Лекция 1

ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА

В этой лекции мы рассмотрим основные свойства решений уравнения Лапласа и уравнения Пуассона в гладких областях. Многие результаты известны из курса лекций ММФ для третьего курса. Однако, мы должны напомнить эти результаты, чтобы в дальнейшем слушателям этого курса было проще воспринимать более сложные результаты, излагаемые в дальнейшем для общих эллиптических уравнений.

§ 1. Фундаментальное решение

Прежде всего напомним, что оператором Лапласа называется следующий оператор:

$$\Delta \overset{def:}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N}, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 2$. Прежде, чем переходить к исследованию различных свойств решений уравнения Лапласа или уравнения Пуассона, имеющих соответственно вид

$$\Delta u = 0 \quad \text{или} \quad \Delta u = f(x), \tag{1.2}$$

нужно построить так называемое *фундаментальное решение оператора Лапласа*. Это фундаментальное решение является решением в смысле пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ уравнения

$$\Delta \mathcal{E}_N(x) = \delta(x), \tag{1.3}$$

где $\delta(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ — это так называемая дельта–функция Дирака. Уравнение (1.3) не является поточечным, как это ошибочно считал сам Дирак и как ошибочно считают многие студенты Физического Факультета МГУ. Если ввести скобки двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между векторным топологическим неметризуемым пространством основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ и соответствующим пространством обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, то уравнение (1.3) понимается в смысле следующего равенства:

$$\langle \Delta_x \mathcal{E}_N(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0) \tag{1.4}$$

для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Сначала мы просто выпишем явный вид фундаментального решения оператора Лапласа, а вычислим его в курсе функционального анализа.

$$\mathcal{E}_N(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln|x|, & \text{если} \quad N=2; \\ -\frac{1}{(N-2)\omega_N}|x|^{-N+2}, & \text{если} \quad N\geqslant 3, \end{cases} \tag{1.5}$$

где ω_N — это площадь единичной сферы $\{|x|=1,\ x\in\mathbb{R}^N\}$ в $\mathbb{R}^N$.
Замечание 1. Отметим, что фундаментальное решение $\mathcal{E}_N(x)$, которое по определению дается формулой (1.5), является неединственным решением уравнения (1.3). В частности, решением этого уравнения является следующая функция:

$$\mathcal{E}(x)=\mathcal{E}_N(x)+\psi(x), \quad \Delta\psi(x)=0, \quad \psi(x)\in\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N).$$

Заметим, что фундаментальное решение удовлетворяет следующим неравенствам: [1])

$$\left|\frac{\partial\mathcal{E}_N(x)}{\partial x_i}\right|\leqslant\frac{c}{|x|^{N-1}}, \quad \left|\frac{\partial^2\mathcal{E}_N(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|\leqslant\frac{c}{|x|^N} \tag{1.6}$$

при $x\neq 0$ и $c>0$ — это константа.

§ 2. Теорема Остроградского–Гаусса–Грина

Предположим, что $U\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geqslant 2)$ — это открытое ограниченное подмножество с достаточно «гладкой» границей ∂U такой, что в каждой ее точке $y\in\partial U$ задано поле единичных нормалей $n_y = (n_{y1},...,n_{yN})$ $(|n_y|=1)$. Ясно, что

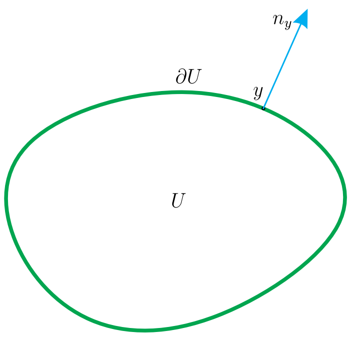

Рис. 1. Поле внешних нормалей n_y к поверхности ∂U.

$$n_{yj}=\cos(n_y,e_j) \quad \text{при} \quad j=\overline{1,N},$$

[1]) Поэтому первая частная производная фундаментального решения имеет интегрируемую особенность, а вторая частная производная имеет не интегрируемую особенность.

