ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ.

1. Сформулируйте определение равномерной сходимости функциональной последовательности.
2. Сформулируйте определение равномерной сходимости функционального ряда.
3. Сформулируйте отрицание к определению равномерной сходимости функциональной последовательности.
4. Сформулируйте отрицание к определению равномерной сходимости функционального ряда.
5. Сформулируйте определение сходимости в среднем функциональной последовательности.
6. Сформулируйте определение равномерно ограниченной функциональной последовательности.
7. Сформулируйте определение равностепенно непрерывной функциональной последовательности.
8. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.
9. Сформулируйте критерий неравномерной сходимости функциональной последовательности (отрицание к формулировке критерия Коши).
10. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.
11. Сформулируйте критерий неравномерной сходимости функционального ряда (отрицание к формулировке критерия Коши).
12. Сформулируйте признак Вейерштрасса (мажорантный) равномерной сходимости функционального ряда.
13. Сформулируйте признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости функционального ряда.
14. Сформулируйте теорему о непрерывности предела функциональной последовательности.
15. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы функционального ряда.
16. Сформулируйте теорему о переходе к пределу под знаком производной для функциональной последовательности.
17. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.
18. Сформулируйте теорему о переходе к пределу под знаком интеграла для функциональной последовательности.
19. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.
20. Исследуйте функциональную последовательность на равномерную сходимость на указанном интервале.

20.1. $f_n(x) = x^n$, $x \in (0;1)$.

20.2. $f_n(x) = \arcsin(x^n)$, $x \in (0;1)$.

20.3. $f_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n)$, $x \in (0;1)$.

20.4. $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \in (0;1)$.

20.5. $f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^n}\right)$, $x \in (0;1)$.

20.6. $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in (-\infty;+\infty)$.

20.7. $f_n(x) = \ln(1 - x^n)$, $x \in (0;1)$.

20.8. $f_n(x) = e^{-nx}$, $x \in (0,1)$.

20.9. $f_n(x) = e^{-nx}$, $x \in [1;+\infty)$.

20.10. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [0;1]$.

20.11. $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$, $x \in [0;+\infty)$.

20.12. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^4}$, $x \in (-\infty;+\infty)$.

21. Докажите, что функция непрерывна на указанном интервале:

21.1. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$, $x \in (1;+\infty)$

21.2. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^x}$, $x \in (0;+\infty)$

21.3. $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{k}x}{1+k^4x^2}$, $x\in\mathbb{R}$

21.4. $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{kx}{1+k^4x^2}$, $x\in[1;+\infty)$

21.5. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nxe^{-n^2x}$, $x\in[1;+\infty)$

21.6. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nxe^{-n^3x}$, $x\in\mathbb{R}$

22. Докажите, что функция $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную на интервале $\left(-\infty;\infty\right)$.

23. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x)=x^n\sqrt{1-x}$ сходится в каждой точке и в среднем на сегменте $[0;1]$ к функции $f(x)=0$.

24. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x)=nx^n\sqrt{1-x}$ сходится в каждой точке сегмента $[0;1]$ к функции $f(x)=0$ и не сходится в среднем на сегменте $[0;1]$ к этой функции.

25. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x)=n\sqrt{x}\left(1-x\right)^n$ сходится в каждой точке сегмента $[0;1]$ к функции $f(x)=0$ и не сходится в среднем на сегменте $[0;1]$ к этой функции.

26. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x)=\sqrt{n}\sqrt{\sin x}\,(\cos x)^n$ сходится в каждой точке сегмента $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ к функции $f(x)=0$ и не сходится в среднем на сегменте $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ к этой функции.

27. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x)=x^n$ сходится в среднем на сегменте $[0;1]$ к функции $f(x)=0$.

28. Докажите, что функция $f(p)=\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\sin x\sqrt{x}}{x^p}dx$ непрерывна при $p\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

29. Докажите, что функция $\int\limits_1^{\infty}\sqrt{x}\sin\left(x^p\right)dx$ непрерывна при $p\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

30. Докажите, что функция $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\cos x^2-e^{-x^2}}{x^p}dx$ непрерывна при $p(-1;+\infty)$.

31. Докажите, что функция $f(p)=\int_0^{+\infty}e^{-(x+p)^2}dx$ непрерывна при $p(0;+\infty)$.

