Математическая логика

Бадьин А. В.

Содержание

Обозначения

Логические связки

$\neg A$ — отрицание;
$(A \wedge B)$ — конъюнкция; союз «и»;
$(A \vee B)$ — дизъюнкция; союз «или»;
$(A \implies B)$ — импликация; оборот «если..., то...»;
$(A \iff B)$ — эквивалентность.

Кванторы

$\forall x A$ — квантор всеобщности;
$\forall x A B$ — ограниченный квантор всеобщности; $\forall x A B \iff \forall x (A \implies B)$;
$\exists x A$ — квантор существования;
$\exists x A B$ — ограниченный квантор существования; $\exists x A B \iff \exists x (A \wedge B)$;
$\exists ! x A$ — квантор существования и единственности;
$\exists ! x A B$ — ограниченный квантор существования и единственности;

$$\exists ! x A B \iff \exists ! x (A \wedge B);$$

$\varepsilon x A$ — квантор выбора;
$\varepsilon x A B$ — ограниченный квантор выбора; $\varepsilon x A B = \varepsilon x (A \wedge B)$.

Оператор подстановки

$\mathrm{Subst}(A; x_1, \ldots, x_r; \varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ — оператор подстановки.

Множества

$\mathrm{Set}(A)$ — «A — множество»;
$(x \in A)$ — «объект x принадлежит множеству A»;
$\{x \colon A\}$ — множество всех объектов, удовлетворяющих условию «A»;
$(A \subseteq B)$ — «A — подмножество множества B»;
$(A \subset B)$ — «A — собственное подмножество множества B»;

$$A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B);$$

$\varnothing$ — пустое множество;
$P(A)$ — множество всех подмножеств множества A;
$\{x_1, \ldots, x_r\}$ — множество, образованное объектами $x_1, \ldots, x_r$;

$$\{x_1, \ldots, x_r\} = \{u \colon u = x_1 \vee \cdots \vee u = x_r\};$$

$(x_1, \ldots, x_r)$ — упорядоченный набор, образованный объектами $x_1, \ldots, x_r$;
$(A \cap B)$ — пересечение множеств A, B;
$(A \cup B)$ — объединение множеств A, B;
$\cup\mu$ — объединение системы множеств μ; $\cup\mu = \big\{x \colon \exists A (A \in \mu \wedge x \in A)\big\}$;
$(A \setminus B)$ — разность множеств A, B;
$(A_1 \times \cdots \times A_r)$ — прямое произведение множеств $A_1, \ldots, A_r$;
(A^r) — прямая степень множества A.

Функции

$\mathrm{D}(F)$ — область определения функции F;
$\mathrm{D}(F, A)$ — полный прообраз множества A под действием функции F;

$\mathrm{R}(F)$ — область значений функции F;

$F[A]$ — образ множества A под действием функции F;

$\{\varphi\}_{x\colon A}$ — функция, область определения которой определяется утверждением «A», а значения которой определяются выражением «φ»; $\{\varphi\}_{x\colon A} = F$, где: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \{x\colon A\}$, $\forall x A\bigl(F(x) = \varphi\bigr)$.

$F\colon A \to B$ — «функция F действует из множества A в множество B»; «F — функция, $\mathrm{D}(F) \subseteq A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$»;

$\mathrm{fun}(A, B)$ — множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F\colon A \to B$;

$F\colon A \implies B$ — «функция F действует из всего множества A в множество B»; «F — функция, $\mathrm{D}(F) = A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$»;

$\mathrm{Fun}(A, B)$ — множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F\colon A \implies B$;

$F|_A$ — ограничение функции F на множество A;

$F_2 \circ F_1$ — композиция функций F_2, F_1;

F^{-1} — обратная функция к обратимой функции F.

Числа

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;

$\mathbb{Z}_+ = \{k\colon k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant 0\}$;

$\mathbb{N} = \{k\colon k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant 1\}$;

$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$;

$\overline{\mathbb{Z}}_+ = \{k\colon k \in \overline{\mathbb{Z}} \wedge k \geqslant 0\}$;

$\overline{\mathbb{N}} = \{k\colon k \in \overline{\mathbb{Z}} \wedge k \geqslant 1\}$;

$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;

$\mathbb{Q}_+ = \{x\colon x \in \mathbb{Q} \wedge x \geqslant 0\}$;

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$;

$\overline{\mathbb{Q}}_+ = \{x\colon x \in \overline{\mathbb{Q}} \wedge x \geqslant 0\}$;

$\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел;

$\mathbb{R}_+$ — $\{x\colon x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0\}$;

$\overline{\mathbb{R}}$ — $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$;

$\overline{\mathbb{R}}_+$ — $\{x\colon x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x \geqslant 0\}$.

Лекция 1. Логико-математическая символика

1.1. Логические связки

Замечание. Так как курс математической логики не входит в программу обучения на физическом факультете МГУ, то в настоящей лекции изложение будет вестись фрагментарно и на инженерном уровне строгости.

Чтобы не входить в противоречие с тем жаргонным языком, который обычно используют математики и физики, я буду называть утверждением то, что логики называют формулой и выражением то, что логики называют термом.

Логическими связками называются значки: $\neg$ (отрицание), $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\implies$ (импликация), $\iff$ (эквивалентность).

Пусть A — утверждение. Обозначим через $\neg A$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	$\neg A$
0	1
1	0

.

Утверждение $\neg A$ можно читать: «неверно, что A» или «не A». Роль отрицания в математическом языке похожа на роль частицы «не» в разговорном языке.

Пусть A, B — утверждения. Обозначим через $(A \wedge B)$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	B	$(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

.

Утверждение $(A \wedge B)$ можно читать: «A и B». Далее часто будем писать $A \wedge B$ вместо $(A \wedge B)$. Будем говорить, что A, B — члены конъюнкции $A \wedge B$. Роль конъюнкции в математическом языке похожа на роль союза «и» в разговорном языке.

