Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Лекция 12. Система линейных алгебраических уравнений

12.1. Линейное операторное уравнение

Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $y \in L_2$. Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} Ax = y, \\ x \in \mathrm{D}(A). \end{cases} \tag{1}$$

Будем говорить, что (1) — линейное операторное уравнение. Пусть $y = \theta_2$. Будем говорить, что (1) — линейное однородное операторное уравнение. Пусть $y \neq \theta_2$. Будем говорить, что (1) — линейное неоднородное операторное уравнение.

Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$. Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} Ax = \theta_2, \\ x \in \mathrm{D}(A). \end{cases} \tag{2}$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$. Рассмотрим уравнение (2).

1. Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = 0$. Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$.
2. Пусть: $m \in \mathbb{N}$, $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = m$. Тогда существуют векторы $e_1, \ldots, e_m$, удовлетворяющие условию: $e_1, \ldots, e_m$ — базис подпространства $\ker(A)$. Следовательно, $\ker(A) = L(e_1, \ldots, e_m)$.
3. Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = +\infty$. Ничего сказать нельзя.

Будем говорить, что e — фундаментальная совокупность решений (ФСР) уравнения (2), если e — базис подпространства $\ker(A)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $y \in L_2$. Рассмотрим уравнение (1). Обозначим, $Q = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax = y\bigr\}$. Очевидно, $Q = \mathrm{D}\bigl(A, \{y\}\bigr)$.

Пусть x_1, $x_2 \in Q$. Тогда: $x_1 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 = y$, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_2 = y$. Следовательно: $x_1 - x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = y - y = \theta_2$. Тогда $x_1 - x_2 \in \ker(A)$.

Пусть: $x_1 \in Q$, $x_2 \in \ker(A)$. Тогда: $x_1 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 = y$, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_2 = \theta_2$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = y + \theta_2 = y$. Тогда $x_1 + x_2 \in Q$.

Пусть $x_0 \in Q$. Докажем, что $Q = \{x_0\} + \ker(A)$.

Пусть $x \in Q$. Так как $x_0 \in Q$, то $x - x_0 \in \ker(A)$. Тогда: $x = x_0 + (x - x_0) \in \{x_0\} + \ker(A)$.

Пусть $x \in \{x_0\} + \ker(A)$. Тогда существует вектор $\tilde{x}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{x} \in \ker(A)$, $x = x_0 + \tilde{x}$. Так как $x_0 \in Q$, то $x \in Q$.

Итак, $Q = \{x_0\} + \ker(A)$.

1. Пусть $y \notin \mathrm{R}(A)$. Тогда $Q = \varnothing$.

2. Пусть $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда существует вектор x_0, удовлетворяющий условию $x_0 \in Q$. Следовательно, $Q = \{x_0\} + \ker(A)$.

2.1. Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = 0$. Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Следовательно: $Q = \{x_0\}+\ker(A) = \{x_0\} + \{\theta_1\} = \{x_0\}$.

2.2. Пусть: $m \in \mathbb{N}$, $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = m$. Тогда существуют векторы $e_1, \ldots, e_m$, удовлетворяющие условию: $e_1, \ldots, e_m$ — базис подпространства $\ker(A)$. Следовательно, $\ker(A) = L(e_1, \ldots, e_m)$. Тогда: $Q = \{x_0\} + \ker(A) = \{x_0\} + L(e_1, \ldots, e_m)$.

2.3. Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = +\infty$. Ничего сказать нельзя.

12.2. Система линейных алгебраических уравнений

Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $y \in \mathbb{K}^{N_2}$. Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} Ax = y, \\ x \in \mathbb{K}^{N_1}. \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, уравнение (3) можно переписать в виде линейного операторного уравнения:

$$\begin{cases} \hat{A}x = y, \\ x \in \mathrm{D}(\hat{A}). \end{cases}$$

Очевидно, уравнение (3) можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} A^1_1 x^1 + \cdots + A^1_{N_1} x^{N_1} = y^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^{N_2}_1 x^1 + \cdots + A^{N_2}_{N_1} x^{N_1} = y^{N_2}; \\ x^1, \ldots, x^{N_1} \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

Будем говорить, что A — основная матрица уравнения (3). Будем говорить, что (A, y) — расширенная матрица уравнения (3).

