16.4 Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость

Если каждому натуральному числу n поставлена в соответствие некоторая функция $f_n(x)$, определенная на множестве X, то говорят, что на множестве X задана функциональная последовательность

$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots .$$

Подчеркнём, что все функции $f_n(x)$, $n=1,2,\dots$, определены на одном и том же множестве X.

Зафиксируем какое-нибудь значение x_0 аргумента x. Получим числовую последовательность $\{f_n(x_0)\}$.

Если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится (расходится), то говорят, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится (расходится) в точке x_0, а точка x_0 называется точкой сходимости (расходимости) последовательности $\{f_n(x)\}$.

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в каждой точке x множества X, то говорят, что она сходится на множестве X. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ зависит, вообще говоря, от x, т.е. является функцией (обозначим её $f(x)$), определённой на множестве X. Функция $f(x)$ называется пределом или предельной функцией последовательности $\{f_n(x)\}$, что обозначается так:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{или} \quad f_n(x) \to f(x) \text{ при } n\to\infty \text{ на множестве } X.$$

Пример. Пусть $f_n(x) = x^n$, $x \in X = (-\infty, +\infty)$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1<x<1, \\ 1, & \text{если } x=1, \\ \text{не существует,} & \text{если } x \notin (-1,1]. \end{cases}$$

Отметим, что на полуинтервале $(-1 < x \leq 1]$ последовательность $\{x^n\}$ непрерывных функций сходится к разрывной (в точке $x=1$) функции $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1<x<1, \\ 1, & \text{если } x=1. \end{cases}$

Рассмотрим теперь ряд, членами которого являются не числа, а функции $u_k(x)$, $k=1,2,\ldots$, определенные на некотором множестве X:

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x).$$

Такой ряд называется функциональным рядом.

Если зафиксировать какое-нибудь значение x_0 аргумента x, то получим числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)$.

Если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)$ сходится (расходится), то говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится (расходится) в точке x_0.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится в каждой точке x множества X, то говорят, что он сходится на множестве X. При этом его сумма зависит от x. Будем обозначать её $S(x)$.

Чтобы установить, сходится ли функциональный ряд в данной точке, можно использовать признаки сходимости числовых рядов.

Примеры. 1) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k$ на всей числовой прямой $(-\infty,+\infty)$. Члены этого ряда $u_k(x)=x^k$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным x. Поэтому данный ряд сходится на интервале $X=(-1<x<1)$ и имеет сумму $S(x)=\frac{x}{1-x}$. Во всех остальных точках числовой прямой данный ряд расходится.

Отметим, что члены ряда $u_k(x)=x^k$ и его сумма $S(x)$ являются непрерывными функциями на интервале $(-1<x<1)$.

2) Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-x)x^k.$$

Его члены $u_k(x)=(1-x)x^k$ — непрерывные функции на всей числовой прямой. Ряд сходится на полуинтервале

$X = (-1 \le x < 1]$, причём $S(x) = \begin{cases} x, & \text{если } -1<x<1, \\ 0, & \text{если } x=1. \end{cases}$

Таким образом, сумма ряда является разрывной функцией в точке $x=1$.

Этот пример показывает, что, в отличие от конечных сумм, сумма бесконечного ряда непрерывных функций может оказаться разрывной функцией.

Поставим вопрос: в каком случае сумма (сходящегося) ряда, членами которого являются непрерывные функции, будет непрерывной функцией?

И аналогичный вопрос для функциональных последовательностей: в каком случае предел последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией?

Ответы на эти вопросы связаны с понятием равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве X к функции $f(x)$.

Определение 1. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве X, если $\forall \varepsilon>0\ \exists N$, такой, что $\forall n>N$ и $\forall x\in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \qquad (16.11)$$

Главным моментом в этом определении является то, что для любого ε найдётся "нужный" номер N, один и тот же для всех x из множества X. Термин "равномерно сходится" означает равномерность (одинаковость) по отношению к переменной x — неравенство (. выполимеет для всех x из множества X, начиная с номера, одного и того же для всех x.

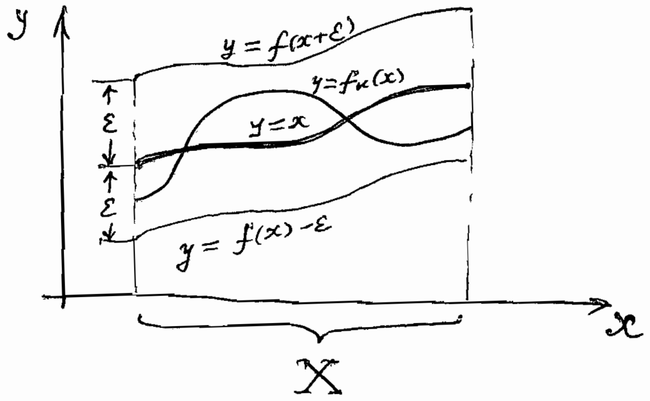

Рис. 16.2

С геометрической точки зрения неравенство (1) означает, что при $n>N$ график функции $y=f_n(x)$ лежит в ε-окрестности графика предельной функции $y=f(x)$, т.е. между кривыми $y=f(x)-\varepsilon$ и $y=f(x)+\varepsilon$ (рис. 16.2).

Обозначение равномерной сходимости: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X.

Сформулируем другое (эквивалентное) определение равномерной сходимости функциональной последовательности.

<u>Определение 2</u>. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется равномерно сходящейся к функции $f(x)$ на множестве X, если числовая последовательность $\{\sup\limits_X |f_n(x)-f(x)|\}$ является бесконечно малой, т.е.

$$\sup_X |f_n(x)-f(x)| \to 0 \text{ при } n\to\infty. \qquad (16.1.2)$$

Эквивалентность определений 1 и 2 следует из того, что если $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ для всех x из множества X, то $\sup\limits_X |f_n(x)-f(x)| \le \varepsilon$, и обратно: если $\sup\limits_X |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, то $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ для всех $x\in X$.

<u>Примеры.</u> Пусть $f_n(x)=x^n$.

1) Рассмотрим эту последовательность на сегменте $[0\le x\le \frac{1}{2}]$. На этом сегменте

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = 0. \qquad (16.1.3)$$

Так как $\sup\limits_{[0;\frac{1}{2}]} |f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{[0,\frac{1}{2}]} |x^n - 0| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ при $n\to\infty$, то функциональная последовательность

$\{x^n\}$ сходится к $f(x)=0$ равномерно на сегменте $[0;\frac{1}{2}]$.

2) Рассмотрим последовательность $\{x^n\}$ на полуинтервале $[0 \le x < 1)$. На этом множестве снова выполняется равенство (16.13). Но при этом

$$\sup_{[0;1)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{[0;1)} |x^n| = 1 \text{ для любого } n.$$

Таким образом, условие (16.12) равномерной сходимости не выполнено, и, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ сходится к $f(x)=0$ на полуинтервале $[0;1)$ неравномерно.