Пусть A, B — утверждения. Обозначим через $(A \vee B)$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	B	$(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

.

Утверждение $(A \vee B)$ можно читать: «A или B». Далее часто будем писать $A \vee B$ вместо $(A \vee B)$. Будем говорить, что A, B — члены дизъюнкции $A \vee B$. **Внимание! Дизъюнкция истинных утверждений истинна.** Роль дизъюнкции в математическом языке похожа на роль союза «или» в разговорном языке (если союз «или» употребляется в соединительном смысле).

Пусть A, B — утверждения. Обозначим через $(A \implies B)$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	B	$(A \implies B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

.

Утверждение $(A \implies B)$ можно читать: «если A, то B» или «из A следует B». Далее часто будем писать $A \implies B$ вместо $(A \implies B)$. Будем говорить, что: A — посылка импликации $A \implies B$; B — заключение импликации $A \implies B$. **Внимание! Импликация с ложной посылкой истинна для любого заключения.** Роль импликации в математическом языке похожа на роль оборота «если. . . , то. . . » в разговорном языке (если при употреблении этого оборота считается, что из лжи следует всё, что угодно).

Пусть A, B — утверждения. Обозначим через $(A \iff B)$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	B	$(A \iff B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

.

Утверждение $(A \iff B)$ можно читать: «утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда утверждение B справедливо» или «A эквивалентно B». Далее часто будем писать $A \iff B$ вместо $(A \iff B)$. Роль эквивалентности в математическом языке похожа на роль оборота «. . . тогда и только тогда, когда. . . » в разговорном языке.

Замечание. Пусть A, B, C — утверждения. Используя истинностные таблицы, нетрудно доказать, что:

$$\begin{gathered}
\neg\neg A \iff A, \\
\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B), \\
\neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B), \\
(A \wedge B) \iff (B \wedge A), \\
\big((A \wedge B) \wedge C\big) \iff \big(A \wedge (B \wedge C)\big), \\
(A \vee B) \iff (B \vee A), \\
\big((A \vee B) \vee C\big) \iff \big(A \vee (B \vee C)\big), \\
\big(A \wedge (B \vee C)\big) \iff \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big), \\
\big(A \vee (B \wedge C)\big) \iff \big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big), \\
(A \implies B) \iff (\neg A \vee B), \\
(A \iff B) \iff \big((A \implies B) \wedge (B \implies A)\big).
\end{gathered}$$

Очевидно:

$$\begin{gathered}
\neg(A \implies B) \iff (A \wedge \neg B), \\
(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A), \\
(A \iff B) \iff (\neg A \iff \neg B).
\end{gathered}$$

1.2. Кванторы

Кванторами называются значки: $\forall$ (квантор всеобщности или квантор общности), $\exists$ (квантор существования), $\exists!$ (квантор существования и единственности), ε (квантор выбора).

Пусть: A — утверждение, «x» — переменная. Будем писать $\forall xA$, если для любого допустимого объекта x справедливо утверждение A.

Пусть: A, B — утверждения, «x» — переменная. Будем писать $\forall xAB$, если:

$$\forall x(A \implies B).$$

Утверждение $\forall xAB$ можно читать: «для любого допустимого объекта x, удовлетворяющего условию A, справедливо утверждение B» или «для любого допустимого объекта x, такого, что A, справедливо утверждение B».

Пусть: A — утверждение, «x» — переменная. Будем писать $\exists xA$, если существует допустимый объект x, удовлетворяющий условию A. Утверждение $\exists xA$ можно читать: «существует допустимый объект x, такой, что A».

Пусть: A, B — утверждения, «x» — переменная. Будем писать $\exists xAB$, если:

$$\exists x(A \land B).$$

Утверждение $\exists xAB$ можно читать: «существует допустимый объект x, удовлетворяющий условию A, такой, что B» или «существует допустимый объект x, такой, что A, удовлетворяющий условию B».

Пусть: A — утверждение, «x» — переменная, «φ» — выражение. Обозначим через $\operatorname{Subst}(A; x; \varphi)$ утверждение, аналогичное утверждению A, но сформулированное не относительно объекта x, а относительно объекта φ.

Замечание (Внимание! Только для особо интересующихся). Пусть: A — утверждение, «x» — переменная, «φ» — выражение. Возникает впечатление, что справедливо следующее правило: для построения утверждения $\operatorname{Subst}(A; x; \varphi)$ нужно в утверждении A заменить переменную «x» на выражение «φ». Однако, здесь возникает целый ряд трудностей, связанных с тем, что: переменная «x» может больше одного раза входить в утверждение A; переменная «x» в утверждении A может находиться в области действия некоторого квантора по переменной «x»; переменная «x» в утверждении A может находиться в области действия некоторого квантора по некоторой переменной, содержащейся в выражении «φ». Для преодоления этих трудностей нужно вводить следующие понятия: символ (цепочка символов); вхождение символа (цепочки символов) в утверждение (выражение); область действия квантора; связанное вхождение переменной в утверждение (выражение); свободное вхождение переменной в утверждение (выражение). Именно так и поступают в современной математической логике, причём оператор подстановки определяют индукцией по построению утверждения A.

Пусть: A — утверждение, «x» — переменная. Выберем переменную «y», удовлетворяющую условиям: утверждение A не содержит переменную «y»; «x», «y» — различные переменные. Будем писать $\exists!xA$, если:

$$\exists xA \land \forall x \forall y \big(A \land \operatorname{Subst}(A; x; y) \implies x = y\big).$$

Утверждение $\exists!xA$ можно читать: «существует единственный допустимый объект x, удовлетворяющий условию A» или «существует единственный допустимый объект x, такой, что A».