Теорема (Кронекера—Капелли). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* N_1*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*,* $y \in \mathbb{K}^{N_2}$*. Уравнение* (3) *имеет решение тогда и только тогда, когда* $\mathrm{rank}(A, y) = \mathrm{rank}(A)$.

Доказательство. Пусть существует столбец x, удовлетворяющий условиям: $x \in \mathbb{K}^{N_1}$, $Ax = y$. Тогда: $x^1, \ldots, x^{N_1} \in \mathbb{K}$, $y = A_1 x^1 + \cdots + A_{N_1} x^{N_1}$. Следовательно: $-x^1, \ldots, -x^{N_1} \in \mathbb{K}$, $(-1)y = A_1(-x^1) + \cdots + A_{N_1}(-x^{N_1})$. Тогда $(-1)y \in L(A_1, \ldots, A_{N_1})$. Следовательно:

$$\mathrm{rank}(A, y) = \mathrm{rank}(A_1, \ldots, A_{N_1}, y) = \mathrm{rank}\bigl(A_1, \ldots, A_{N_1}, y + (-1)y\bigr) = \mathrm{rank}(A_1, \ldots, A_{N_1}, \tilde{\theta}_2) = \\ = \mathrm{rank}(A_1, \ldots, A_{N_1}) = \mathrm{rank}(A).$$

Пусть $\mathrm{rank}(A, y) = \mathrm{rank}(A)$. Обозначим, $r = \mathrm{rank}(A)$. Тогда: $r \in \mathbb{Z}_+$, $\mathrm{rank}(A, y) = r$.

Пусть $r = 0$. Так как: $\mathrm{rank}\bigl(\{A_1, \ldots, A_{N_1}, y\}\bigr) = \mathrm{rank}(A, y) = r$, то $y = \tilde{\theta}_2$. Тогда: $\tilde{\theta}_1 \in \mathbb{K}^{N_1}$, $A\tilde{\theta}_1 = y$.

Пусть $r \neq 0$. Тогда $r \in \mathbb{N}$. Так как: $\operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\bigr) = \operatorname{rank}(A) = r$, то существуют числа $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \cdots < i_r$, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — линейно независимые столбцы. Так как: $\operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \ldots, A_{N_1}, y\}\bigr) = \operatorname{rank}(A, y) = r$, то $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}, y\}$. Тогда существуют числа $x^{i_1}, \ldots, x^{i_r}$, удовлетворяющие условиям: $x^{i_1}, \ldots, x^{i_r} \in \mathbb{K}$, $y = A_{i_1}x^{i_1} + \cdots + A_{i_r}x^{i_r}$. Обозначим: $x^i = 0$ при: $i = \overline{1, N_1}$, $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Тогда: $x^1, \ldots, x^{N_1} \in \mathbb{K}$, $y = A_1x^1 + \cdots + A_{N_1}x^{N_1}$. Следовательно: $x \in \mathbb{K}^{N_1}$, $Ax = y$. $\square$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Будем говорить, что B — обратная матрица к матрице A, если: $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $AB = I$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$; A, $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $AB = I$. Тогда:

$$\det(AB) = \det(I);$$
$$\det(A)\det(B) = 1;$$
$$\det(A),\ \det(B) \neq 0.$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $\det(A) \neq 0$.

1. *Обозначим:* $B_i^j = \frac{(-1)^{i+j}\overline{\Delta}_j^i(A)}{\det(A)}$ *при* i, $j = \overline{1, N}$. *Тогда:* $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $AB = I$, $BA = I$.
2. *Пусть:* $N_1 \in \mathbb{N}$, $Y \in \mathbb{K}^{N \times N_1}$. *Существует единственная матрица* X*, удовлетворяющая условиям:* $X \in \mathbb{K}^{N \times N_1}$, $AX = Y$.
3. *Пусть:* $N_2 \in \mathbb{N}$, $Y \in \mathbb{K}^{N_2 \times N}$. *Существует единственная матрица* X*, удовлетворяющая условиям:* $X \in \mathbb{K}^{N_2 \times N}$, $XA = Y$.
4. *Пусть:* x, $y \in \mathbb{K}^N$, $Ax = y$. *Тогда:* $x^j = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{j-1}, y, A_{j+1}, \ldots, A_N)}{\det(A)}$ *при* $j = \overline{1, N}$ *(**формулы Крамера**).*

Доказательство.