Задание. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = \frac{n}{x+n}$ на множестве:

1) $0 \le x \le a$, где a — заданное положительное число;

2) $0 \le x < +\infty$.

Введём теперь понятие равномерной сходимости функционального ряда, сходящегося в каждой точке множества X.

Определение. Говорят, что функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится к своей сумме $S(x)$ равномерно на множестве X, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно к $S(x)$ на множестве X.

Это означает, ~~...~~ (в соответствии с определением 1), что $\forall \varepsilon>0\ \exists N$, такой, что $\forall n>N$ и $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$|S(x)-S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \varepsilon,$$

или (в соответствии с определением 2), что

$$\sup_X \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Примеры. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$.

1) Пусть $X = [0 \le x \le \frac{1}{2}]$.

Тогда $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$, $|S(x) - S_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$,

$$\sup_{[0;\frac{1}{2}]} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{[0;\frac{1}{2}]} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ сходится к своей сумме $S(x) = \frac{x}{1-x}$ равномерно на сегменте $[0; \frac{1}{2}]$.

2) Пусть $X = [0 \le x < 1]$.

Тогда снова $S(x) = \frac{x}{1-x}$, $|S(x) - S_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{1-x}$,

но теперь $\sup_{[0;1)} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty$ для любого n (поскольку $\frac{x^{n+1}}{1-x} \to \infty$ при $x \to 1-0$ для любого n).

Следовательно, на полуинтервале $[0; 1)$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ сходится к своей сумме $S(x) = \frac{x}{1-x}$ неравномерно.

16.5 Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов

Теорема 12 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности).

Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$, $\forall$ натурального числа p и $\forall x \in X$:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \qquad (16.14)$$

<u>Доказательство.</u> 1) Необходимость. Докажем сначала, что условие (16.14) является необходимым условием равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве X.

Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X. Тогда (по определению 1 равномерной сходимости)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а так как $n+p > n$, то $\forall n > N$, $\forall$ натурального числа p и $\forall x \in X$ также выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этих двух неравенств следует, что $\forall n > N$, $\forall$ натурального числа p и $\forall x \in X$ справедливо неравенство (16.14). Таким образом, если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве X, то выполнено условие (16.14). Утверждение теоремы о необходимости условия (16.14) доказано.

2) Достаточность. Докажем теперь, что выполнение условия (16.14) является достаточным для равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве X.

Пусть условие (16.14) выполнено. Тогда для любого фиксированного значения x из множества X числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной и, следовательно, сходится. Предел последовательности $\{f_n(x)\}$ ~~[illegible]~~ обозначим $f(x)$.

Итак, $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ на множестве X.

Отсюда следует, что при любом фиксированном n $f_{n+p}(x) \to f(x)$ при $p \to \infty$ на множестве X.

Перейдём к пределу при $p \to \infty$ в неравенстве (1). Получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n > N \text{ и } \forall x \in X.$$

Но это и означает (согласно определению 1 равномерной сходимости), что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X. Утверждение теоремы о достаточности условия (16.14) доказано.

<u>Замечание.</u> Как уже было отмечено, выполнение условия (16.14) означает, что для любого $x \in X$ последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной. Поскольку в условии (16.14) номер N — один и тот же для всех $x \in X$, то функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$, удовлетворяющую условию (16.14), можно назвать <u>равномерно фундаментальной</u> на множестве X, а теорему о критерии Коши равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ можно сформулировать так:

для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно фундаментальной на этом множестве.

<u>Примеры.</u> Последовательность $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ является равномерно фундаментальной на сегменте $[0; \frac{1}{2}]$ (и также на любом сегменте $[0; a]$, где $a < 1$), но не является равномерно фундаментальной

на полуинтервале $[0; 1)$.

Теорема 12' (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда).

Для того, чтобы функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходился равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$, $\forall$ натурального числа p и $\forall x \in X$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \qquad (16.15)$$

Утверждение теоремы 12' непосредственно следует из теоремы 12, поскольку равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ — это равномерная сходимость последовательности его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, а для равномерной сходимости последовательности $\{S_n(x)\}$ необходимо и достаточно (в силу теоремы 12), чтобы было выполнено условие (16.15), так как $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) = S_{n+p}(x) - S_n(x)$.

Перейдем к достаточным условиям (признакам) равномерной сходимости функциональных рядов.

Определение. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ с положительными членами называется мажорантным (или мажорирующим) для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X, если $\forall k$ и $\forall x \in X$ выполнено неравенство

$$|u_k(x)| \le p_k.$$

<u>Пример.</u> Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$ является мажорантным для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^{\alpha}}$ на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, поскольку $\forall k$ и $\forall x\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство $\left|\frac{\sin kx}{k^{\alpha}}\right|\le\frac{1}{k^{\alpha}}$.

<u>Теорема 13</u> (признак Вейерштрасса). Если для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ на множестве X существует сходящийся мажорантный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

<u>Доказательство.</u> Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Согласно критерию Коши для числовых рядов, $\exists N$, такой, что $\forall n>N$ и $\forall$ натурального числа p будет выполнено неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}p_k\right|=\sum_{k=n+1}^{n+p}p_k<\varepsilon. \qquad (16.16)$$

Так как (в силу условия теоремы) $\forall k$ и $\forall x\in X$ справедливо неравенство $|u_k(x)|\le p_k$, то $\forall n>N$, $\forall$ натурального числа p и $\forall x\in X$, используя неравенство (16.16), получаем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}p_k<\varepsilon.$$

Таким образом, для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ выполнено условие (16.15) из теоремы 12', и, следовательно, этот ряд сходится равномерно на множестве X. Теорема доказана.

<u>Замечание 1.</u> Отметим, что при условии теоремы 13 функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится абсолютно

на множестве X, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$.

Замечание 2. Поставим вопрос: верно ли утверждение, обратное теореме 13? Иначе говоря, следует ли из равномерной сходимости на множестве X функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ существование сходящегося мажорантного ряда для этого функционального ряда?

Ответ на этот вопрос отрицательный. Приведём пример.

Пусть числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно. На произвольном множестве X рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, у которого $u_k(x) = a_k = const$ на множестве X.

Так как (числовой) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ~~введённый~~ рассматриваемый функциональный ряд сходится равномерно (на множестве X) (по заданному $\varepsilon > 0$ найдётся "нужный" номер N, один и тот же для всех x из множества X, поскольку члены этого функционального ряда не зависят от x).