Замечание. Пусть: A — утверждение, «x» — переменная. Пусть: «y» — переменная, утверждение A не содержит переменную «y»; «x», «y» — различные переменные. Очевидно:

$$\exists! xA \iff \exists y\big(\mathrm{Subst}(A;x;y) \land \forall x(A \implies x = y)\big),$$
$$\exists! xA \iff \exists y \forall x(A \iff x = y).$$

Пусть: A, B — утверждения, «x» — переменная. Будем писать $\exists! xAB$, если:

$$\exists! x(A \land B).$$

Утверждение $\exists! xAB$ можно читать: «существует единственный допустимый объект x, удовлетворяющий условию A, такой, что B» или «существует единственный допустимый объект x, такой, что A, удовлетворяющий условию B».

Замечание (Внимание! Только для особо интересующихся). Пусть справедливы следующие принципы.

1. Пусть: A — утверждение, «x» — переменная. Тогда εxA — некоторый допустимый объект.
2. Пусть: A — утверждение, «x» — переменная. Тогда:

$$\exists xA \implies \mathrm{Subst}(A;x;\varepsilon xA).$$

3. Пусть: A, B — утверждения, «x» — переменная. Тогда:

$$\forall x(A \iff B) \implies \varepsilon xA = \varepsilon xB.$$

Сформулированные принципы описывают квантор, который называется квантором выбора (квантором выбора Давида Гильберта).

На содержательном уровне квантор выбора работает следующим образом. Пусть $\exists! xA$. Тогда εxA — тот самый допустимый объект x, для которого справедливо утверждение A. Пусть: $\neg\exists! xA$, $\exists xA$. Тогда εxA — один из тех допустимых объектов x, для которых справедливо утверждение A. Причём, для эквивалентных утверждений выбираются одинаковые объекты. Пусть $\neg\exists xA$. Тогда εxA — некоторый совершенно посторонний объект. Если рассматриваемая теория содержит какую-нибудь характерную постоянную, то определение объекта εxA можно естественным образом уточнить для случая $\neg\exists xA$. Например, в теории множеств можно добавить следующий принцип:

$$\neg\exists xA \implies \varepsilon xA = \varnothing.$$

Роль квантора выбора в математическом языке похожа на роль определённого артикля «the» в английском языке.

Замечание (Внимание! Только для особо интересующихся). Пусть: A, B — утверждения, «x» — переменная. Обозначим:

$$\varepsilon xAB = \varepsilon x(A \land B).$$

Замечание. Пусть: A, B — утверждения, «x» — переменная. Очевидно:

$$\neg\forall xA \iff \exists x\neg A,$$
$$\neg\forall xAB \iff \exists xA\neg B,$$
$$\neg\exists xA \iff \forall x\neg A,$$
$$\neg\exists xAB \iff \forall xA\neg B.$$

1.3. Теория множеств

Будем писать $\mathrm{Set}(A)$, если A — множество.

Пусть A — множество. Будем писать $(x \in A)$, если объект x принадлежит множеству A. Далее часто будем писать $x \in A$ вместо $(x \in A)$.

Пусть A, B — множества. Тогда:

$$A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B).$$

Замечание. Пусть: A — утверждение, «x» — переменная. Пусть: «Q» — переменная, утверждение A не содержит переменную «Q»; «x», «Q» — различные переменные. Пусть $\exists Q\big(\mathrm{Set}(Q) \land \forall x(x \in Q \iff A)\big)$. Тогда $\exists! Q\big(\mathrm{Set}(Q) \land \forall x(x \in Q \iff A)\big)$.

Определение. Пусть: A — утверждение, «x» — переменная. Выберем переменную «Q», удовлетворяющую условиям: утверждение A не содержит переменную «Q»; «x», «Q» — различные переменные. Будем говорить, что утверждение A сворачивается по переменной «x», если $\exists Q\big(\mathrm{Set}(Q) \land \forall x(x \in Q \iff A)\big)$.

Определение (операция сворачивания утверждения). Пусть: A — утверждение, «x» — переменная. Пусть утверждение A сворачивается по переменной «x». Выберем переменную «Q», удовлетворяющую условиям: утверждение A не содержит переменную «Q»; «x», «Q» — различные переменные. Выберем множество Q, удовлетворяющее условию $\forall x(x \in Q \iff A)$. Обозначим, $\{x\colon A\} = Q$.

Замечание (Внимание! Только для особо интересующихся). На первый взгляд кажется, что любое утверждение сворачивается по любой переменной. **Однако, это не так.**

Пусть «x» — переменная. Рассмотрим утверждение $\mathrm{Set}(x) \land (x \notin x)$. Предположим (первое предположение), что утверждение $\mathrm{Set}(x) \land (x \notin x)$ сворачивается по переменной «x». Обозначим, $R = \big\{x\colon \mathrm{Set}(x) \land (x \notin x)\big\}$. Тогда: $\mathrm{Set}(R)$, $\forall x\big(x \in R \iff \mathrm{Set}(x) \land (x \notin x)\big)$. Следовательно: $\mathrm{Set}(R)$, $R \in R \iff \mathrm{Set}(R) \land (R \notin R)$. Тогда: $\mathrm{Set}(R)$, $R \in R \iff R \notin R$.

Предположим (второе предположение), что $R \in R$. Так как $R \in R \iff R \notin R$, то $R \notin R$ (что противоречит предположению $R \in R$). Итак, наше второе предположение ложно и $R \notin R$. Так как $R \in R \iff R \notin R$, то $R \in R$ (что противоречит уже доказанному утверждению $R \notin R$). Итак, наше первое предположение ложно и утверждение $\mathrm{Set}(x) \land (x \notin x)$ не сворачивается по переменной «x».

Будем говорить, что A — пустое множество, если: A — множество, $\forall x(x \notin A)$.

Замечание. Существует единственный объект A, удовлетворяющий условию: A — пустое множество.

Обозначим через $\varnothing$ пустое множество.