где e_j — орты заданной системы координат в $\mathbb{R}^N$. Прежде всего сформулируем без доказательства теорему Остроградского–Гаусса–Грина.
Теорема 1. *Пусть* $u(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{U})$. *Тогда*

$$\int\limits_U u_{x_i}(x)\,dx = \int\limits_{\partial U} u(y)\cos(n_y, e_i)\,dS_y, \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.1}$$

Справедлива следующая формула интегрирования по частям:
Теорема 2. *Пусть* $u(x), v(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{U})$. *Тогда*

$$\int\limits_U u_{x_i}(x)v(x)\,dx = -\int\limits_U u(x)v_{x_i}(x)\,dx + \int\limits_{\partial U} u(y)v(y)\cos(n_y, e_i)\,dS_y \tag{2.2}$$

при $i = \overline{1, N}$.

Доказательство.

Следует применить теорему 1 к функции $u(x)v(x)$.

Теорема доказана.

Наконец, справедливы следующие формулы Грина: [1]

Теорема 3. *Пусть* $u(x), v(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{U})$. *Тогда справедливы следующие формулы*:

$$\int\limits_U \Delta u(x)\,dx = \int\limits_{\partial U} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\,dS_y, \tag{2.3}$$

$$\int\limits_U \left(D_x u(x), D_x v(x)\right)\,dx = -\int\limits_U u(x)\Delta v(x)\,dx + \int\limits_{\partial U} \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} u(y)\,dS_y, \tag{2.4}$$

$$\int\limits_U \left[u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\right]\,dx =$$
$$= \int\limits_{\partial U} \left[u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial n_y} - v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right]\,dS_y. \tag{2.5}$$

Доказательство.

Шаг 1. Применив формулу (2.1) к функции $u_{x_i x_i}$ вместо функции u_{x_i}, получим следующее равенство:

$$\int\limits_U u_{x_i x_i}(x)\,dx = \int\limits_{\partial U} u_{y_i}(y)\cos(n_y, e_i)\,dS_y.$$

[1] Здесь и далее мы используем обозначение $D_x u = (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_N} u)$. Обычно в курсе математического анализа используется более привычное обозначение ∇_x.

Суммируя по $i = \overline{1, N}$, получим равенство (2.3), поскольку

$$\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \cos(n_y, e_i).$$

Шаг 2. Для того чтобы получить равенство (2.4) нужно применить равенство (2.2), в которой вместо функции $v(x)$ нужно взять функцию $v_{x_i}(x)$, а затем просуммировать по $i = \overline{1, N}$.

Шаг 3. Нужно заметить, что помимо формулы (2.4) имеет место следующая формула:

$$\int\limits_U (D_x u(x), D_x v(x))\, dx = -\int\limits_U v(x) \Delta u(x)\, dx + \int\limits_{\partial U} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} v(y)\, dS_y. \quad (2.6)$$

Теперь осталось вычесть формулу (2.4) из формулы (2.6) и получить формулу (2.5).

Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем пользоваться переходом к сферической системе координат в $\mathbb{R}^N$. При $N = 2$ она имеет вид

$$(x_1, x_2) \to (r, \varphi_1), \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1, \end{cases}$$

$$J_2 = \frac{D(x_1, x_2)}{D(r, \varphi_1)} = r, \qquad dx_1 dx_2 = J_2 dr\, d\varphi_1.$$

При $N = 3$ она имеет вид

$$(x_1, x_2, x_3) \to (r, \varphi_1, \varphi_2), \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2, \end{cases}$$

$$J_3 = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(r, \varphi_1, \varphi_2)} = r^2 \sin\varphi_1, \qquad dx_1 dx_2 dx_3 = J_3 dr\, d\varphi_1\, d\varphi_2.$$

При $N > 3$ сферическая система координат имеет следующий вид:

$$(x_1, x_2, ..., x_N) \to (r, \varphi_1, ..., \varphi_{N-1}),$$

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{N-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-2}\cos\varphi_{N-1}, \\ x_N = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-2}\sin\varphi_{N-1}, \end{cases}$$

$$J_N = \frac{D(x_1, x_2, x_3, ..., x_{N-1}, x_N)}{D(r, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1})} = r^{N-1} \sin^{N-2}\varphi_1 \sin^{N-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{N-2},$$

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} dx_N = J_N dr\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \cdots d\varphi_{N-2}\, d\varphi_{N-1}.$$

В качестве важных примеров перехода к сферической системе координат (в том числе к обобщенной) мы приведем пример вычисления следующих двух интегралов:

$$I_1 := \int\limits_{B(0,\varepsilon)} f(|x|)dx, \quad I_2 := \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} f(|y|)\,dS_y,$$

где $dx := dx_1 \cdots dx_N$ — элемент объема в N–мерном эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, $dS_y =$ — элемент площади многообразия $\partial B(0,\varepsilon)$ в точке $y \in \partial B(0,\varepsilon)$. Кроме того, мы пользуемся следующими стандартными обозначениями:

$$B(x,r) := \left\{y \in \mathbb{R}^N : \ |x-y| < r\right\}, \quad \partial B(x,r) := \left\{y \in \mathbb{R}^N : \ |x-y| = r\right\}.$$

1. Вычислим сначала интеграл I_1.