Так как $|u_k(x)| = |a_k|$, то "наименьшим" мажорантным рядом для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ является числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ("наименьшим" в том смысле, что ни один член этого мажорантного ряда нельзя уменьшить — если для какого-то ~~[illegible]~~ номера k взять $p_k < |a_k|$, то неравенство $|u_k(x)| \le p_k$ не будет выполнено, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ не будет мажорантным (для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$). Но "наименьший" мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится, поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно. ~~Т~~Таким образом, для сходящегося равномерно на множестве X функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ не существует сходящегося мажорантного ряда.

Пример. Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}, \qquad (16.17)$$

где $\alpha > 1$. Так как $\left|\frac{\sin kx}{k^{\alpha}}\right| \le \frac{1}{k^{\alpha}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, и так как числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$, то (по признаку Вейерштрасса) ~~данный~~ функциональный ряд (4) при $\alpha > 1$ сходится равномерно на всей ~~числовой~~ прямой.

Отметим, что если $0 < \alpha \le 1$, то ~~этот~~ функциональный ряд (16.17) сходится во всех точках числовой прямой (это было показано в § 16.3), но вопрос о равномерной сходимости ряда остаётся открытым, поскольку признак Вейерштрасса и его обобщение в этом случае "не работают". В самом деле, "наименьшим" мажорантным рядом для ряда является функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k^{\alpha}}$, но он расходится при $0 < \alpha \le 1$ (это также было показано в § 16.3). Мы вернёмся к вопросу о равномерной сходимости ряда (16.17) при $0 < \alpha \le 1$ после рассмотрения ещё одного признака равномерной сходимости рядов — признака Дирихле – Абеля. Предварительно введём ещё одно понятие.

<u>Определение</u>. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется <u>равномерно ограниченной</u> на множестве X, если $\exists$ число $M>0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x \in X$ выполнено неравенство

$$|f_n(x)| \le M.$$

<u>Примеры</u>. 1) Функциональная последовательность $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ является равномерно ограниченной на всей числовой прямой, так как $\forall n$ и $\forall x \in R$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le 1.$$

Таким образом, ~~...~~ для данной последовательности в качестве числа M можно взять $M=1$ (а также, разумеется, любое число, большее 1).

2) Рассмотрим функциональную последовательность $\{f_n(x)\}=\left\{\frac{xn}{x+n}\right\}$ на полупрямой $X=\{x: x\ge 0\}$.

Отметим, что: 1) при каждом фиксированном $x\in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена, поскольку

$$\forall n: |f_n(x)| = \left|\frac{xn}{x+n}\right| \le x;$$

2) $\forall n$ функция $f_n(x)=\frac{xn}{x+n}$ – ограниченная функция на полупрямой X, так как $\forall x\in X$: $|f_n(x)|\le n$.

Вместе с тем, данная функциональная последовательность не является равномерно ограниченной на полупрямой X. В самом деле,

$$f_n(n)=\frac{n\cdot n}{n+n}=\frac{n}{2}\to\infty \text{ при } n\to\infty,$$

и, следовательно, не существует такого числа M, для которого неравенство $|f_n(x)| \leq M$ выполнялось бы $\forall n$ и $\forall x \in X$.

Признак Дирихле-Абеля относится к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, b_k(x), \quad x \in X. \qquad (16.18)$$

Введём для таких рядов обозначение:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x).$$

<u>Теорема 14</u> (признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости ряда (16.18)).

Пусть выполнены условия:

2) последовательность $\{S_n(x)\}$ равномерно ограничена на множестве X (т.е. $\exists$ число $M>0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x \in X$: $|S_n(x)| \leq M$);

1) последовательность $\{b_n(x)\}$ при каждом $x \in X$ является невозрастающей (т.е. $\forall n$: $b_{n+1}(x) \leq b_n(x)$), и $b_n(x) \rightrightarrows f(x) = 0$ на множестве X;

Тогда ряд (16.18) сходится равномерно на множестве X.

Доказательство этой теоремы проводится в точности так же, как и доказательство теоремы 8 о признаке Дирихле-Абеля для числовых рядов, но только теперь нужно использовать критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

Пример. Снова рассмотрим ряд (16.17):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \text{ где } 0<\alpha\leq 1.$$

Введём обозначение: $a_k(x)=\sin kx$, $b_k(x)=\frac{1}{k^\alpha}$.

Последовательность $\{b_n(x)\}=\{\frac{1}{n^\alpha}\}$ является, очевидно, убывающей, и так как b_n не зависит от x, то $b_n \rightrightarrows 0$ на любом множестве X. Таким образом, условие 1) теоремы 14 выполнено на любом множестве X.

Для $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ в § 16.3 было получено неравенство

$$|S_n(x)|\leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}, \text{ если } x\neq 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}. \quad (16.19)$$

Возьмём сегмент $X=[\delta\leq x\leq 2\pi-\delta]$, где δ – любое число из интервала $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ (в этом случае $\delta<2\pi-\delta$).

Тогда $\forall n$ и $\forall x\in X$ справедливо неравенство

$|S_n(x)|\leq\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$. Это означает, что последовательность $\{S_n(x)\}$ равномерно ограничена на сегменте X, т.е. выполнено условие 2) теоремы 14.

Следовательно, по признаку Дирихле – Абеля ряд (16.17) при $0<\alpha\leq 1$ сходится равномерно на сегменте $X=[\delta;2\pi-\delta]$.

Так как $\forall$ (положительное) число δ можно взять сколь угодно малым, то справедливо следующее утверждение: ряд (16.17) при $0<\alpha\leq 1$ сходится равномерно на любом сегменте, принадлежащем интервалу $(0;2\pi)$, а поскольку все члены ряда — периодические функции с периодом 2π, то такое же утверждение справедливо для любого интервала

$(2\pi m;\ 2\pi m + 2\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$.

__Замечание.__ Как было уже отмечено, ряд (16.17) при $\alpha > 0$ сходится во всех точках сегмента $[0, 2\pi]$ (в точках $x = 0$ и $x = 2\pi$ все члены ряда и, следовательно, его сумма равны нулю). Естественно поставить вопрос: сходится ли ряд (16.17) при $0 < \alpha \le 1$ равномерно на всём сегменте $[0; 2\pi]$? Для этого сегмента (и также для любого сегмента $[2\pi m, 2\pi m + 2\pi]$, $m \in \mathbb{Z}$) мы не можем воспользоваться признаком Дирихле–Абеля, поскольку из неравенства (16.19) не следует равномерная ограниченность последовательности $S_n(x)$ на сегменте $[0, 2\pi]$ $\left(\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \to \infty \text{ при } x \to +0\right)$. Поэтому вопрос о равномерной сходимости ряда (16.17) при $0 < \alpha \le 1$ на всём сегменте $[0, 2\pi]$ остаётся открытым. Забегая вперёд, отметим, что для $\alpha = 1$ мы получим ответ на этот вопрос в главе 19 при изучении рядов Фурье. Будет ~~показано~~ найдена сумма ряда (16.17) при $\alpha = 1$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{при } 0 < x < 2\pi,$$

а так как $S(0) = S(2\pi) = 0$, то функция $S(x)$ разрывна в точках $x = 0$ и $x = 2\pi$. Таким образом, ряд, членами которого являются непрерывные функции $\frac{\sin kx}{k}$, ~~сходящийся~~ имеет на сегменте $[0, 2\pi]$ разрывную сумму $S(x)$. Отсюда следует, что данный ряд сходится на сегменте $[0, 2\pi]$ неравномерно, поскольку имеет место такая теорема (она будет доказана в следующем параграфе): если членами ряда являются функции, непрерывные на промежутке X, и ряд сходится равномерно на этом промежутке, то его сумма – непрерывная функция на промежутке X.