Пусть A — множество. Будем писать $(B \subseteq A)$, если: B — множество, $\forall x(x \in B \implies x \in A)$. Далее часто будем писать $B \subseteq A$ вместо $(B \subseteq A)$. Утверждение $B \subseteq A$ можно читать: «B — подмножество множества A». **Внимание! Утверждения $B \in A$ и $B \subseteq A$ имеют разный смысл.**

Замечание. Пусть A — множество. Очевидно: $\varnothing \subseteq A$, $A \subseteq A$.

Пусть A — множество. Будем писать $(B \subset A)$, если $B \subseteq A \land B \neq A$. Далее часто будем писать $B \subset A$ вместо $(B \subset A)$. Утверждение $B \subset A$ можно читать: «B — **собственное** подмножество множества A».

Пусть A — множество. Обозначим, $P(A) = \{B\colon B \subseteq A\}$.

Пусть x — некоторый объект. Обозначим, $\{x\} = \{u\colon u = x\}$.

Пусть x, y — некоторые объекты. Обозначим, $\{x, y\} = \{u\colon u = x \lor u = y\}$.

Замечание. Пусть x, y — некоторые объекты. Очевидно: $\{x, x\} = \{x\}$, $\{y, x\} = \{x, y\}$.

Пусть x, y — некоторые объекты. Обозначим, $(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$.

Замечание. Пусть x_1, y_1, x_2, y_2 — некоторые объекты. Нетрудно доказать, что:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \implies x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2.$$

Будем говорить, что u — упорядоченная пара, если $\exists x \exists y \big(u = (x, y)\big)$.

Пусть u — упорядоченная пара. Выберем объекты x, y, удовлетворяющие условию $u = (x, y)$. Обозначим: $U_2^1(u) = x$, $U_2^2(u) = y$. Далее часто будем писать u^1, u^2 вместо $U_2^1(u)$, $U_2^2(u)$.

Замечание (упорядоченная единица, водится для единообразия). Пусть x — некоторый объект. Обозначим, $(x) = x$.

Пусть x_1, x_2 — некоторые объекты. Очевидно:

$$(x_1) = (x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Будем говорить, что u — упорядоченная единица, если $\exists x \big(u = (x)\big)$.

Пусть u — упорядоченная единица. Выберем объект x, удовлетворяющий условию $u = (x)$. Обозначим, $U_1^1(u) = x$. Далее часто будем писать u^1 вместо $U_1^1(u)$.

Пусть u — некоторый объект. Очевидно: u — упорядоченная единица, $U_1^1(u) = u$.

Пусть A, B — множества. Обозначим:

$$\begin{gathered}(A \cap B) = \{x \colon x \in A \wedge x \in B\},\\ (A \cup B) = \{x \colon x \in A \vee x \in B\},\\ (A \setminus B) = \{x \colon x \in A \wedge x \notin B\},\\ (A \times B) = \big\{(x, y) \colon x \in A \wedge y \in B\big\} = \Big\{u \colon \exists x \exists y \big(x \in A \wedge y \in B \wedge u = (x, y)\big)\Big\}.\end{gathered}$$

Далее часто будем писать: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \times B$ вместо: $(A \cap B)$, $(A \cup B)$, $(A \setminus B)$, $(A \times B)$. Будем говорить, что: $A \cap B$ — пересечение множеств A, B; $A \cup B$ — объединение множеств A, B; $A \setminus B$ — разность множеств A, B; $A \times B$ — прямое произведение множеств A, B (декартово произведение множеств A, B).

1.4. Теория функций

Будем говорить, что F — функция, если:

1. F — множество,
2. $\forall u \Big(u \in F \implies \exists x \exists y \big(u = (x, y)\big)\Big)$,
3. $\forall x \forall y \forall z \big((x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \implies y = z\big)$.

Пусть F — функция. Обозначим, $\mathrm{D}(F) = \Big\{x \colon \exists y \big((x, y) \in F\big)\Big\}$. Будем говорить, что $\mathrm{D}(F)$ — область определения функции F.

Пусть: F — функция, $x \in \mathrm{D}(F)$. Выберем объект y, удовлетворяющий условию $(x, y) \in F$. Обозначим, $F(x) = y$.

Внимание! Пусть F_1, F_2 — функции. Очевидно, $F_1 = F_2$ тогда и только тогда, когда: $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{D}(F_2)$, $\forall x \in \mathrm{D}(F_1) \big(F_1(x) = F_2(x)\big)$.

Замечание. Пусть: A — утверждение, «φ» — выражение, «x» — переменная. Пусть утверждение A сворачивается по переменной «x». Пусть: «F» — переменная, утверждение A не содержит переменную «F», выражение «φ» не содержит переменную «F»; «x», «F» — различные переменные. Существует единственная функция F, удовлетворяющая условиям: $\mathrm{D}(F) = \{x\colon A\}$, $\forall x A\bigl(F(x) = \varphi\bigr)$.

Определение (операция сворачивания выражения). Пусть: A — утверждение, «φ» — выражение, «x» — переменная. Пусть утверждение A сворачивается по переменной «x». Выберем переменную «F», удовлетворяющую условиям: утверждение A не содержит переменную «F», выражение «φ» не содержит переменную «F»; «x», «F» — различные переменные. Выберем функцию F, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(F) = \{x\colon A\}$, $\forall x A\bigl(F(x) = \varphi\bigr)$. Обозначим, $\{\varphi\}_{x\colon A} = F$.

Будем говорить, что F — пустая функция, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \varnothing$.

Замечание. Существует единственный объект F, удовлетворяющий условию: F — пустая функция.

Пусть F — функция. Обозначим:

$$\mathrm{R}(F) = \bigl\{F(x)\colon x \in \mathrm{D}(F)\bigr\} = \Bigl\{y\colon \exists x\bigl(x \in \mathrm{D}(F) \wedge y = F(x)\bigr)\Bigr\}.$$

Будем говорить, что $\mathrm{R}(F)$ — область значений функции F (образ функции F). Другое обозначение, $\mathrm{Im}(F)$.

