_2) \in B(0,1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Если сделать еще одну невырожденную замену переменных (сжатие)

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_2, \quad z = \widehat{Q}y, \quad \widehat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

то мы получим уравнение

$$\Delta_z w(z) = w_{z_1z_1} + w_{z_2z_2} = 2 \geqslant 0, \quad w(z) = u(\widehat{Q}\widehat{P}x)$$

при $z = (z_1, z_2) \in D = \{z \in \mathbb{R}^2 : \, z_1^2 + 3z_2^2 < 1\}$. Теперь в силу результата следствия из леммы 1 мы приходим к выводу о том, что максимум функции $w = w(z)$ не может достигаться внутри эллипса D, однако минимум может достигаться. В силу невырожденности указанного отображения $\widehat{Q}\widehat{P}x$ граница шара $B(0,1)$ переходит в границу эллипса, а внутренность шара $B(0,1)$ переходит во внутренность эллипса. Таким образом, для функции $u(x)$ утверждение тоже самое.

Задача 8. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, $q(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ и функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(x) + q(x)u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Определим следующие величины:

$$M \overset{def:}{=} \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x), \quad m \overset{def:}{=} \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Возможно ли, что $M > m$,

1. Если $q(x) \equiv 0$;
2. Если $q(x) > 0$;
3. Если $q(x) < 0$ и $M > 0$;
4. Если $q(x) < 0$ и $M < 0$?

Решение. Рассмотрим разные случаи.

1. Нет, в этом случае $M = m$ согласно принципу максимума.

2. В этом случае такая ситуация возможна. Рассмотрим следующий пример:

$$u_{xx} + u = 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, \pi), \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

Решение этой задачи

$$u(x) = \sin x \Rightarrow M = 1, \quad m = 0.$$

3. Нет, поскольку, если в некоторой точке $x_0 \in \Omega$ достигается положительный максимум

$$u(x_0) = M > 0 \Rightarrow \Delta u(x_0) \leqslant 0 \Rightarrow 0 < -q(x_0)u(x_0) = \Delta u(x_0) \leqslant 0.$$

Противоречие.

4. Да, может быть. Рассмотрим следующий пример:

$$u_{xx} - u = 0 \quad \text{при} \quad x \in (-1, 1).$$

Решением этого уравнения является функция

$$u(x) = -\operatorname{ch}(x),$$

$$M = u(0) = -1, \quad m = u(-1) = u(1) = -\frac{1}{2e} - \frac{e}{2}, \quad M > m.$$

Задача 9. Пусть

$$\Omega \overset{def:}{=} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x^2 + 2y^2 < 2\right\}, \quad u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}),$$

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \overline{\Omega},$$

$$u(x, y) = x + y \quad \text{при} \quad x^2 + 2y^2 = 2,$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} + (1 - x)u(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + 2y^2 = 1,$$

где n — это направление внешней нормали к области Ω. Найти $\max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}} |u(x,y)|$.

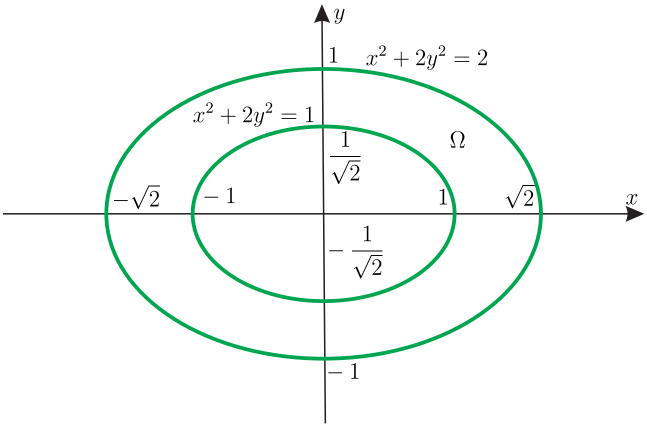

Рис. 7. Область Ω.

Решение. В силу принципа максимума максимум функции $|u(x,y)|$ достигается на границе. Поэтому нам надо рассмотреть граничные условия. Итак, рассмотрим сначала границу $x^2 + 2y^2 = 1$. Перепишем граничное условие в следующем виде:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = (x-1)u(x,y) \quad \text{при} \quad x^2 + 2y^2 = 1.$$

В силу принципа Хопфа–Олейник в точке максимума $z_{max} \in \partial\Omega$ (минимума $z_{min} \in \partial\Omega$) на границе имеем

$$\frac{\partial u(z_{max})}{\partial n} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(z_{min})}{\partial n} \leqslant 0.$$

Заметим, что

$$x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow |x| \leqslant 1 \Rightarrow x - 1 \leqslant 0 \quad \text{на} \quad x^2 + 2y^2 = 1.$$

Поэтому в точке $z_{\max} \in \partial\Omega$ имеем

$$0 \leqslant \frac{\partial u(z_{max})}{\partial n} = (x-1)u(z_{max}) \Rightarrow u(z_{max}) \leqslant 0,$$

$$0 \geqslant \frac{\partial u(z_{min})}{\partial n} = (x-1)u(z_{min}) \Rightarrow u(z_{min}) \geqslant 0.$$

Эти два условия означают, что

$$u(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + 2y^2 = 1.$$

Следовательно, осталось вычислить

$$\max_{x^2+2y^2=2}(x+y).$$

Легко видеть, что максимум достигается в первом квадранте. Таким образом, нужно найти максимум функции

$$f(y)=\sqrt{2-2y^2}+y \quad \text{при} \quad y>0 \Rightarrow f(y_0)=\sqrt{3} \quad \text{при} \quad y_0=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Задача 10. Доказать, что решение следующей задачи единственно в классе $u(x)\in\mathbb{C}^{(2)}(\overline{U})$

$$U=B(0,2)\backslash\overline{B(0,1)}\subset\mathbb{R}^2,$$
$$\Delta u(x)=0 \quad \text{при} \quad x\in\overline{U},$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial\rho}-u(x)=f_1(x) \quad \text{при} \quad x\in\partial B(0,1),$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial\rho}+u(x)=f_2(x) \quad \text{при} \quad x\in\partial B(0,2).$$

Решение. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — это два решения поставленной задачи. Рассмотрим разность

$$v(x)=u_1(x)-u_2(x),$$

которая является решением соответствующей однородной задачи. Применим первую формулу Грина для функции $v(x)$. Имеем

$$0=\int\limits_U v(x)\Delta v(x)\,dx=-\int\limits_{\partial B(0,1)}\frac{\partial v(x)}{\partial\rho}v(x)\,ds_x+ \\ +\int\limits_{\partial B(0,2)}\frac{\partial v(x)}{\partial\rho}v(x)\,ds_x-\int\limits_U|\nabla v|^2\,dx.$$

С учетом граничных условий имеем

$$\int\limits_{\partial B(0,1)}v^2(x)\,ds_x+\int\limits_{\partial B(0,2)}v^2(x)\,ds_x+\int\limits_U|\nabla v|^2\,dx=0\Rightarrow \\ \Rightarrow v(x)=const\Rightarrow v(x)=0.$$

Задача 11. Справедлив ли принцип максимума для уравнения

$$\Delta u+u_x+u=0, \quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

в ограниченной области Q на плоскости в той же форме, как для уравнения Лапласа?

Ответ. Нет.

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующий пример:

$$(x, y) \in Q = (0, \sqrt{2}\,\pi) \otimes (0, 2\pi),$$
$$u(x, y) = e^{-x/2} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right).$$

Легко непосредственно проверить, что функция $u = u(x, y)$ является решением рассматриваемого уравнения. При этом можно проверить, что

$$u|_{x=0} = u|_{x=\sqrt{2}\,\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=2\pi} = 0,$$

а во внутренней точке

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \pi\right) \in Q$$

имеем

$$u(x_0, y_0) = \exp\Big(-\pi/(2\sqrt{2}\,)\Big) > 0.$$

Значит, максимум решения достигается внутри области Q.