16.6 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов.

П.1. Равномерная сходимость и непрерывность.

Теорема 15. Пусть все члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ являются непрерывными функциями на промежутке X, и пусть $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ на этом промежутке. Тогда предельная функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X.

Доказательство. Докажем непрерывность функции $f(x)$ в произвольной точке x_0 множества X. По определению непрерывности (функции) нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что если $|x - x_0| < \delta$ и $x \in X$, то

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X, то $\exists N$, такой, что

$$\forall n > N \text{ и } \forall x \in X: \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (16.20)$$

в частности,

$$\forall n > N: \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16.21)$$

Возьмём какую-нибудь функцию $f_n(x)$ с номером $n > N$. Для неё выполнены неравенства (16.20) и (16.21), а поскольку $f_n(x)$ непрерывна в точке x_0 (по условию теоремы), то для заданного ε найдётся $\delta>0$, такое, что если $|x-x_0|<\delta$ и $x \in X$, то

$$|f_n(x)-f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (16.22)$$

Из (16.20)–(16.22) следует, что если $|x-x_0|<\delta$ и $x \in X$, то

$$|f(x)-f(x_0)| \le \underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(x)-f_n(x_0)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(x_0)-f(x_0)|}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

<u>Замечание.</u> Равномерная сходимость последовательности непрерывных функций является только достаточным (но не необходимым) условием непрерывности предельной функции. Приведём соответствующий пример.

Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{n}{x+n}\right\}$ на полупрямой $X = \{x : x \ge 0\}$. Очевидно, что все функции $f_n(x)$ и также предельная функция $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 1$ непрерывны на полупрямой X.

Но при этом последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)=1$ на полупрямой X неравномерно (докажите это).

<u>Теорема 15!</u> Если все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ являются непрерывными функциями на промежутке X, и ряд сходится равномерно на этом промежутке, то его сумма $S(x)$ — непрерывная функция на промежутке X.

<u>Доказательство.</u> Так как все функции $u_k(x)$

непрерывные на промежутке X, то $\forall n$ частичная сумма $S_n(x)$ является непрерывной функцией на промежутке X. По условию теоремы $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на промежутке X. Поэтому, согласно теореме 15, $S(x)$ – непрерывная функция на промежутке X. Теорема доказана.

П.2. Переход к пределу под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ на промежутке X, и пусть все функции $f_n(x)$ и $f(x)$ интегрируемы на любом сегменте, принадлежащем промежутку X. Возьмём две точки на этом промежутке – точку x_0 (зафиксируем её) и точку x (она может пробегать весь промежуток X) и рассмотрим интегралы $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$ и $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.

Поставим вопрос: справедливо ли равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \, ? \qquad (16.23)$$

Его можно записать в виде $\left[\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)\right)dt\right]$.

Если это равенство справедливо, то говорят, что можно переходить к пределу под знаком интеграла $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$.

Приведём пример, показывающий, что равенство (16.23) может не выполняться.

Пусть $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in X = \{x : x \geqslant 0\}$.

Очевидно, что $\forall x \in X$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, т.е. предельная функция $f(x)=0$ на полупрямой X.

Возьмём $x_0=0$ и любое $x>0$. Тогда

$$\int_0^x f_n(t)dt=\int_0^x nte^{-nt^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-nt^2}\Big|_0^x=\frac{1}{2}(1-e^{-nx^2}).$$

Отсюда следует, что $\forall x>0$: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt=\frac{1}{2}$.

Но $\int_0^x f(t)dt=0$ (поскольку $f(t)=0$) и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt\neq\int_0^x\left(\lim_{n\to\infty}f_n(t)\right)dt.$$

Аналогичный вопрос поставим для сходящегося на промежутке X ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$, у которого все члены $u_k(x)$ и сумма ряда интегрируемы на любом сегменте, принадлежащем промежутку X:

верно ли равенство
$$\int_{x_0}^x\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\right)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^x u_k(t)dt? \qquad (16.24)$$

Если это равенство верно, то говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ можно интегрировать почленно на сегменте $[x_0,x]$.

Отметим, что для суммы конечного числа интегрируемых функций такое равенство всегда верно. Для ряда (т.е. для суммы бесконечного числа интегрируемых функций) это равенство может не выполняться, даже если сумма ряда является интегрируемой функцией.

В качестве примера, когда равенство (16.24) не выполняется, можно взять ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$, у которого

$u_1(x) = f_1(x)$, $u_k(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x)$, $k = 2, 3, \dots$,

где $f_k(x)$ – функция из предыдущего примера: $f_k(x) = k x e^{-kx^2}$, $x \in X = \{x : x \geq 0\}$. Для этого ряда $S_n(x) = f_n(x)$, $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$, поэтому левая часть равенства (16.24) равна 0, а правая часть равна $\frac{1}{2}$, и, таким образом, это равенство не выполняется.

Оказывается, что равенства (16.23) и (16.24) будут верными, если последовательность $\{f_n(x)\}$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходятся равномерно. Более точные формулировки утверждений о справедливости равенств (16.23) и (16.24) содержатся в следующих двух теоремах.

<u>Теорема 16.</u> Пусть все члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ являются непрерывными функциями на сегменте $[a, b]$, и пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на этом сегменте. Тогда для любых x_0 и x из сегмента $[a, b]$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \qquad (16.25)$$

причём

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \text{ на сегменте } [a, b]. \qquad (16.26)$$

<u>Доказательство.</u> Прежде всего отметим, что в силу теоремы 15 предельная функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и, следовательно, интегрируема на этом сегменте.

Чтобы доказать утверждение (16.26) воспользуемся определением 1 равномерной сходимости функциональной последовательности (см. § 15.4). Согласно этому определению нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a, b]$ будет выполнено неравенство

$$\left| \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right| < \varepsilon . \qquad (16.27)$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на сегменте $[a,b]$, то $\exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

Используя это неравенство, получаем $\forall n > N$ и $\forall x \in [a,b]$:

$$\left| \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} [f_n(t) - f(t)]dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f_n(t) - f(t)|\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| = \varepsilon \frac{|x-x_0|}{|b-a|} \leq \varepsilon .$$

Итак, условие (16.27) выполнено, что и требовалось доказать.

