

Дополнительные вопросы для проведения теоретического зачета на экспериментальном потоке. Декабрь 2009 г.

Часть 2. Последовательности, ряды, бесконечные произведения, несобственные интегралы.

1. Дать определение бесконечного произведения и его сходимости.
2. Сформулировать необходимый признак сходимости бесконечных произведений.
3. Сформулировать критерий сходимости бесконечного произведения в терминах сходимости бесконечного ряда.
4. Сформулировать критерий сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k), \quad a_k > 0.$$

5. Сформулировать признак сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$$

при произвольных знаках чисел a_k .

6. Сформулировать признаки расходимости бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$$

к нулю.

7. Дать определение абсолютной сходимости бесконечного произведения.
8. Сформулировать критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k).$$

9. Доказать сходимость и найти значение бесконечного произведения

$$\prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^2 - 4}{k^2 - 1}.$$

10. Доказать сходимость и найти значение бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{k(k+2)} \right].$$

11. Следует ли из сходимости произведений $\prod_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\prod_{k=1}^{\infty} q_k$ сходимость произведения $\prod_{k=1}^{\infty} (p_k + q_k)$?

12. Исследовать сходимость произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \right)^p$$

в зависимости от p .

13. Исследовать сходимость произведения

$$\prod_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{k+1}{k+2}}$$

14. Исследовать бесконечное произведение

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^k}{\ln k} \right]$$

на абсолютную и условную сходимость.

15. Исследовать бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{k^{(-1)^k}}$$

на абсолютную и условную сходимость.

16. Записать формулу Эйлера для дзета-функции Римана.

17. Сформулировать подробное определение евклидова пространства $Q[a, b]$.

18. Записать тождество параллелограмма для нормы в евклидовых пространствах.

19. Сформулировать критерий существования в нормированном пространстве скалярного произведения, согласованного с нормой.

20. Доказать, что в пространстве $C[a, b]$ не существует скалярного произведения, согласованного с нормой.

21. Записать неравенство Гельдера. Для каких функций оно имеет место ?

22. Записать интегральное неравенство Минковского.

23. Дать определение фундаментальной последовательности в метрическом пространстве. Привести примеры сходящихся и несходящихся фундаментальных последовательностей в метрических пространствах.

24. Дать определение полного метрического пространства. Привести примеры полных и неполных метрических пространств.