□ Действительно, имеем воспользуемся переходом к сферической системе координат в общем N–мерном случае. Если в пространстве $\mathbb{R}^N$ замкнутый шар $\overline{B(0,\varepsilon)}$ имеет вид $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_N^2 \leqslant \varepsilon^2$, то в сферической системе координат $(r, \varphi_1, ..., \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1})$ шару $B(0,\varepsilon)$ соответствует прямоугольный параллелепипед

$$0 \leqslant r \leqslant \varepsilon, \quad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, \quad \cdots \quad 0 \leqslant \varphi_{N-2} \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi_{N-1} \leqslant 2\pi.$$

Поэтому для интеграла I_1 мы получим следующее выражение:

$$I_1 = \int\limits_0^\varepsilon dr \int\limits_0^\pi d\varphi_1 \cdot\cdot \int\limits_0^\pi d\varphi_{N-2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} J_N f(r) =$$
$$= \int\limits_0^\varepsilon r^{N-1} f(r)\,dr \int\limits_0^\pi \sin^{N-2}\varphi_1\,d\varphi_1 \cdots \int\limits_0^\pi \sin^2\varphi_{N-3}\,d\varphi_{N-3} \times$$
$$\times \int\limits_0^\pi \sin\varphi_{N-2}\,d\varphi_{N-2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} = \omega_N \int\limits_0^\varepsilon r^{N-1} f(r)\,dr,$$

где

$$\omega_N := 2\frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}, \quad \omega_2 = 2\pi, \quad \omega_3 = 4\pi$$

и по смыслу является площадью поверхности единичной сферы $\{y \in \mathbb{R}^N : \ |y| = 1\}$. Отметим, что из объем единичного шара $B(0,1)$ равен

$$\alpha_N := \frac{\omega_N}{N}. \quad \boxtimes$$

2. Вычислим интеграл I_2.

□ Действительно, прежде всего заметим, что в сферической системе координат сфера $\partial B(0,\varepsilon)$ параметризуется углами $(\varphi_1, ..., \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1})$. Используя формулу

$$dS_y = J_N(y) d\varphi_1 \cdots d\varphi_{N-1}, \quad y = (\varepsilon, \varphi_1, ..., \varphi_{N-1})$$

для элемента площади dS_y в точке y сферы $\partial B(0,\varepsilon)$, где $J_N(y)$ — это якобиан в который подставлены координаты точки y на сфере $\partial B(0,\varepsilon)$ в сферической системе координат. После подстановки явного выражения для dS_y мы получим следующее равенство:

$$I_2 = \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} f(|y|)\, dS_y =$$

$$= f(\varepsilon) \int\limits_0^\pi d\varphi_1 \int\limits_0^\pi d\varphi_2 \cdots \int\limits_0^\pi d\varphi_{N-2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} J_N(\varepsilon, \varphi_1, ..., \varphi_{N-2}) =$$

$$= f(\varepsilon)\varepsilon^{N-1} \int\limits_0^\pi \sin^{N-2}\varphi_1\, d\varphi_1 \cdots \int\limits_0^\pi \sin^2\varphi_{N-3}\, d\varphi_{N-3} \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi \sin\varphi_{N-2}\, d\varphi_{N-2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} = f(\varepsilon)\varepsilon^{N-1}\omega_N.$$

Полезной в различных вычислениях является связь элемента площади dS_y сферы $\partial B(0,\varepsilon)$ и элемента площади dS_z единичной сферы $\partial B(0,1)$. Эта связь дается следующей формулой:

$$dS_y = \varepsilon^{N-1} dS_z, \quad y = (\varepsilon, \varphi_1, ..., \varphi_{N-1}), \quad z = (1, \varphi_1, ..., \varphi_{N-1}).$$

Докажите сами! ⊠

§ 3. Решение уравнения Пуассона

Пусть $f(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$, тогда определим решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x) \tag{3.1}$$