<u>Теорема 16!</u> Если все члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ являются непрерывными функциями на сегменте $[a,b]$, и ряд сходится равномерно на этом сегменте, то для любых x_0 и x из сегмента ($[a,b]$ справедливо) равенство (16.24):

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)dt$$

(т.е. ряд можно интегрировать почленно на любом сегменте $[x_0, x]$, принадлежащем сегменту $[a,b]$), причём функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)dt$ сходится равномерно на сегменте $[a,b]$.

<u>Доказательство.</u> Так как все функции $u_k(x)$ непрерывны на сегменте $[a,b]$, то (любая) частичная сумма ряда $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ также непрерывна на сегменте $[a,b]$.

По условию теоремы $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на сегменте $[a,b]$, поэтому, согласно теореме 16,

$$\int_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} S(t)\,dt \text{ на сегменте } [a,b]. \quad (16.28)$$

Так как $\int_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt$ и $\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right)dt$, то утверждение (16.28) можно записать так:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right)dt \text{ на сегменте } [a,b].$$

Это означает, что функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt$ сходится равномерно на сегменте $[a,b]$ и его сумма равна $\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right)dt$, т.е. справедливо равенство (16.24). Теорема доказана.

П. 3. Переход к пределу под знаком производной и почленное дифференцирование ряда

Пусть $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ на промежутке X, и пусть все функции $f_n(x)$ и $f(x)$ дифференцируемы на промежутке X.

Поставим вопрос: справедливо ли равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)?$$

Его можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'. \quad (16.29)$$

Если это равенство справедливо, то говорят, что можно переходить к пределу под знаком производной.

Приведём пример, показывающий, что равенство (16.29) может не выполняться.

Пусть $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Очевидно, что $\forall x \in (-\infty, +\infty)$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, т.е. предельная функция $f(x) = 0$ на всей числовой прямой. Все функции $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ дифференцируемы во всех точках числовой прямой:

$$f_n'(x) = \cos nx, \quad f'(x) = 0.$$

Последовательность $\{\cos nx\}$ сходится в точках $x = 2\pi m$, $m \in Z$ (при этом её предел равен 1) и расходится в остальных точках числовой прямой. Следовательно, равенство (16.29) не выполнено ни в одной точке.

Аналогичный вопрос поставим для сходящегося на промежутке X ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, у которого все члены $u_k(x)$ и сумма ряда $S(x)$ — дифференцируемые функции: верно ли равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \ ? \qquad (16.30)$$

Если это равенство верно, то говорят, что <u>ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ можно дифференцировать почленно</u>.

Отметим, что для суммы конечного числа дифференцируемых функций такое равенство всегда верно, а для ряда (т.е. для суммы бесконечного числа дифференцируемых функций) равенство (16.30) может не выполняться, даже если сумма ряда является дифференцируемой функцией.

Оказывается, что равномерная сходимость играет важную роль при рассмотрении вопроса о справедливости равенств (16.29) и (16.30).

Теорема 17. Пусть выполнены условия:

1) все члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ имеют непрерывные производные $f_n'(x)$ на сегменте $[a,b]$;

2) $\{f_n(x)\} \to f(x)$ на сегменте $[a,b]$;

3) $\{f_n'(x)\} \rightrightarrows \varphi(x)$ на сегменте $[a,b]$.

Тогда функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a,b]$ и справедливо равенство

$$f'(x) = \varphi(x), \quad x \in [a,b]. \qquad (16.31)$$

Доказательство. Так как $\{f_n'(x)\} \rightrightarrows \varphi(x)$ на сегменте $[a,b]$, то по теореме 15 функция $\varphi(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, а по теореме 16 для любых x и x_0 из сегмента $[a,b]$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt. \qquad (16.32)$$

Поскольку $\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(x_0)$, а $\lim\limits_{n\to\infty}[f_n(x) - f_n(x_0)] = f(x) - f(x_0)$, то равенство (16.32) можно записать в виде $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$ или

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt.$$

При фиксированной точке x_0 $f(x_0) = const$, а интеграл $\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$ представляет собой интеграл с переменным верхним пределом. Так как $\varphi(x)$ — непрерывная функция, то интеграл с переменным верхним пределом является дифференцируемой функцией на сегменте $[a,b]$ и справедливо равенство

$$\left(\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt\right)' = \varphi(x), \quad x \in [a,b].$$

Следовательно, функция $f(x)$ также дифференцируема на сегменте $[a,b]$ и выполняется равенство (16.31): $f'(x) = \varphi(x)$. Теорема доказана.

<u>Теорема 17.</u> Пусть выполнены условия:

1) все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеют непрерывные производные $u_k'(x)$ на сегменте $[a,b]$;

2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на сегменте $[a,b]$ и его сумма равна $S(x)$;

3) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на сегменте $[a,b]$ и его сумма равна $\varphi(x)$.

Тогда функция $S(x)$ дифференцируема на сегменте $[a,b]$ и справедливо равенство

$$S'(x) = \varphi(x). \qquad (16.33)$$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим последовательность $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, т.е. $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$. Из условий теоремы следует, что:

1) все члены этой последовательности имеют непрерывные производные $S_n'(x)$ на сегменте $[a,b]$;

2) $\{S_n(x)\} \to S(x)$ на сегменте $[a,b]$;

3) $\{S_n'(x)\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k'(x)\right\} \rightrightarrows \varphi(x)$ на сегменте $[a,b]$.

Таким образом, для последовательности $\{S_n(x)\}$

выполнены все условия теоремы 17. По теореме 17 функция $S(x)$ дифференцируема на сегменте $[a,b]$ и справедливо равенство $S'(x)=\varphi(x)$, $x\in[a,b]$.
Теорема доказана.

Замечание 1. Равенство (16.33) можно записать в виде

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x),$$

Таким образом, при условиях теоремы 17′ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ можно дифференцировать почленно на сегменте $[a,b]$.

Замечание 2. Утверждение теоремы 17′ останется в силе, если условие 2) заменить условием 2′) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке x_0 сегмента $[a,b]$.

Задание. Докажите, что из условий 2′) и 3) следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на сегменте $[a,b]$.