1. Очевидно, $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Пусть i, $j = \overline{1, N}$. Обозначим:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{i-1} \\ A^j \\ A^{i+1} \\ \vdots \\ A^N \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$(AB)_i^j = \sum_{k=1}^{N} A_k^j B_i^k = \sum_{k=1}^{N} A_k^j \frac{(-1)^{i+k}\overline{\Delta}_k^i(A)}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{i+k}\overline{\Delta}_k^i(A) A_k^j =$$
$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{i+k}\overline{\Delta}_k^i(\tilde{A})\tilde{A}_k^i = \frac{1}{\det(A)}\det(\tilde{A}) = \delta_i^j = I_i^j.$$

Следовательно, $AB = I$.

Пусть i, $j = \overline{1, N}$. Обозначим, $\tilde{A} = (A_1, \ldots, A_{j-1}, A_i, A_{j+1}, \ldots, A_N)$. Тогда:

$$(BA)_i^j = \sum_{k=1}^{N} B_k^j A_i^k = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+j}\overline{\Delta}_j^k(A)}{\det(A)} A_i^k = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+j}\overline{\Delta}_j^k(A) A_i^k =$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+j} \overline{\Delta}_j^k(\tilde{A}) \tilde{A}_j^k = \frac{1}{\det(A)} \det(\tilde{A}) = \delta_i^j = I_i^j.$$

Следовательно, $BA = I$.

2. Пусть: $X \in \mathbb{K}^{N \times N_1}$, $AX = Y$. Тогда:

$$B(AX) = BY,$$
$$(BA)X = BY,$$
$$IX = BY,$$
$$X = BY.$$

Пусть: $X_1 \in \mathbb{K}^{N \times N_1}$, $AX_1 = Y$, $X_2 \in \mathbb{K}^{N \times N_1}$, $AX_2 = Y$. Тогда: $X_1 = BY$, $X_2 = BY$. Следовательно, $X_1 = X_2$.

Пусть $X = BY$. Тогда: $X \in \mathbb{K}^{N \times N_1}$, $AX = A(BY) = (AB)Y = IY = Y$.

3. Пусть: $X \in \mathbb{K}^{N_2 \times N}$, $XA = Y$. Тогда:

$$(XA)B = YB,$$
$$X(AB) = YB,$$
$$XI = YB,$$
$$X = YB.$$

Пусть: $X_1 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N}$, $X_1 A = Y$, $X_2 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N}$, $X_2 A = Y$. Тогда: $X_1 = YB$, $X_2 = YB$. Следовательно, $X_1 = X_2$.

Пусть $X = YB$. Тогда: $X \in \mathbb{K}^{N_2 \times N}$, $XA = (YB)A = Y(BA) = YI = Y$.

4. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\frac{\det(A_1, \dots, A_{j-1}, y, A_{j+1}, \dots, A_N)}{\det(A)} = \frac{\det(A_1, \dots, A_{j-1}, Ax, A_{j+1}, \dots, A_N)}{\det(A)} =$$
$$= \frac{\det(A_1, \dots, A_{j-1}, A_k x^k, A_{j+1}, \dots, A_N)}{\det(A)} = \frac{\det(A_1, \dots, A_{j-1}, A_k, A_{j+1}, \dots, A_N)}{\det(A)} x^k = \delta_k^j x^k =$$
$$= x^j. \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$.

1. Пусть: $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $\det(A) \neq 0$. Очевидно, существует единственная матрица X, удовлетворяющая условию: X — обратная матрица к матрице A. Обозначим через A^{-1} обратную матрицу к матрице A.

2. Пусть: $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $\det(A) \neq 0$. Обозначим: $B_i^j = \frac{(-1)^{i+j} \overline{\Delta}_j^i(A)}{\det(A)}$ при i, $j = \overline{1, N}$. Тогда: $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $AB = I$. Следовательно, $A^{-1} = B$. Тогда: $A^{-1}A = I$, $(A^{-1})_i^j = \frac{(-1)^{i+j} \overline{\Delta}_j^i(A)}{\det(A)}$ при i, $j = \overline{1, N}$.

3. Пусть: A, $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $AB = I$. Тогда $\det(A)$, $\det(B) \neq 0$.

Так как $AB = I$, то $A^{-1} = B$.

Очевидно, $B^{-1}B = I$. С другой стороны, $AB = I$. Тогда $B^{-1} = A$.

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $\det(A) \neq 0$. Очевидно: $(\lambda A)(\lambda^{-1} A^{-1}) = (\lambda \lambda^{-1})(A A^{-1}) = 1I = I$. Тогда: $\det(\lambda A) \neq 0$, $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.

5. Пусть: A, $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $\det(A)$, $\det(B) \neq 0$. Очевидно: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \big(A(BB^{-1})\big)A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$. Тогда: $\det(AB) \neq 0$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

6. Пусть: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Очевидно, $AA^{-1} = I$. Тогда: $\det(A^{-1}) \neq 0$, $(A^{-1})^{-1} = A$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $y \in \mathbb{K}^{N_2}$. Рассмотрим уравнение (3). Обозначим: $Q = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge Ax = y\}$, $r = \operatorname{rank}(A)$. Тогда $r = \overline{0, \min\{N_1, N_2\}}$.

1. Пусть $\operatorname{rank}(A, y) \neq r$. Тогда $Q = \varnothing$.
2. Пусть: $\operatorname{rank}(A, y) = r$, $r = 0$. Тогда: $A = \Theta$, $y = \tilde{\theta}_2$. Следовательно, $Q = \mathbb{K}^{N_1}$.
3. Пусть: $\operatorname{rank}(A, y) = r$, $r \neq 0$, $N_1 = r$, $N_2 = r$. Можно использовать формулы Крамера.
4. Пусть: $\operatorname{rank}(A, y) = r$, $r \neq 0$, $N_1 = r$, $N_2 > r$. Пусть $\Delta^{1,\dots,r}_{1,\dots,r}(A) \neq 0$. Тогда $(A, y)^1, \dots, (A, y)^r$ — базис множества $\big\{(A, y)^1, \dots, (A, y)^{N_2}\big\}$. Следовательно, уравнение (3) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} A^1_1 x^1 + \dots + A^1_r x^r = y^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^r_1 x^1 + \dots + A^r_r x^r = y^r; \\ x^1, \dots, x^r \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

Можно использовать формулы Крамера.

5. Пусть: $\operatorname{rank}(A, y) = r$, $r \neq 0$, $N_1 > r$, $N_2 = r$. Пусть $\Delta^{1,\dots,r}_{1,\dots,r}(A) \neq 0$. Пусть x — решение уравнения (3). Тогда:

$$\begin{cases} A^1_1 x^1 + \dots + A^1_r x^r = y^1 - A^1_{r+1} x^{r+1} - \dots - A^1_{N_1} x^{N_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^r_1 x^1 + \dots + A^r_r x^r = y^r - A^r_{r+1} x^{r+1} - \dots - A^r_{N_1} x^{N_1}; \\ x^1, \dots, x^{N_1} \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

Обозначим: $C^1 = x^{r+1}, \dots, C^{N_1-r} = x^{N_1}$. Тогда: $C^1, \dots, C^{N_1-r} \in \mathbb{K}$;

$$\begin{cases} A^1_1 x^1 + \dots + A^1_r x^r = y^1 - A^1_{r+1} C^1 - \dots - A^1_{N_1} C^{N_1-r}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^r_1 x^1 + \dots + A^r_r x^r = y^r - A^r_{r+1} C^1 - \dots - A^r_{N_1} C^{N_1-r}, \\ x^{r+1} = C^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{N_1} = C^{N_1-r}; \\ x^1, \dots, x^{N_1} \in \mathbb{K}. \end{cases} \tag{4}$$

Можно использовать формулы Крамера.

Пусть: $C^1, \dots, C^{N_1-r} \in \mathbb{K}$, x — решение системы (4). Тогда x — решение уравнения (3).

6. Пусть: $\operatorname{rank}(A, y) = r$, $r \neq 0$, $N_1 > r$, $N_2 > r$. Пусть $\Delta^{1,\dots,r}_{1,\dots,r}(A) \neq 0$. Тогда $(A, y)^1, \dots, (A, y)^r$ — базис множества $\big\{(A, y)^1, \dots, (A, y)^{N_2}\big\}$. Следовательно, уравнение (3) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} A^1_1 x^1 + \dots + A^1_{N_1} x^{N_1} = y^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^r_1 x^1 + \dots + A^r_{N_1} x^{N_1} = y^r; \\ x^1, \dots, x^{N_1} \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

Можно использовать метод из пункта 5.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $y \in \mathbb{K}^{N_2}$, $j = \overline{1, N_2}$. Будем говорить, что $(A, y)^j$ — квазинулевая строка, если: $A_1^j, \ldots, A_{N_1}^j = 0$, $y^j \neq 0$.