32. Докажите, что функция $f(p)=\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^p}dx$ непрерывна при $p\in(2;+\infty)$.

33. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n n}$, используя почленное дифференцирование ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ при $|x|<1$.

34. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n n}$, используя возможность почленного дифференцирования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$, при $|x|<1$.

35. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$, используя возможность почленного интегрирования ряда $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ при $|x|<1$.

36. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$, используя возможность почленного интегрирования ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n$, при $|x|<1$.

37. Найдите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)\cdot 4^{2n+1}}$, используя возможность почленного дифференцирования ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ при $|x|<1$.

38. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{n}$, используя возможность почленного дифференцирования ряда $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$ при $x>0$ и равенство $S(\ln 2)=\ln 2$.

39. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} e^{-n}}{n}$, используя возможность почленного дифференцирования ряда $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} e^{-nx}}{n}$ и равенство $S(\ln 2)=\ln\frac{3}{2}$ при $x>0$.

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА.

1. Сформулируйте определение несобственного интеграла I рода.
2. Сформулируйте определение несобственного интеграла II рода.
3. Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственного интеграла I рода.
4. Сформулируйте отрицание к формулировке критерия Коши сходимости несобственного интеграла I рода.
5. Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственного интеграла II рода.
6. Сформулируйте отрицание к формулировке критерия Коши сходимости несобственного интеграла II рода.
7. Сформулируйте признак сравнения для несобственных интегралов I рода.
8. Сформулируйте признак сравнения для несобственных интегралов II рода.
9. Сформулируйте признак Дирихле-Абеля сходимости несобственного интеграла I рода.
10. Сформулируйте определение равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
11. Сформулируйте отрицание к определению равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
12. Сформулируйте теорему о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра.
13. Сформулируйте теорему об интегрировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра.
14. Сформулируйте теорему о дифференцировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра.
15. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
16. Сформулируйте критерий неравномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра (отрицание к формулировке критерия Коши).

17. Сформулируйте признак Вейерштрасса (мажорантный) равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
18. Сформулируйте признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
19. Сформулируйте теорему о непрерывности несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
20. Сформулируйте теорему об интегрировании по параметру несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
21. Сформулируйте теорему о дифференцировании по параметру несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
22. Запишите формулу для бета-функции $\mathrm{B}(p,q)$ в виде несобственного интеграла. Укажите область сходимости.
23. Запишите формулу для гамма-функции $\Gamma(p)$ в виде несобственного интеграла. Укажите область сходимости.

24. Исследуйте интеграл на равномерную сходимость на указанном множестве изменения параметра.

24.1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $p \in (1;2)$.

24.2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $p \in (2;+\infty)$.

24.3. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^p}$, $p \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$.

24.4. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^p}$, $p \in (0;1)$.

24.5. $\int\limits_0^{+\infty} pe^{-px}dx$, $p \in [a;b]$, $0 < a < b$.

24.6. $\int\limits_0^{+\infty} pe^{-px}dx$, $p \in [0;b]$, $b > 0$.

24.7. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}\sin xdx$, $p \in [a;+\infty)$, $a > 0$;

24.8. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}dx$, $p \in (0;+\infty)$.

24.9. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}dx$, $p \in [a;+\infty)$, $a > 0$.

25. Укажите области равномерной сходимости для гамма-функции $\Gamma(p)$.
26. Докажите, что гамма-функция $\Gamma(p)$ непрерывна при $p > 0$.
27. Докажите, что гамма-функция удовлетворяет тождеству $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.
28. Напишите формулу, выражающую бета-функцию через гамма-функцию, и докажите, что $B(p,q)$ непрерывна в области $p > 0$, $q > 0$.
29. Вычислите $\int_0^1 x^2 (\ln x)^2\, dx$, с помощью дифференцирования по параметру интеграла $\int\limits_0^1 x^p dx$.
30. Вычислите $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\sin xdx$, с помощью дифференцирования по параметру интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos qxdx$.
31. Вычислите $\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\cos xdx$, с помощью дифференцирования по параметру интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin qxdx$.

32. Вычислите $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$, с помощью дифференцирования по параметру интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2} dx$;

33. Вычислите $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-px} dx$, $p > 0$, с помощью дифференцирования по параметру.

34. Вычислите $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} e^{-px} dx$, $p > 0$, с помощью дифференцирования по параметру.