16.7 Сходимость в среднем

В m-мерном координатном пространстве R^m расстояние между точками $M_1(x_1,x_2,\dots,x_m)$ и $M_2(y_1,y_2,\dots,y_m)$ было определено формулой (см. §   ):

$$\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_m-y_m)^2}. \qquad (16.34)$$

Если на каком-то множестве введено расстояние между элементами множества, то говорят, что в этом множестве введена метрика, а само множество с введённым расстоянием между элементами называют метрическим пространством. При этом расстояние между элементами (будем называть их также точками) должно удовлетворять (для ~~любых~~ точек x, y, z) следующим условиям:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, причём $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда точки x и y совпадают ($x = y$);

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (неравенство треугольника).

Примером метрического пространства является координатное пространство R^m с введённым по формуле (16.34) расстоянием между точками.

Сходимость последовательности точек $\{M_n\}$ в пространстве R^m определялась с помощью расстояния между точками: $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = A$, если $\rho(M_n, A) \to 0$ при $n \to \infty$.

Говорят также, что это — <u>сходимость в метрике данного пространства</u>.

В математике нередко рассматривают метрические пространства, элементами (точками) которых являются функции. Приведём примеры таких пространств.

1) Рассмотрим множество всевозможных ограниченных функций на сегменте $[a,b]$. Для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ ~~f и g~~ этого множества определим расстояние между ними по формуле

$$\rho(f,g) = \sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

<u>Задание.</u> Проверьте, что все три условия, которым должно удовлетворять расстояние, выполнены.

Сходимость последовательности функций $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ в заданной метрике означает, что

$$\rho(f_n, f) = \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$ т.е.

это — равномерная сходимость на сегменте $[a, b]$ (см. определение 2 в § 16.4).

2) Рассмотрим множество всех кусочно-непрерывных функций на сегменте $[a, b]$, (где $a<b$) удовлетворяющих условию: если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$, то

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0-0) + f(x_0+0)\right], \tag{16.35}$$

где $f(x_0-0) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, $f(x_0+0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$.

Для любых функций $f(x)$ и $g(x)$ из этого множества определим расстояние между ними по формуле

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}. \tag{16.36}$$

Условия 1) – 3), которым должно удовлетворять расстояние, при этом выполнены (проверьте это). Тот факт, что в точках разрыва функция имеет значение, определенное формулой (16.35) важен потому, что без этого условия $\rho(f, g)$ может быть равно нулю для неравных функций f и g, и, тем самым, не будет выполнено условие 1).

Сходимость последовательности функций $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ в метрике, заданной формулой (16.36), означает, что

$$\rho^2(f_n, f) = \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{16.37}$$

Такая сходимость и называется <u>сходимостью в среднем</u>.

Итак, мы вводим следующее <u>определение</u>.

Пусть все члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ и также функция $f(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$. Будем говорить, что последовательность $\{f_n(x)\}$ <u>сходится в среднем</u> к функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если выполнено условие (16.37).

Нам известны теперь три вида сходимости функциональной последовательности на сегменте $[a,b]$:

1) сходимость в каждой точке сегмента $[a,b]$ (поточечная сходимость);

2) равномерная сходимость на сегменте $[a,b]$;

3) сходимость в среднем на сегменте $[a,b]$.

Поставим вопрос: какова связь между этими видами сходимости?

Очевидно, что из равномерной сходимости функциональной последовательности на сегменте $[a,b]$ следует поточечная сходимость, т.е. сходимость этой функциональной последовательности в каждой точке сегмента $[a,b]$. Обратное, как мы знаем, неверно.

Такого же типа связь существует между равномерной сходимостью и сходимостью в среднем.

<u>Теорема 18</u>. Если все члены функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ и (функция $f(x)$) интегрируемы на сегменте $[a,b]$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на этом сегменте, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ (т.е. из равномерной сходимости следует сходимость в среднем).

<u>Доказательство</u>. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на сегменте $[a,b]$, то $\exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}.$$

Используя это неравенство, получаем $\forall n > N$:

$$\rho^2(f_n, f) = \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon.$$

Итак, $\forall n > N$ выполнено неравенство $\rho^2(f_n, f) < \varepsilon$, а это означает, что $\rho^2(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[a,b]$. Теорема 18 доказана.

Замечание. В условии теоремы мы потребовали, чтобы функция $f(x)$ (как и все функции $f_n(x)$) была интегрируемой на сегменте $[a,b]$. Можно доказать, что если все функции $f_n(x)$ интегрируемы и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на сегменте $[a,b]$, то предельная функция $f(x)$ также будет интегрируемой на сегменте $[a,b]$ (см. [ ]).

Обратное по отношению к теореме 18 утверждение не верно. Более того, из сходимости функциональной последовательности в среднем на сегменте $[a,b]$ не следует даже поточечная сходимость этой последовательности.

Пример 1. Для любого натурального числа k и любого натурального числа i, такого, что $1 \le i \le k$, определим функцию $f_{ki}(x)$ на сегменте $0 \le x \le 1$ следующим образом:

$$f_{ki}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{i-1}{k} \le x \le \frac{i}{k}, \\ 0 & \text{в остальных точках сегмента } [0;1]. \end{cases}$$

График функции $y = f_{ki}(x)$ представлен на рисунке 16.3. Составим функциональную последовательность

$$\{f_n(x)\} = f_{11}(x), f_{21}(x), f_{22}(x), \ldots, f_{k1}(x), f_{k2}(x), \ldots$$
$$\ldots f_{kk}(x), \ldots$$

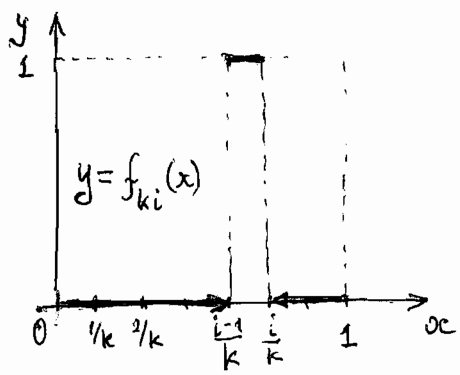

Рис. 16.3

Эта последовательность сходится в среднем к функции $f(x)=0$ на сегменте $[0;1]$, поскольку

$$\rho^2(f_{ki}, f) = \int_0^1 (f_{ki}(x) - f(x))^2 dx = \int_{\frac{i-1}{k}}^{\frac{i}{k}} 1 \cdot dx = \frac{1}{k} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Вместе с тем, последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится ни в одной точке x из сегмента $[0;1]$, так как $\forall x \in [0;1]$ эта последовательность содержит бесконечно много членов, равных 0, и бесконечно много членов, равных 1.

Таким образом, из сходимости в среднем не следует поточечная сходимость.