Замечание (Метод Гаусса—Жордана для решения СЛАУ). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $y \in \mathbb{K}^{N_2}$. Обозначим, $Q = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge Ax = y\}$. Пусть матрица (A, y) содержит квазинулевую строку. Тогда $Q = \varnothing$. Пусть матрица (A, y) не содержит квазинулевых строк. Пусть матрица A не содержит ненулевых строк. Тогда $Q = \mathbb{K}^{N_1}$. Пусть матрица A содержит ненулевую строку. Обозначим: $B_0 = A$, $z_0 = y$. Тогда: $B_0 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $z_0 \in \mathbb{K}^{N_2}$, $Q = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge B_0 x = z_0\}$, матрица (B_0, z_0) не содержит квазинулевых строк, матрица B_0 содержит ненулевую строку.

Выберем числа $i_1 = \overline{1, N_1}$, $j_1 = \overline{1, N_2}$, удовлетворяющие условию $(B_0)_{i_1}^{j_1} \neq 0$. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_0)_{i_1}^{j_1}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_0)_{i_1}^{j_1}$. Получим матрицу $B_1 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, получим столбец $z_1 \in \mathbb{K}^{N_2}$, удовлетворяющий условиям: $(B_1)_{i_1}^{j_1} \neq 0$, $(B_1)_{i_1}^{j} = 0$ при: $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_1$; $Q = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge B_1 x = z_1\}$. Пусть матрица (B_1, z_1) содержит квазинулевую строку. Тогда $Q = \varnothing$. Остановим процесс. Пусть матрица (B_1, z_1) не содержит квазинулевых строк. Пусть матрица B_1 содержит ровно одну ненулевую строку. Остановим процесс. Пусть матрица B_1 содержит, по крайней мере, две ненулевые строки. Перейдём к следующему шагу.

Выберем числа $i_2 = \overline{1, N_1}$, $j_2 = \overline{1, N_2}$, удовлетворяющие условиям: $j_2 \neq j_1$, $(B_1)_{i_2}^{j_2} \neq 0$. Очевидно, $i_2 \neq i_1$. Тогда: i_1, $i_2 = \overline{1, N_1}$, i_1, i_2 — различные числа, j_1, $j_2 = \overline{1, N_2}$, j_1, j_2 — различные числа. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_1)_{i_2}^{j_2}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_1)_{i_2}^{j_2}$. Получим матрицу $B_2 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, получим столбец $z_2 \in \mathbb{K}^{N_2}$, удовлетворяющий условиям: $(B_2)_{i_k}^{j_k} \neq 0$, $(B_2)_{i_k}^{j} = 0$ при: $k = 1, 2$, $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_k$; $Q = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge B_1 x = z_1\}$. Пусть матрица (B_2, z_2) содержит квазинулевую строку. Тогда $Q = \varnothing$. Остановим процесс. Пусть матрица B_2 содержит ровно две ненулевые строки. Остановим процесс. Пусть матрица B_2 содержит, по крайней мере, три ненулевые строки. Перейдём к следующему шагу.

Первый вариант. Продолжая рассуждения, получим, что $Q = \varnothing$.

Второй вариант. Продолжая рассуждения, получим число $r = \overline{1, \min\{N_1, N_2\}}$, получим числа $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, получим матрицу $B_r \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, получим столбец $z_r \in \mathbb{K}^{N_2}$, удовлетворяющий условиям: $i_1, \ldots, i_r$ — различные числа, $j_1, \ldots, j_r$ — различные числа, $(B_r)_{i_k}^{j_k} \neq 0$, $(B_r)_{i_k}^{j} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_k$; $Q = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge B_r x = z_r\}$, матрица (B_r, z_r) не содержит квазинулевых строк, матрица B_r содержит ровно r ненулевых строк. Далее можно выписывать ответ.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.