следующим образом:

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(x-y) f(y)\, dy, \tag{3.2}$$

где $\mathcal{E}_N(x)$ — это фундаментальное решение оператора Лапласа. Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 4. *Пусть* $u(x)$ *определено формулой* (3.2), *тогда при условии, что* $f(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ *имеем* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ *и функция* $u(x)$ *удовлетворяет уравнению* (3.1) *в* $\mathbb{R}^N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Прежде всего сделаем замену координат и получим следующее равенство:

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(x-y) f(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(y) f(x-y)\, dy. \tag{3.3}$$

Поэтому

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(y) \left[\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}\right] dy,$$

где $h \neq 0$ и $e_i = (0, ..., 1..., 0)$ в i–й позиции. Однако,

$$\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \rightrightarrows \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$$

равномерно в $\mathbb{R}^N$ при $h \to +0$. Таким образом,

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\, dy, \quad i = \overline{1, N}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)\, dy, \quad i, j = \overline{1, N}, \tag{3.4}$$

причем выражение в правой части (3.4) непрерывно по $x \in \mathbb{R}^N$. Поэтому $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N)$.

Шаг 2. Поскольку фундаментальное решение $\mathcal{E}_N(x)$ имеет особенность в точке $x = 0$, то фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем шар $B(0, \varepsilon)$ с центром в точке $x = 0$ и радиуса $\varepsilon > 0$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\Delta u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(y) \Delta_x f(x-y)\, dy =$$
$$= \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y) \Delta_x f(x-y)\, dy + \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y) \Delta_x f(x-y)\, dy \overset{def:}{=}$$
$$\overset{def:}{=} I_1 + I_2. \tag{3.5}$$

Прежде всего имеем

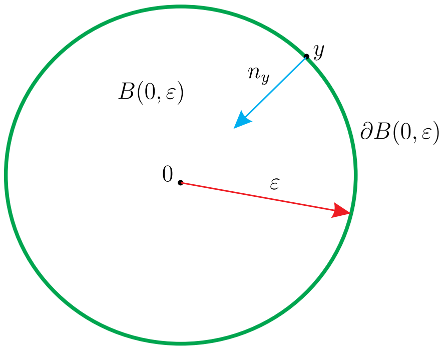

Рис. 2. Шар $B(0,\varepsilon)$ и его граница $\partial B(0,\varepsilon)$.

$$|I_1| \leqslant c_1 \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\Delta_x f(x)| \int\limits_{B(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)|\, dy \leqslant \\ \leqslant c_2 \begin{cases} \varepsilon^2|1-2\ln\varepsilon|, & \text{если} \quad N=2; \\ \varepsilon^2, & \text{если} \quad N\geqslant 3. \end{cases} \tag{3.6}$$

$\square$ Действительно, рассмотрим два случая $N=2$ и $N\geqslant 3$. Без ограничения общности предположим, что $\varepsilon\in(0,1)$. В первом случае имеет место следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_{B(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_2(y)|\, dy = \int\limits_0^\varepsilon r|\ln r|\, dr = -\int\limits_0^\varepsilon r\ln r\, dr = \\ = \left(-\frac{r^2}{2}\ln r + \frac{r^2}{4}\right)\Big|_{r=0}^{r=\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{4}\left(1-2\ln\varepsilon\right).$$

Рассмотрим теперь второй случай: $N\geqslant 3$.

$$\int\limits_{B(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)|\, dy = \frac{1}{N-2}\int\limits_0^\varepsilon \frac{r^{N-1}}{r^{N-2}}\, dr = \frac{\varepsilon^2}{2(N-2)}. \quad \boxtimes$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y)\Delta_y f(x-y)\, dy = \\ = -\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\varepsilon)} \left(D_y\mathcal{E}_N(y), D_y f(x-y)\right)\, dy + \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y)\frac{\partial f}{\partial n_y}(x-y)\, dS_y \stackrel{def:}{=} \\ \stackrel{def:}{=} I_{21} + I_{22}, \tag{3.7}$$

где n_y – единичный вектор внутренней нормали к $\partial B(0,\varepsilon)$. Прежде всего ясно, что

$$|I_{22}| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |D_x f(x)| \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)|\, dS_y \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \begin{cases} \varepsilon|\ln\varepsilon|, & \text{если} \quad N=2, \\ \varepsilon, & \text{если} \quad N\geqslant 3. \end{cases} \tag{3.8}$$