Пример 2. Рассмотрим (на сегменте $[0 \le x \le \pi]$) функциональную последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} \sin nx, & \text{если } 0 \le x \le \frac{\pi}{n}, \\ 0 & \text{в остальных точках сегмента } [0; \pi]. \end{cases}$$

Так как $\frac{\pi}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\forall x \in (0;1]$ $\exists N$, такой, что $\forall n > N$ выполнено неравенство $\frac{\pi}{n} < x$ и, следовательно, $f_n(x) = 0$ $\forall n > N$. Отсюда следует, что

$$\forall x \in (0; 1] : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0.$$

Для $x = 0$ это предельное равенство также верно, поскольку $\forall n : f_n(0) = \sqrt{n} \cdot \sin 0 = 0$ и, следовательно, $\lim_{n \to \infty} f_n(0) = 0$.

Итак, $\forall x \in [0,1] : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, т.е. $f_n(x) \to f(x) = 0$ на сегменте $[0; 1]$. Это наглядно видно на рисунке 16.4, где представлены графики некоторых членов последовательности.

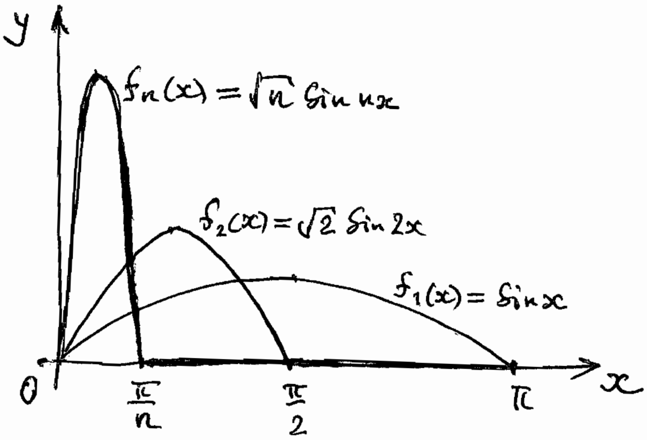

Рис. 16.4

Покажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится в среднем к функции $f(x)=0$ на сегменте $[0;\pi]$.

В самом деле, $\forall n$:

$$\rho^2(f_n,f)=\int_0^{\pi} f_n^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{n}} n\sin^2 nx\,dx = n\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx = \left(\frac{n}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2nx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{n}}=\frac{\pi}{2}.$$

Итак, $\forall n:\ \rho^2(f_n,f)=\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, условие $\rho^2(f_n,f)\to 0$ при $n\to\infty$ не выполнено. А это и означает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится в среднем к функции $f(x)=0$ на сегменте $[0;\pi]$.

Таким образом, из поточечной сходимости не следует сходимость в среднем.

1.9 Введём теперь понятие сходимости в среднем для функционального ряда.

<u>Определение</u>. Говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, если последовательность $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда сходится в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, т.е. если

$$\int_a^b\left[S(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right]^2dx\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Отметим, что ряд, сходящийся в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, может не сходиться поточечно, и тогда функция $S(x)$ не будет суммой этого ряда.

Оказывается, что сходимость функционального ряда в среднем обеспечивает возможность почленного интегрирования этого ряда, а сходимость в среднем функциональной последовательности обеспечивает возможность перехода к пределу под знаком интеграла. Рассмотрим соответствующие теоремы.

Теорема 19.

Если все члены функциональной (последовательности $\{f_n(x)\}$) и функция $f(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к функции $f(x)$ на этом сегменте, то $\forall x_0$ и x из сегмента $[a,b]$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

(т.е. можно переходить к пределу под знаком интеграла), причём

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \text{ на сегменте } [a,b].$$

Доказательство. По условию

$$\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx \to 0 \text{ при } n\to\infty, \qquad (16.38)$$

а нужно доказать, что для любого фиксированного x_0

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \text{ на сегменте } [a,b]$$

или, что то же самое,

$$\int_{x_0}^{x} [f_n(t)-f(t)]\,dt \rightrightarrows 0 \text{ на сегменте } [a,b].$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

применительно к интегралу $\int_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]\,dt$. Получим

$$\left|\int_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]\cdot 1\,dt\right| \le \sqrt{\int_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]^2dt\cdot\int_{x_0}^{x}1^2dt} \le$$

$$\le \sqrt{\int_a^b [f_n(t)-f(t)]^2dt\cdot(b-a)}\ . \qquad (16.39)$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon>0$. Из условия (16.38) дует, что $\exists N$, такой, что $\forall n>N$ правая часть в неравенстве (16.39) будет меньше ε. Следовательно, $\forall n>N$ и $\forall x\in[a,b]$ будет выполнено неравенство

$$\left|\int_{x_0}^{x}[f_n(t)-f(t)]\,dt\right| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ на сегменте $[a,b]$. Теорема 19 доказана.

<u>Теорема 19'</u> Если все члены функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ и функция $S(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, то $\forall\, x_0$ и x из сегмента $[a,b]$ справедливо равенство

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_k(t)\,dt \qquad (16.40)$$

(т.е. ряд можно интегрировать почленно), причём функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_k(t)\,dt$ сходится к функции $\int_{x_0}^{x}S(t)\,dt$ равномерно на сегменте $[a,b]$.

Доказательство. По условию последовательность частичных сумм ряда $\{S_n(x)\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right\}$ сходится в среднем к функции $S(x)$ на сегменте $[a,b]$.

Поэтому, согласно теореме 19,

$$\int_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} S(t)\,dt \text{ на сегменте } [a,b]$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} S(t)\,dt \text{ на сегменте } [a,b].$$

Это и означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt$ сходится к функции $\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt$ равномерно на сегменте $[a,b]$ и справедливо равенство (16.40). Теорема 19' доказана.

16.8 Теорема Арцéла.

Мы знаем, что из ограниченной числовой последовательности $\{x_n\}$ (и также из ограниченной последовательности $\{M_n\}$ точек m-мерного евклидова пространства) можно выделить сходящуюся подпоследовательность (теорема Больцано-Вейерштрасса). А верно ли аналогичное утверждение для функциональной последовательности? Теорема Арцела даёт (при определённых условиях) положительный ответ на этот вопрос. Более того, в этой теореме речь пойдёт о выделении подпоследовательности, равномерно сходящейся на заданном сегменте.

Чтобы сформулировать теорему Арцела,

нам понадобится ещё одно понятие.

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, заданная на промежутке X, называется равностепенно непрерывной на этом этом промежутке, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x'$ и x'' из промежутка X, удовлетворяющих условию $|x'-x''|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon.$$

Главным моментом в этом определении является то, что для любого заданного ε найдётся "нужное" δ, одно и то же для всех функций $f_n(x)$.

Из данного определения следует, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на промежутке X, то каждая функция $f_n(x)$ является равномерно непрерывной на этом промежутке. Обратное не верно.

Пример. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}=\{\sin nx\}$ на сегменте $[0\le x\le 1]$.

Каждая функция $f_n(x)=\sin nx$ непрерывна на сегменте $[0;1]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на этом сегменте (по теореме Кантора).