Пусть A, B — множества. Будем писать $F\colon A \to B$, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) \subseteq A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$. Утверждение $F\colon A \to B$ читается: «функция F действует из множества A в множество B». Обозначим через $\mathrm{fun}(A, B)$ множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F\colon A \to B$.

Пусть A, B — множества. Будем писать $F\colon A \implies B$, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) = A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$. Утверждение $F\colon A \implies B$ читается: «функция F действует из **всего** множества A в множество B». Обозначим через $\mathrm{Fun}(A, B)$ множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F\colon A \implies B$.

Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим:

$$\mathrm{D}(F, A) = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) \in A\bigr\}.$$

Будем говорить, что $\mathrm{D}(F, A)$ — полный прообраз множества A под действием функции F.

Замечание. Пусть: F — функция, A — множество. Очевидно, $\mathrm{D}(F, A) \subseteq \mathrm{D}(F)$.

Пусть: F — функция, A — множество, $\mathrm{R}(F) \subseteq A$. Очевидно, $\mathrm{D}(F, A) = \mathrm{D}(F)$.

Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим:

$$F[A] = \bigl\{F(x)\colon x \in A \wedge x \in \mathrm{D}(F)\bigr\} = \Bigl\{y\colon \exists x\bigl(x \in A \wedge x \in \mathrm{D}(F) \wedge y = F(x)\bigr)\Bigr\}.$$

Будем говорить, что $F[A]$ — образ множества A под действием функции F.

Замечание. Пусть: F — функция, A — множество. Очевидно, $F[A] \subseteq \mathrm{R}(F)$.

Пусть: F — функция, A — множество, $\mathrm{D}(F) \subseteq A$. Очевидно, $F[A] = \mathrm{R}(F)$.

Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим через $F|_A$ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(F|_A) = A \cap \mathrm{D}(F)$, $F|_A(x) = F(x)$ при $x \in A \cap \mathrm{D}(F)$. Будем говорить, что $F|_A$ — ограничение функции F на множество A (сужение функции F на множество A).

Замечание. Пусть: F — функция, A — множество. Очевидно, $\mathrm{R}(F|_A) = F[A]$.

Пусть F_1, F_2 — функции. Обозначим через $F_2 \circ F_1$ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\}$, $(F_2 \circ F_1)(x) = F_2\big(F_1(x)\big)$ при $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$. Будем говорить, что $F_2 \circ F_1$ — композиция функций F_2, F_1 (суперпозиция функций F_2, F_1 или произведение функций F_2, F_1 или сложная функция, образованной функциями F_2, F_1). Другое обозначение, $F_2 F_1$.

Утверждение. *Пусть F_1, F_2, F_3 — функции. Тогда $(F_3 \circ F_2) \circ F_1 = F_3 \circ (F_2 \circ F_1)$.*

Доказательство. Очевидно:

$$\begin{gathered}\mathrm{D}\big((F_3 \circ F_2) \circ F_1\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_3 \circ F_2)\big\} = \\ = \Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2) \wedge F_2\big(F_1(x)\big) \in \mathrm{D}(F_3)\Big\} = \\ = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1) \wedge (F_2 \circ F_1)(x) \in \mathrm{D}(F_3)\big\} = \mathrm{D}\big(F_3 \circ (F_2 \circ F_1)\big).\end{gathered}$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((F_3 \circ F_2) \circ F_1\big)$. Тогда:

$$\begin{gathered}\big((F_3 \circ F_2) \circ F_1\big)(x) = (F_3 \circ F_2)\big(F_1(x)\big) = F_3\Big(F_2\big(F_1(x)\big)\Big) = F_3\big((F_2 \circ F_1)(x)\big) = \\ = \big(F_3 \circ (F_2 \circ F_1)\big)(x). \quad \square\end{gathered}$$

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — функции, A — множество. Тогда $\mathrm{D}(F_2 \circ F_1, A) = \mathrm{D}\big(F_1, \mathrm{D}(F_2, A)\big)$.*

Доказательство. Очевидно:

$$\begin{gathered}\mathrm{D}(F_2 \circ F_1, A) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1) \wedge (F_2 \circ F_1)(x) \in A\big\} = \\ = \Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2) \wedge F_2\big(F_1(x)\big) \in A\Big\} = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2, A)\big\} = \\ = \mathrm{D}\big(F_1, \mathrm{D}(F_2, A)\big). \quad \square\end{gathered}$$

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — функции, A — множество. Тогда $(F_2 \circ F_1)[A] = F_2\big[F_1[A]\big]$.*

Доказательство. Пусть $z \in (F_2 \circ F_1)[A]$. Тогда существует объект x, удовлетворяющий условиям: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $z = (F_2 \circ F_1)(x)$. Следовательно: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\big(F_1(x)\big)$. Тогда: $F_1(x) \in F_1[A]$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\big(F_1(x)\big)$. Следовательно, $z \in F_2\big[F_1[A]\big]$.

Пусть $z \in F_2\big[F_1[A]\big]$. Тогда существует объект y, удовлетворяющий условиям: $y \in F_1[A]$, $y \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2(y)$. Так как $y \in F_1[A]$, то существует объект x, удовлетворяющий условиям: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $y = F_1(x)$. Тогда: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\big(F_1(x)\big)$. Следовательно: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $z = (F_2 \circ F_1)(x)$. Тогда $z \in (F_2 \circ F_1)[A]$. $\square$

Замечание. Пусть F_1, F_2 — функции. Очевидно:

$$\begin{gathered}\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\} \subseteq \mathrm{D}(F_1); \\ \mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\} = \mathrm{D}\big(F_1, \mathrm{D}(F_2)\big); \\ \mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = (F_2 \circ F_1)\big[\mathrm{D}(F_1)\big] = F_2\Big[F_1\big[\mathrm{D}(F_1)\big]\Big] \subseteq \mathrm{R}(F_2);\end{gathered}$$

$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = (F_2 \circ F_1)\big[\mathrm{D}(F_1)\big] = F_2\Big[F_1\big[\mathrm{D}(F_1)\big]\Big] = F_2\big[\mathrm{R}(F_1)\big].$$

Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$. Тогда:

$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\} = \mathrm{D}(F_1).$$

Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{D}(F_2) \subseteq \mathrm{R}(F_1)$. Тогда:

$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = F_2\big[\mathrm{R}(F_1)\big] = \mathrm{R}(F_2).$$

Замечание. Пусть F — функция. Очевидно, существует функция φ, удовлетворяющая условиям: $\mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{R}(F)$, $\mathrm{R}(\varphi) \subseteq \mathrm{D}(F)$, $F\big(\varphi(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(\varphi)$.

Пусть F — функция. Будем говорить, что F — обратимая функция, если

$$\forall x_1 \in \mathrm{D}(F)\forall x_2 \in \mathrm{D}(F)\big(x_1 \neq x_2 \implies F(x_1) \neq F(x_2)\big).$$

Пусть F — обратимая функция. Будем говорить, что φ — обратная функция к функции F, если: φ — функция, $\mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{R}(F)$, $\mathrm{R}(\varphi) \subseteq \mathrm{D}(F)$, $F\big(\varphi(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(\varphi)$.

Замечание. Пусть F — обратимая функция. Очевидно, существует единственный объект φ, удовлетворяющий условию: φ — обратная функция к функции F.

Пусть F — обратимая функция. Обозначим через F^{-1} обратную функцию к функции F.

Утверждение (1-й признак обратимости)**.** *Пусть: F_1, F_2 — функции;* $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ *при* $x \in \mathrm{D}(F_1)$. *Тогда: F_1 — обратимая функция,* $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$.

Доказательство. Пусть: $x_1, x_2 \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x_1) = F_1(x_2)$. Тогда: $x_1 = F_2\big(F_1(x_1)\big) = F_2\big(F_1(x_2)\big) = x_2$. Следовательно, F_1 — обратимая функция.

Пусть $x \in \mathrm{D}(F_1)$. Тогда: $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $x = F_2\big(F_1(x)\big)$. Следовательно, $x \in \mathrm{R}(F_2)$. Тогда $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$. □

Утверждение (2-й признак обратимости)**.** *Пусть: F_1, F_2 — функции;* $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ *при* $x \in \mathrm{D}(F_1)$; $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$. *Тогда: F_1 — обратимая функция,* $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{R}(F_2)$.

Доказательство. Так как: $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$, то: F_1 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$. Так как: $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$, $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, то $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{R}(F_2)$. □

Утверждение (3-й признак обратимости)**.** *Пусть: F_1, F_2 — функции;* $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ *при* $x \in \mathrm{D}(F_1)$; $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ *при* $y \in \mathrm{D}(F_2)$. *Тогда: F_1 — обратимая функция, $F_1^{-1} = F_2$; F_2 — обратимая функция, $F_2^{-1} = F_1$.*

Доказательство. Так как: $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$; $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, то: F_1 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{R}(F_2)$.

Так как: $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$; $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, то: F_2 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$.

Так как: F_1 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$, $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$, то F_2 — обратная функция к функции F_1.

Так как: F_2 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{R}(F_2)$, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$, то F_1 — обратная функция к функции F_2. □

Замечание. Пусть: F_1, F_2 — функции; F_1 — обратимая функция, $F_1^{-1} = F_2$; F_2 — обратимая функция, $F_2^{-1} = F_1$.

Так как: F_1 — обратимая функция, $F_1^{-1} = F_2$, то: $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$, $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$.

Так как: F_2 — обратимая функция, $F_2^{-1} = F_1$, то: $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{R}(F_2)$, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$.

Итак: $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{R}(F_2)$, $\mathrm{R}(F_1) = \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$; $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$, $\mathrm{R}(F_2) = \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$.

Утверждение (4-й признак обратимости)**.** *Пусть:* F_1, F_2 *— функции;* $\mathrm{R}(F_1) = \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ *при* $x \in \mathrm{D}(F_1)$. *Тогда:* F_1 *— обратимая функция,* $F_1^{-1} = F_2$*;* F_2 *— обратимая функция,* $F_2^{-1} = F_1$.

Доказательство. Пусть $y \in \mathrm{D}(F_2)$. Тогда: $y \in \mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$. Следовательно, существует объект x, удовлетворяющий условиям: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $y = F_1(x)$. Тогда: $F_2(y) = F_2\big(F_1(x)\big) = x \in \mathrm{D}(F_1)$. Следовательно: $F_1\big(F_2(y)\big) = F_1(x) = y$.

Так как: $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$; $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$, то: F_1 — обратимая функция, $F_1^{-1} = F_2$; F_2 — обратимая функция, $F_2^{-1} = F_1$. □

Утверждение (5-й признак обратимости)**.** *Пусть:* F_1, F_2 *— функции;* $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ *при* $x \in \mathrm{D}(F_1)$*;* $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, F_2 *— обратимая функция. Тогда:* F_1 *— обратимая функция,* $F_1^{-1} = F_2$*;* F_2 *— обратимая функция,* $F_2^{-1} = F_1$.

Доказательство. Пусть $y \in \mathrm{D}(F_2)$. Тогда $F_2(y) \in \mathrm{D}(F_1)$. Следовательно: $F_1\big(F_2(y)\big) \in \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\Big(F_1\big(F_2(y)\big)\Big) = F_2(y)$. Так как F_2 — обратимая функция, то $F_1\big(F_2(y)\big) = y$.

Так как: $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$; $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$, то: F_1 — обратимая функция, $F_1^{-1} = F_2$; F_2 — обратимая функция, $F_2^{-1} = F_1$. □

Утверждение. *Пусть* F *— обратимая функция. Тогда:* F^{-1} *— обратимая функция,* $(F^{-1})^{-1} = F$.

Доказательство. Так как: $\mathrm{R}(F^{-1}) \subseteq \mathrm{D}(F)$, $F\big(F^{-1}(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F^{-1})$; $\mathrm{R}(F) \subseteq \mathrm{D}(F^{-1})$, F — обратимая функция, то: F^{-1} — обратимая функция, $(F^{-1})^{-1} = F$. □

Замечание. Пусть F — обратимая функция. Тогда: F^{-1} — обратимая функция, $(F^{-1})^{-1} = F$.

Так как: F^{-1} — обратимая функция, $(F^{-1})^{-1} = F$; F — обратимая функция, $F^{-1} = F^{-1}$, то: $\mathrm{D}(F^{-1}) = \mathrm{R}(F)$, $\mathrm{R}(F^{-1}) = \mathrm{D}(F)$, $F\big(F^{-1}(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F^{-1})$; $\mathrm{D}(F) = \mathrm{R}(F^{-1})$, $\mathrm{R}(F) = \mathrm{D}(F^{-1})$, $F^{-1}\big(F(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F)$.

Утверждение. *Пусть:* F_1, F_2 *— обратимые функции. Тогда:* $F_2 \circ F_1$ *— обратимая функция,* $(F_2 \circ F_1)^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2^{-1}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$. Обозначим, $z = (F_2 \circ F_1)(x)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\big(F_1(x)\big)$. Следовательно: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_2^{-1}(z) = F_1(x)$. Тогда: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) \in \mathrm{D}(F_1^{-1})$, $F_1^{-1}\big(F_2^{-1}(z)\big) = x$. Следовательно: $z \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$, $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z) = x$. Итак: $(F_2 \circ F_1)(x) \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$, $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})\big((F_2 \circ F_1)(x)\big) = x$.

Пусть $z \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$. Обозначим, $x = (F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z)$. Тогда: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) \in \mathrm{D}(F_1^{-1})$, $x = F_1^{-1}\big(F_2^{-1}(z)\big)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_1(x) = F_2^{-1}(z)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = z$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $(F_2 \circ F_1)(x) = z$. Итак: $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z) \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $(F_2 \circ F_1)\big((F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z)\big) = z$.

Так как: $\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$, $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})\big((F_2 \circ F_1)(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$; $\mathrm{R}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1}) \subseteq \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $(F_2 \circ F_1)\big((F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z)\big) = z$ при $z \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$, то: $F_2 \circ F_1$ — обратимая функция, $(F_2 \circ F_1)^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2^{-1}$. □

Утверждение. *Пусть: F — обратимая функция, A — множество. Тогда $F^{-1}[A] = \mathrm{D}(F, A)$.*

Доказательство. Пусть $x \in F^{-1}[A]$. Тогда существует объект y, удовлетворяющий условиям: $y \in A$, $y \in \mathrm{D}(F^{-1})$, $x = F^{-1}(y)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(F)$, $y \in A$, $F(x) = y$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F)$, $F(x) \in A$. Следовательно, $x \in \mathrm{D}(F, A)$.

Пусть $x \in \mathrm{D}(F, A)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F)$, $F(x) \in A$. Обозначим, $y = F(x)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F)$, $y \in A$, $y = F(x)$. Следовательно: $y \in A$, $y \in \mathrm{D}(F^{-1})$, $F^{-1}(y) = x$. Тогда $x \in F^{-1}[A]$. □

Пусть A — множество. Будем говорить, что I — единичная функция на множестве A, если: I — функция, $\mathrm{D}(I) = A$, $I(x) = x$ при $x \in A$.

Замечание. Пусть A — множество. Очевидно, существует единственный объект I, удовлетворяющий условию: I — единичная функция на множестве A.

Пусть: A_1, A_2 — множества, $F\colon A_1 \to A_2$. Очевидно: $F \circ I_1 = F$, $I_2 \circ F = F$.

Пусть: A_1, A_2 — множества, $F\colon A_1 \to A_2$, F — обратимая функция. Очевидно: $F \circ F^{-1} = I_2|_{\mathrm{R}(F)}$, $F^{-1} \circ F = I_1|_{\mathrm{D}(F)}$.

1.5. Числовые системы

Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество всех целых чисел. Обозначим: $\mathbb{Z}_+ = \{k\colon k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant 0\}$, $\mathbb{N} = \{k\colon k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant 1\}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\overline{\mathbb{Z}}_+ = \{k\colon k \in \overline{\mathbb{Z}} \wedge k \geqslant 0\}$, $\overline{\mathbb{N}} = \{k\colon k \in \overline{\mathbb{Z}} \wedge k \geqslant 1\}$.

Пусть N_1, $N_2 \in \overline{\mathbb{Z}}$. Будем писать $k = \overline{N_1, N_2}$, если: $k \in \overline{\mathbb{Z}}$, $N_1 \leqslant k \leqslant N_2$.

Пусть A — конечное множество. Обозначим через $\mathrm{card}(A)$ количество элементов множества A.

Замечание. Очевидно, $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$. Пусть: A — конечное множество, $A \neq \varnothing$. Очевидно, $\mathrm{card}(A) \in \mathbb{N}$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, $x_1, \ldots, x_N$ — некоторые объекты. Обозначим, $\{x_1, \ldots, x_N\} = \{u\colon u = x_1 \vee \cdots \vee u = x_N\}$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, $x_1, \ldots, x_N$ — некоторые объекты. Обозначим, $(x_1, \ldots, x_N) = \big((x_1, \ldots, x_{N-1}), x_N\big)$.

Замечание. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, $x_1, \ldots, x_N$, $y_1, \ldots, y_N$ — некоторые объекты. Нетрудно доказать, что:

$$(x_1, \ldots, x_N) = (y_1, \ldots, y_N) \implies x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_N = y_N.$$

Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$. Будем говорить, что u — упорядоченная N-ка, если $\exists x_1 \cdots \exists x_N \big(u = (x_1, \ldots, x_N)\big)$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, u — упорядоченная N-ка. Выберем объекты $x_1, \ldots, x_N$, удовлетворяющие условию $u = (x_1, \ldots, x_N)$. Обозначим: $U_N^1(u) = x_1, \ldots, U_N^N(u) = x_N$. Далее часто будем писать $u^1, \ldots, u^N$ вместо $U_N^1(u), \ldots, U_N^N(u)$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, $A_1, \ldots, A_N$ — множества. Обозначим:

$$A_1 \times \cdots \times A_N = \big\{(x_1, \ldots, x_N)\colon x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_N \in A_N\big\} =$$

$$= \Big\{u\colon \exists x_1 \cdots \exists x_N \big(x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_N \in A_N \wedge u = (x_1, \ldots, x_N)\big)\Big\}.$$

Будем говорить, что $A_1 \times \cdots \times A_N$ — прямое произведение множеств $A_1, \ldots, A_N$ (декартово произведение множеств $A_1, \ldots, A_N$).

Замечание. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, $A_1, \ldots, A_N$ — множества. Очевидно, $A_1 \times \cdots \times A_N = (A_1 \times \cdots \times A_{N-1}) \times A_N$.

Пусть: A — множество, $N = 1$. Обозначим, $A^N = A$. Пусть: A — множество, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$. Обозначим, $A^N = A \times \cdots \times A$ (N сомножителей). Пусть: A — множество, $N \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что A^N — прямая степень множества A (декартова степень множества A).

Замечание. Пусть: A — множество, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$. Очевидно, $A^N = A^{N-1} \times A$.

Обозначим через $\mathbb{Q}$ множество всех рациональных чисел. Обозначим: $\mathbb{Q}_+ = \{x\colon x \in \mathbb{Q} \wedge x \geqslant 0\}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\overline{\mathbb{Q}}_+ = \{x\colon x \in \overline{\mathbb{Q}} \wedge x \geqslant 0\}$.

Обозначим через $\mathbb{R}$ множество всех вещественных чисел. Обозначим: $\mathbb{R}_+ = \{x\colon x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0\}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x\colon x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x \geqslant 0\}$.

Пусть $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что α — наименьший элемент множества A, если: $\alpha \in A$, $\forall x \in A (x \geqslant \alpha)$.

Замечание. Пусть: $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \alpha (\alpha$ — наименьший элемент множества $A)$. Тогда $\exists! \alpha (\alpha$ — наименьший элемент множества $A)$.

Пусть: $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \alpha (\alpha$ — наименьший элемент множества $A)$. Обозначим через $\min(A)$ наименьший элемент множества A.

Пусть $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что α — наибольший элемент множества A, если: $\alpha \in A$, $\forall x \in A (x \leqslant \alpha)$.

Замечание. Пусть: $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \alpha (\alpha$ — наибольший элемент множества $A)$. Тогда $\exists! \alpha (\alpha$ — наибольший элемент множества $A)$.

Пусть: $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \alpha (\alpha$ — наибольший элемент множества $A)$. Обозначим через $\max(A)$ наибольший элемент множества A.

Пусть α, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Обозначим:

$$\begin{gathered}
[\alpha, \beta] = \big\{x\colon x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge \min\{\alpha, \beta\} \leqslant x \leqslant \max\{\alpha, \beta\}\big\}, \\
(\alpha, \beta] = [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha\}, \\
[\alpha, \beta) = [\alpha, \beta] \setminus \{\beta\}, \\
(\alpha, \beta) = [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha, \beta\}.
\end{gathered}$$

Замечание. Пусть α, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Очевидно: $[\beta, \alpha] = [\alpha, \beta]$, $[\beta, \alpha) = (\alpha, \beta]$, $(\beta, \alpha] = [\alpha, \beta)$, $(\beta, \alpha) = (\alpha, \beta)$.

1.6. Примеры

Утверждение $0 < 1 \vee 2 + 2 = 4$ истинно. Утверждение $1 < 0 \implies 2 + 2 = 5$ истинно. Очевидно:

$$\begin{gathered}
\neg(0 < 1 \vee 2 + 2 = 4) \iff (1 \leqslant 0 \wedge 2 + 2 \neq 4), \\
\neg(1 < 0 \implies 2 + 2 = 5) \iff (1 < 0 \wedge 2 + 2 \neq 5).
\end{gathered}$$

Пусть: A — утверждение, N_1, $N_2 \in \mathbb{Z}$, $N_1 < N_2$. Очевидно:

$$\forall k = \overline{N_1, N_2}\, A \iff \mathrm{Subst}(A; k; N_1) \wedge \dots \wedge \mathrm{Subst}(A; k; N_2),$$
$$\exists k = \overline{N_1, N_2}\, A \iff \mathrm{Subst}(A; k; N_1) \vee \dots \vee \mathrm{Subst}(A; k; N_2).$$

Утверждение $\forall x \in \mathbb{R}(x = 0)$ ложно. Утверждение $\exists x \in \mathbb{R}(x = 0)$ истинно. Утверждение $\exists! x \in \mathbb{R}(x = 0)$ истинно. **Внимание! Утверждение** $\forall x \in \varnothing(x \neq x)$ **истинно.** Утверждение $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x < y)$ истинно. Утверждение $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(x < y)$ ложно. **Внимание! Утверждения** $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x < y)$ **и** $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(x < y)$ **имеют разный смысл.** Очевидно:

$$\neg \forall x \in \mathbb{R}(x = 0) \iff \exists x \in \mathbb{R}(x \neq 0),$$
$$\neg \exists x \in \mathbb{R}(x = 0) \iff \forall x \in \mathbb{R}(x \neq 0),$$
$$\neg \forall x \in \varnothing(x \neq x) \iff \exists x \in \varnothing(x = x),$$
$$\neg \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x < y) \iff \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(y \leqslant x),$$
$$\neg \exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(x < y) \iff \forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}(y \leqslant x).$$

Список литературы

[1] *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику.

[2] *Шенфилд Дж.* Математическая логика.