□ Действительно, рассмотрим два случая $N=2$ и $N\geqslant 3$. В первом случае имеет место следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_2(y)|\, dS_y = \varepsilon|\ln\varepsilon|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial B(0,1)} dS_y = \varepsilon|\ln\varepsilon|.$$

Во втором случае справедливо выражение

$$\int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} |\mathcal{E}_N(y)|\, dS_y = \frac{\varepsilon^{N-1}}{\omega_N(N-2)\varepsilon^{N-2}}\int\limits_{\partial B(0,1)} dS_y = c_3\varepsilon. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Интегрируя по частям в выражении для I_{21}, получим следующую цепочку равенств:

$$I_{21} = -\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\varepsilon)} (D_y\mathcal{E}_N(y), D_y f(x-y))\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\varepsilon)} \Delta_y\mathcal{E}_N(y) f(x-y)\, dy - \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial\mathcal{E}_N(y)}{\partial n_y} f(x-y)\, dS_y =$$

$$= -\int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial\mathcal{E}_N(y)}{\partial n_y} f(x-y)\, dS_y, \tag{3.9}$$

так как фундаментальное решение $\mathcal{E}_N(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа вне начала координат. Имеют место следующие равенства:

$$D_y\mathcal{E}_N(y) = \frac{1}{\omega_N}\frac{y}{|y|^N} \quad \text{и} \quad n_y = \frac{-y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon} \quad \text{на} \quad \partial B(0,\varepsilon). \text{ [1)]}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\mathcal{E}_N(y)}{\partial n_y} = (n_y, D_y\mathcal{E}_N(y)) = -\frac{1}{\omega_N\varepsilon^{N-1}} \quad \text{на} \quad \partial B(0,\varepsilon).$$

[1)] Напомним, что по смыслу n_y — это внутренняя нормаль к сфере $\partial B(0,\varepsilon)$.

Поскольку $\omega_N \varepsilon^{N-1}$ — это площадь поверхности сферы $\partial B(0,\varepsilon)$, то при $\varepsilon \to +0$ имеем

$$I_{21} = -\int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{E}_N(y)}{\partial n_y} f(x-y)\, dS_y = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)\, dS_y \to f(x)$$

при $\varepsilon \to +0$.

□ Действительно, имеем

$$\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)\, dS_y = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} [f(x-y) - f(x)]\, dS_y + f(x),$$

а интеграл

$$\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)} [f(x-y) - f(x)]\, dS_y \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$. ☒

Шаг 4. Итак, переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (3.5), получим равенство

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Теорема доказана.

§ 4. Теорема о среднем

Для многих результатов относительно решений уравнения Лапласа большую роль играет теорема о среднем. Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$ — открытое множество. Рассмотрим функцию $u(x)$ *гармоническую* в области U, т.е. удовлетворяющую уравнению Лапласа в области U

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in U. \tag{4.1}$$

Справедлива следующая теорема о среднем:

Теорема 5. *Если функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U)$ гармоническая в области U, то для любого шара $B(x,r) \subset U$*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{B(x,r)} u(y)\, dy, \tag{4.2}$$

где ω_N — это площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^N$, а α_N — это объем единичного шара в $\mathbb{R}^N$, причем $\alpha_N = \omega_N/N$.

Доказательство.

Шаг 1. Положим

$$\varphi(r) \stackrel{def:}{=} \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y. \tag{4.3}$$

Сделаем следующую замену переменных в этом интеграле:

$$y = x + rz, \quad |y - x| = r \Rightarrow |z| = 1, \quad dS_y = r^{N-1} dS_z. \tag{4.4}$$

В силу этой замены переменных из (4.3) получим следующее равенство:

$$\varphi(r) = \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, dS_z. \tag{4.5}$$

Дифференцируя обе части этого равенства по r мы получим следующее равенство:

$$\varphi^{'}(r) = \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{\partial B(0,1)} (D_y u(x+rz), z)\; dS_z, \tag{4.6}$$

поскольку

$$\frac{\partial u(x+rz)}{\partial r} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} z_i, \quad y = x + rz.$$

Теперь мы снова сделаем замену переменных $y = x + rz$ и получим

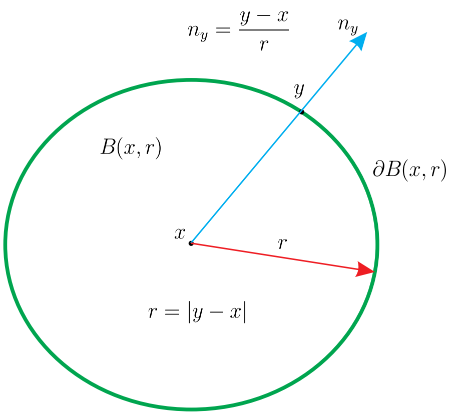

Рис. 3. Внешняя нормаль n_y в точке $y \in \partial B(x,r)$.

равенство

$$\varphi^{'}(r) = \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{\partial B(0,1)} (D_y u(x+rz), z)\; dS_z =$$

$$= \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} \left(D_y u(y), \frac{y-x}{r} \right) dS_y. \tag{4.7}$$

Шаг 2. Прежде всего заметим, что имеют место следующие равенства:

$$n_y = \frac{y-x}{r}, \quad r = |y-x| \Rightarrow \left(D_y u(y), \frac{y-x}{r}\right) = (D_y u(y), n_y) = \frac{\partial u(y)}{\partial n_y},$$

где n_y — это внешняя нормаль в точке $y \in \partial B(x,r)$. Поэтому имеет место следующее равенство:

$$\varphi'(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} \left(D_y u(y), \frac{y-x}{r}\right) dS_y =$$
$$= \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \, dS_y = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{B(x,r)} \Delta_y u(y) \, dy = 0. \tag{4.8}$$

Следовательно, $\varphi(r)$ постоянна и справедливо следующее равенство:

$$\varphi(r) = \lim_{t\to+0} \varphi(t) = \lim_{t\to+0} \frac{1}{\omega_N t^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x,t)} u(y) \, dS_y = u(x). \tag{4.9}$$

Первое равенство в (4.2) мы доказали.

Шаг 3. Докажем второе равенство. Действительно,

$$\int\limits_{B(x,r)} u(y) \, dy = \int\limits_0^r \left(\int\limits_{\partial B(x,t)} u(z) \, dS_z \right) dt =$$
$$= u(x) \int\limits_0^r \omega_N t^{N-1} \, dt = \frac{\omega_N}{N} r^N u(x) \Rightarrow u(x) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{B(x,r)} u(y) \, dy. \tag{4.10}$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем доказать обратную теорему.

Теорема 6. *Если $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U)$ удовлетворяет условию*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS_y \tag{4.11}$$

для каждого шара $B(x,r) \subset U$, то $u(x)$ — это гармоническая функция.

Доказательство.

Если $\Delta u(x) \not\equiv 0$, то существует шар $B(x,r) \subset U$ такой, что либо $\Delta u(x) > 0$ либо $\Delta u(x) < 0$ внутри $B(x,r)$. Для функции $\varphi(r)$, определенной равенством (4.3), из доказательства предыдущей теоремы имеем равенство (4.8). Поэтому

$$0 = \varphi^{'}(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{B(x,r)} \Delta_y u(y)\, dy \gtrless 0,$$

что приводит к противоречию.

Теорема доказана.

§ 5. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\Big\}, \quad u(x,y) \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega}),$$

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}, \quad u|_{y=0} = u|_{y=1} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{5.1}$$

Может ли функция

$$f(x) \stackrel{def:}{=} \int\limits_0^1 u^2(x,y)\, dy$$

иметь точку перегиба внутри интервала $(0,1)$?

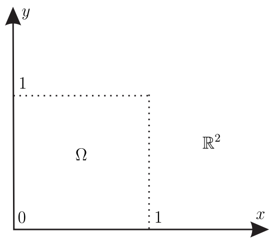

Рис. 4. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Ответ. Нет.

Решение. Поскольку $u(x,y) \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$, то справедливы равенства

$$f^{'}(x) = 2\int\limits_0^1 u_x(x,y)u(x,y)\, dy,$$

$$f^{''}(x) = 2\int\limits_0^1 \Big(u_x^2(x,y) + u_{xx}(x,y)u(x,y)\Big)\, dy =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \Big(u_x^2(x,y) - u_{yy}(x,y)u(x,y)\Big)\, dy =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \Big(u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\Big)\, dy \geqslant 0,$$

где мы воспользовались тем, что

$$u_{xx}(x,y) = -u_{yy}(x,y)$$

и интегрированием по частям с учетом граничных условий (5.1).

Задача 2. Пусть

$$\Delta u(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in \overline{B(0,2)}\backslash B(0,1) \subset \mathbb{R}^2, \tag{5.2}$$

где

$$B(0,r) \stackrel{def:}{=} \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < r\Big\}.$$

Что больше

$$\int\limits_{\partial B(0,2)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\vartheta)\, d\vartheta \quad \text{или} \quad \int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\vartheta)\, d\vartheta\ ?$$

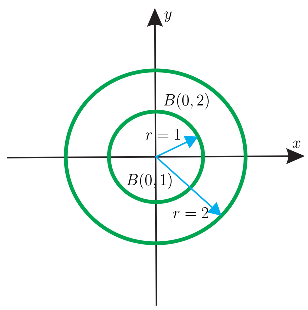

Рис. 5. Область $B(0,2)\backslash\overline{B(0,1)}$.

Решение. Проинтегрируем по множеству $\overline{B(0,2)}\backslash B(0,1)$ обе части равенства (5.2). Тогда с учетом формулы (2.3) и того, что

$$\frac{\partial}{\partial n_x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \quad \text{при} \quad x \in \partial B(0,2),$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \quad \text{при} \quad x \in \partial B(0,1),$$

получим равенство

$$\int\limits_{\partial B(0,2)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\vartheta)\, d\vartheta = \int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\vartheta)\, d\vartheta + 3\pi.$$

Итак,
$$\int\limits_{\partial B(0,2)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\vartheta)\,d\vartheta > \int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\vartheta)\,d\vartheta.$$

Задача 3. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ и
$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega,$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = \psi(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega.$$
Доказать, что функция $\psi(x)$ обращается в нуль не менее, чем в двух точках на $\partial\Omega$.

Решение. В силу формулы (2.3) имеем место равенство
$$0 = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\,ds_y = \int\limits_{\partial\Omega} \psi(y)\,ds_y.$$
Либо $\psi(y) \equiv 0$ при $y \in \partial\Omega$, либо функция $\psi(y)$ меняет знак на $\partial\Omega$, по меньшей мере два раза.

Задача 4. При каких α существует решение $u(\rho,\vartheta)$ задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ с граничным условием
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = \alpha\cos^4\vartheta + \alpha^2\cos^2\vartheta?$$

Решение. Задача предлагается для самостоятельного решения студентами.

Задача 5. Пусть $u(x)$ — это гармоническая в шаре $B(0,r)$ и непрерывная в замкнутом шаре $\overline{B(0,r)}$, $u(0) = 0$. Найти связь между числами
$$\int\limits_{B^+} u(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{B^-} u(x)\,dx,$$
где
$$B^+ \stackrel{def:}{=} \{x \in B(0,r):\ u(x) > 0\}, \quad B^- \stackrel{def:}{=} \{x \in B(0,r):\ u(x) < 0\}.$$

Решение. В силу формулы (4.2) теоремы о среднем 5 справедлива цепочка равенств
$$0 = u(0) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{B(0,r)} u(y)\,dy = \frac{1}{\alpha_N r^N} \left(\int\limits_{B^+} u(x)\,dx + \int\limits_{B^-} u(x)\,dx \right).$$
Итак, имеем
$$\int\limits_{B^+} u(x)\,dx + \int\limits_{B^-} u(x)\,dx = 0.$$

З а д а ч а 6. Пусть $u(x)$ — это гармоническая в замкнутом шаре $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^2$ функция. Найти

$$\int\limits_0^{2\pi} u_{\rho\rho}(1,\vartheta)\,d\vartheta.$$

Р е ш е н и е. Согласно формуле среднего значения (4.2) теоремы о среднем 5 справедливо равенство

$$\int\limits_0^{2\pi} u(\rho,\vartheta)\,d\vartheta = 2\pi\rho u(0), \quad \rho \in (0,1].$$

Осталось заметить, что справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_0^{2\pi} u_{\rho\rho}(1,\vartheta)\,d\vartheta = \frac{d^2}{d\rho^2}\int\limits_0^{2\pi} u(\rho,\vartheta)\,d\vartheta\Big|_{\rho=1} = 2\pi u(0)\frac{d^2\rho}{d\rho^2}\Big|_{\rho=1} = 0.$$

Итак,

$$\int\limits_0^{2\pi} u_{\rho\rho}(1,\vartheta)\,d\vartheta = 0.$$