Вместе с тем данная последовательность не является равностепенно непрерывной. В самом деле, возьмём $\varepsilon=\frac{1}{2}$ и положим $x'=\frac{\pi}{2n}$, $x''=\frac{\pi}{n}$.

Тогда $\forall \delta>0\ \exists n$, такое, что $|x'-x''|=\frac{\pi}{2n}<\delta$, но при этом

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = |\sin nx' - \sin nx''| = |\sin \tfrac{\pi}{2} - \sin \pi| = 1 > \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{\sin nx\}$ не является равностепенно непрерывной на сегменте $[0;1]$.

<u>Задание</u>. Докажите, что если все функции $f_n(x)$ дифференцируемы на промежутке X и последовательность $\{f_n'(x)\}$ равномерно ограничена на этом промежутке (т.е. $\exists M>0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x \in X$: $|f_n'(x)| \le M$), то последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на промежутке X.

<u>Теорема 20 (Арцела)</u>. Если функциональная последовательность равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на сегменте, то из неё можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на этом сегменте.

<u>Доказательство.</u> Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на сегменте $[a,b]$. Доказательство теоремы проведём в два этапа:

1) на первом этапе из последовательности $\{f_n(x)\}$ выделим подпоследовательность, сходящуюся во всех рациональных точках сегмента $[a,b]$.

2) на втором этапе докажем, что эта подпоследовательность сходится равномерно на сегменте $[a,b]$.

1-й этап. Множество всех рациональных точек сегмента $[a,b]$ счётно, т.е. все рациональные числа этого сегмента можно занумеровать с помощью натуральных чисел. Пусть $\{x_n\} = (= x_1, x_2, \ldots)$ — последовательность, составленная из всех натуральных чисел сегмента $[a,b]$. Рассмотрим числовую последовательность $\{f_n(x_1)\}$. Она ограничена и, следовательно, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую обозначим так:

$$f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \ldots, f_{1n}(x_1), \ldots ;$$

каждый член подпоследовательности снабжён двумя индексами, причём первый индекс у всех членов один и тот же — он совпадает с номером точки x_1.

Итак, функциональная подпоследовательность

$$f_{11}(x), f_{12}(x), \ldots, f_{1n}(x), \ldots$$

сходится в точке x_1. Выделим из неё подпоследовательность, сходящуюся в точке x_2, и занумеруем её так:

$$f_{21}(x), f_{22}(x), \ldots, f_{2n}(x), \ldots$$

(первый индекс совпадает с номером точки x_2).

Эта подпоследовательность сходится в двух точках — x_1 и x_2. Из неё выделим подпоследовательность, сходящуюся в точке x_3, и так далее. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность подпоследовательностей:

$$\begin{array}{l} f_{11}(x),\ f_{12}(x), \ldots, f_{1n}(x), \ldots \\ f_{21}(x),\ f_{22}(x), \ldots, f_{2n}(x), \ldots \\ \text{— — — — — — — — — —} \\ f_{n1}(x),\ f_{n2}(x), \ldots, f_{nn}(x), \ldots \\ \text{— — — — — — — — — —} \end{array}$$

При этом последовательность, стоящая в n-й строке, сходится в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Поэтому <u>диагональная подпоследовательность</u>

$$f_{11}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots \qquad (16.41)$$

сходится во всех точках $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. В самом деле, в любой точке x_n диагональная подпоследовательность, начиная с номера n, т.е. последовательность

$$f_{nn}(x_n),\ f_{n+1,n+1}(x_n),\ \ldots, \qquad (16.42)$$

является подпоследовательностью последовательности

$f_{n1}(x_n), f_{n2}(x_n), \ldots, f_{nn}(x_n), \ldots$, стоящей в n-й строке,

а эта последовательность сходится. Поэтому и её подпоследовательность (16.42) сходится, откуда следует, что последовательность (16.41) сходится в точке x_n.

Итак, диагональная подпоследовательность (16.41) сходится во всех рациональных точках сегмента $[a,b]$.

<u>2-й этап.</u> Докажем теперь, что подпоследовательность (16.41) сходится равномерно на сегменте $[a,b]$. Для этого достаточно доказать, что она является равномерно фундаментальной на сегменте $[a,b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$, $\forall m > N$ и $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$\left| f_{nn}(x) - f_{mm}(x) \right| < \varepsilon. \qquad (16.43)$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на сегменте $[a,b]$, то $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall n$ и $\forall x'$ и x'' из сегмента $[a,b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon/3. \qquad (16.44)$$

Для указанного δ можно выбрать из последовательности $\{x_n\}$ конечное число (рациональных) точек $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_p}$ так, что они разобьют сегмент $[a, b]$ на частичные сегменты, длины которых меньше δ (считаем, что число таких точек равно p). Тогда $\forall x \in [a, b]\ \exists x_{n_i}$, такое, что $|x - x_{n_i}| < \delta$, и, следовательно, в силу неравенства (16.44) $\forall n$ выполняется неравенство

$$|f_{nn}(x) - f_{nn}(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (16.45)$$

Подпоследовательность (16.41) сходится во всех рациональных точках (сегмента $[a,b]$), в том числе и в точках $x_{n_1}, \dots, x_{n_p}$. Поэтому, согласно критерию Коши для числовых последовательностей, для заданного $\varepsilon > 0\ \exists N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall m > N$ будет выполнено неравенство

$$|f_{nn}(x_{n_i}) - f_{mm}(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (16.46)$$

причём существует общий номер N для всех точек $x_{n_1}, \dots, x_{n_p}$, поскольку этих точек – конечное число (p точек).

Так как $\forall x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$|f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| \le |f_{nn}(x) - f_{nn}(x_{n_i})| +$$

$$+ |f_{nn}(x_{n_i}) - f_{mm}(x_{n_i})| + |f_{mm}(x_{n_i}) - f_{mm}(x)|,$$

и так как первое и третье слагаемые в правой части меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ в силу (16.45), а второе слагаемое $\forall n >$ и $\forall m > N$

меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ в силу (16.46), то мы приходим к выводу: для ~~заданного~~ произвольно $\varepsilon > 0$ $\exists N$, такой, что $\forall n > N$, $\forall m > N$ и $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство (16.43):

$$|f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| < \varepsilon.$$

Это означает, что подпоследовательность $\{f_{nn}(x)\}$ является равномерно фундаментальной на сегменте $[a,b]$, и, следовательно, она сходится равномерно на этом сегменте. Теорема Арцела доказана.

Замечание. Вместо условия равномерной ограниченности последовательности $\{f_n(x)\}$ можно потребовать её ограниченность хотя бы в одной точке сегмента. Из ограниченности в какой-то одной точке и равностепенной непрерывности следует равномерная ограниченность последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте.