Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Лекция 8. Базис линейного пространства

8.1. Базис линейного пространства

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$.

Будем говорить, что e — базис множества Q длины r, если: $r \in \mathbb{N}$, $e \in Q^r$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, $Q \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$.

Будем говорить, что e — базис множества Q, если существует число r, удовлетворяющее условию: e — базис множества Q длины r.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q *— подпространство пространства* L*,* e *— базис подпространства* Q *длины* r*. Тогда* $Q = L(e_1, \ldots, e_r)$*.*

Доказательство. Так как e — базис подпространства Q длины r, то: $r \in \mathbb{N}$, $e \in Q^r$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, $Q \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$.

Пусть $x \in L(e_1, \ldots, e_r)$. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $x = \lambda^k e_k$. Так как: Q — подпространство пространства L, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, то: $x = \lambda^k e_k \in Q$. Тогда $L(e_1, \ldots, e_r) \subseteq Q$. Так как: $Q \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$, $L(e_1, \ldots, e_r) \subseteq Q$, то $Q = L(e_1, \ldots, e_r)$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in L$*.*

1. Пусть e *— базис множества* $\{x_1, \ldots, x_r\}$ *длины* r_0*. Тогда* e *— базис подпространства* $L(x_1, \ldots, x_r)$ *длины* r_0*.*

2. Пусть: e *— базис подпространства* $L(x_1, \ldots, x_r)$ *длины* r_0*;* $e_1, \ldots, e_{r_0} \in \{x_1, \ldots, x_r\}$*. Тогда* e *— базис множества* $\{x_1, \ldots, x_r\}$ *длины* r_0*.*

Доказательство.

1. Так как e — базис множества $\{x_1, \ldots, x_r\}$ длины r_0, то: $r_0 \in \mathbb{N}$, $e \in \{x_1, \ldots, x_r\}^{r_0}$, $e_1, \ldots, e_{r_0}$ — линейно независимые векторы, $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq L(e_1, \ldots, e_{r_0})$.

Очевидно: $e_1, \ldots, e_{r_0} \in \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq L(x_1, \ldots, x_r)$. Пусть $x \in L(x_1, \ldots, x_r)$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $x = \alpha^k x_k$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда существуют числа $\beta_k^1, \ldots, \beta_k^{r_0} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $x_k = \beta_k^m e_m$. Следовательно:

$$x = \alpha^k x_k = \alpha^k (\beta_k^m e_m) = (\alpha^k \beta_k^m) e_m.$$

Итак, e — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_r)$ длины r_0.

2. Так как e — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_r)$ длины r_0, то: $r_0 \in \mathbb{N}$, $e \in L(x_1, \ldots, x_r)^{r_0}$, $e_1, \ldots, e_{r_0}$ — линейно независимые векторы, $L(x_1, \ldots, x_r) \subseteq L(e_1, \ldots, e_{r_0})$.

По условию, $e_1, \ldots, e_{r_0} \in \{x_1, \ldots, x_r\}$. Очевидно: $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq L(x_1, \ldots, x_r) \subseteq L(e_1, \ldots, e_{r_0})$. Итак, e — базис множества $\{x_1, \ldots, x_r\}$ длины r_0. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$, e — базис множества Q длины r.

Пусть $x \in Q$. Будем говорить, что $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x в базисе e, если: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^r$, $x = \tilde{x}^k e_k$.

Пусть $x \in Q$. Очевидно, существует единственный столбец $\tilde{x}$, удовлетворяющий условию: $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x в базисе e.

Пусть $x \in Q$. Обозначим через $[x](e)$ столбец координат вектора x в базисе e.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$, e — базис множества Q длины r.*

1. *Пусть: x, $y \in Q$, $x + y \in Q$. Тогда $[x + y](e) = [x](e) + [y](e)$.*
2. *Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q$, $\lambda x \in Q$. Тогда $[\lambda x](e) = \lambda [x](e)$.*
3. *Пусть $\theta \in Q$. Тогда $[\theta](e) = \tilde{\theta}$ (здесь $\tilde{\theta}$ — нулевой вектор пространства $\mathbb{K}^r$).*
4. *Справедливо утверждение: $[e_k]^m(e) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1, r}$.*

Доказательство.

1. Очевидно:

$$[x](e) + [y](e) \in \mathbb{K}^r,$$
$$x + y = [x]^k(e)e_k + [y]^k(e)e_k = \big([x]^k(e) + [y]^k(e)\big)e_k = \big([x](e) + [y](e)\big)^k e_k.$$

Тогда $[x + y](e) = [x](e) + [y](e)$.

2. Очевидно:

$$\lambda[x](e) \in \mathbb{K}^r,$$
$$\lambda x = \lambda\big([x]^k(e)e_k\big) = \big(\lambda[x]^k(e)\big)e_k = \big(\lambda[x](e)\big)^k e_k.$$

Тогда $[\lambda x](e) = \lambda[x](e)$.

3. Очевидно, $\tilde{\theta} \in \mathbb{K}^r$. Так как: $\tilde{\theta}^k = 0$ при $k = \overline{1, r}$, то $\theta = \tilde{\theta}^k e_k$. Тогда $[\theta](e) = \tilde{\theta}$.

4. Пусть $k = \overline{1, r}$. Очевидно, $e_k = [e_k]^m(e)e_m$. С другой стороны, $e_k = \delta_k^m e_m$. Тогда: $[e_k]^m(e) = \delta_k^m$ при $m = \overline{1, r}$. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$, e — базис пространства L длины N. Векторы $x_1, \ldots, x_r$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда столбцы $[x_1](e), \ldots, [x_r](e)$ являются линейно зависимыми.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$. Следовательно:

$$\lambda^k[x_k](e) = [\lambda^k x_k](e) = [\theta](e) = \tilde{\theta}.$$

Так как $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$, то $[x_1](e), \ldots, [x_r](e)$ — линейно зависимые столбцы.

Пусть $[x_1](e), \ldots, [x_r](e)$ — линейно зависимые столбцы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k[x_k](e) = \tilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$. Следовательно:

$$\lambda^k x_k = \big([\lambda^k x_k](e)\big)^m e_m = \big(\lambda^k[x_k](e)\big)^m e_m = \tilde{\theta}^m e_m = \theta.$$

Так как $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$, то $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Замечание (линейная система координат в линейном пространстве). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; e — базис пространства L длины r.

Обозначим: $h_e(x) = [x](e)$ при $x \in L$. Очевидно: h_e — обратимая функция, $\mathrm{D}(h_e) = L$, $\mathrm{R}(h_e) = \mathbb{K}^r$; $h_e^{-1}(\tilde{x}) = \tilde{x}^k e_k$ при $\tilde{x} \in \mathbb{K}^r$. Будем говорить, что h_e — линейная координатная карта (линейная система координат) в пространстве L, соответствующая базису e. Пусть $x \in L$. Будем говорить, что $h_e(x)$ — столбец координат вектора x в координатной карте h_e.

Утверждение. *Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — различные объекты, $Q = \{x_1, \ldots, x_r\}$; $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Фиксируем номер $k = \overline{1, r}$. Обозначим: $e_k(x_k) = 1$, $e_k(x) = 0$ при: $x \in Q$, $x \neq x_k$.*

1. *Справедливо утверждение: $e_1, \ldots, e_r$ — базис пространства $\mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$ длины r.*
2. *Пусть $\varphi\colon Q \implies \mathbb{K}$. Тогда: $[\varphi]^k(e) = \varphi(x_k)$ при $k = \overline{1, r}$.*

Доказательство.

1. Очевидно: $r \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_r\colon Q \implies \mathbb{K}$. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — различные объекты, то: $e_k(x_m) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1, r}$. Пусть $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$. Пусть $m = \overline{1, r}$. Тогда:

$$(\lambda^k e_k)(x_m) = \lambda^k e_k(x_m) = \lambda^k \delta_k^m = \lambda^m.$$

Пусть: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $\lambda^k e_k = \Theta$ (здесь Θ — нулевой вектор пространства $\mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$). Пусть $m = \overline{1, r}$. Тогда:

$$(\lambda^k e_k)(x_m) = \Theta(x_m),$$
$$\lambda^m = 0.$$

Следовательно, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые функции.

Пусть $\varphi\colon Q \implies \mathbb{K}$. Пусть $x \in Q$. Тогда существует номер $m = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $x = x_m$. Следовательно:

$$\Big(\sum_{k=1}^{r} \varphi(x_k) e_k\Big)(x) = \Big(\sum_{k=1}^{r} \varphi(x_k) e_k\Big)(x_m) = \varphi(x_m) = \varphi(x).$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{r} \varphi(x_k) e_k = \varphi$. Итак, $e_1, \ldots, e_r$ — базис пространства $\mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$ длины r.

2. Очевидно, $\varphi = [\varphi]^k(e) e_k$. С другой стороны, $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{r} \varphi(x_k) e_k$. Тогда: $[\varphi]^k(e) = \varphi(x_k)$ при $k = \overline{1, r}$. □

Замечание (простейший базис пространства $\mathbb{K}^N$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$. Обозначим: $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, e_N = (0, \ldots, 0, 1)^T$. Тогда $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства $\mathbb{K}^N$ длины N. Будем говорить, что e — простейший базис пространства $\mathbb{K}^N$.

Пусть $x \in \mathbb{K}^N$. Тогда: $[x]^k(e) = x^k$ при $k = \overline{1, r}$. Следовательно, $[x](e) = x$.

Замечание (простейший базис пространства $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$. Обозначим:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dots$$

$$e_{N_2N_1-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{N_2N_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда e — базис пространства $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$ длины N_2N_1. Будем говорить, что e — простейший базис пространства $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Тогда: $[A]^1(e) = A^1_1$, $[A]^2(e) = A^1_2, \dots, [A]^{N_2N_1-1}(e) = A^{N_2}_{N_1-1}$, $[A]^{N_2N_1}(e) = A^{N_2}_{N_1}$.

Замечание. Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \dots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ при $k = \overline{1,N}$. Тогда $e_1, \dots, e_N$ — базис пространства $\vec{E}^N$ длины N.

Замечание (аффинная система координат в аффинном пространстве). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$; $O \in Q$, e — базис пространства Q длины r.

Обозначим: $h_{O,e}(p) = [\overrightarrow{Op}](e)$ при $p \in Q$. Очевидно: $h_{O,e}$ — обратимая функция, $\mathrm{D}(h_{O,e}) = Q$, $\mathrm{R}(h_{O,e}) = \mathbb{K}^r$; $h^{-1}_{O,e}(x) = O + x^k e_k$ при $x \in \mathbb{K}^r$. Будем говорить, что: $h_{O,e}$ — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве Q, соответствующая точке O и базису e. Пусть $p \in Q$. Будем говорить, что $h_{O,e}(p)$ — столбец координат точки p в координатной карте $h_{O,e}$. Очевидно: $h^m_{O,e}(O) = [\overrightarrow{OO}]^m(e) = [\theta]^m(e) = 0$ при $m = \overline{1,r}$; $h^m_{O,e}(O + e_k) = \bigl[\overrightarrow{O(O + e_k)}\bigr]^m(e) = [e_k]^m(e) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1,r}$.

8.2. Размерность линейного пространства

Определение (ранг множества векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$.

Обозначим через $\mu_*(Q)$ множество всех номеров k, удовлетворяющих условиям: $k \in \mathbb{N}$, существуют векторы $x_1, \dots, x_k \in Q$, удовлетворяющие условию: $x_1, \dots, x_k$ — линейно независимые векторы.

Пусть $\mu_*(Q) = \varnothing$. Обозначим, $\operatorname{rank}(Q) = 0$.

Пусть: $\mu_*(Q) \neq \varnothing$, $\exists r \in \mathbb{N} \forall k \in \mu_*(Q) (k \leqslant r)$. Обозначим, $\operatorname{rank}(Q) = \max\bigl(\mu_*(Q)\bigr)$.

Пусть $\forall r \in \mathbb{N} \exists k \in \mu_*(Q) (k \geqslant r + 1)$. Обозначим, $\operatorname{rank}(Q) = +\infty$.

Будем говорить, что $\operatorname{rank}(Q)$ — ранг множества Q.

Определение (размерность подпространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства L. Обозначим, $\dim(Q) = \operatorname{rank}(Q)$. Будем говорить, что $\dim(Q)$ — размерность подпространства Q.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$.

Пусть $r \in \mu_*(Q)$. Тогда $\forall k = \overline{1, r}\big(k \in \mu_*(Q)\big)$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $r \notin \mu_*(Q)$. Тогда $\forall k[k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant r]\big(k \notin \mu_*(Q)\big)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$.

1. Пусть $\operatorname{rank}(Q) = 0$. Тогда для любого номера $k \in \mathbb{N}$, для любых векторов $x_1, \ldots, x_k \in Q$ справедливо утверждение: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно зависимые векторы.

   Пусть для любого вектора $x \in Q$ справедливо утверждение: x — линейно зависимый вектор. Тогда $\operatorname{rank}(Q) = 0$.
2. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q) = r$. Тогда: для любого номера $k = \overline{1, r}$ существуют векторы $x_1, \ldots, x_k \in Q$, удовлетворяющие условию: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно независимые векторы; для любого номера k, удовлетворяющего условиям: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant r + 1$, для любых векторов $x_1, \ldots, x_k \in Q$ справедливо утверждение: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно зависимые векторы.

   Пусть: $r \in \mathbb{N}$; существуют векторы $x_1, \ldots, x_r \in Q$, удовлетворяющие условию: $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы; для любых векторов $x_1, \ldots, x_{r+1} \in Q$ справедливо утверждение: $x_1, \ldots, x_{r+1}$ — линейно зависимые векторы. Тогда $\operatorname{rank}(Q) = r$.
3. Пусть $\operatorname{rank}(Q) = +\infty$. Тогда для любого номера $k \in \mathbb{N}$ существуют векторы $x_1, \ldots, x_k \in Q$, удовлетворяющие условию: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно независимые векторы.

   Пусть для любого номера $r \in \mathbb{N}$ существует номер k, удовлетворяющий условиям: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant r+1$, такой, что существуют векторы $x_1, \ldots, x_k \in Q$, удовлетворяющие условию: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно независимые векторы. Тогда $\operatorname{rank}(Q) = +\infty$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $Q \subseteq L$, $\operatorname{rank}(Q) = 0$. Тогда: Q — множество, $\forall x \in Q(x = \theta)$.

   Пусть: Q — множество, $\forall x \in Q(x = \theta)$. Тогда: $Q \subseteq L$, $\operatorname{rank}(Q) = 0$.
2. Пусть: $Q \subseteq L$, $\operatorname{rank}(Q) = 0$. Тогда $Q = \varnothing \vee Q = \{\theta\}$.

   Пусть $Q = \varnothing \vee Q = \{\theta\}$. Тогда: $Q \subseteq L$, $\operatorname{rank}(Q) = 0$.
3. Пусть: $Q \subseteq L$, Q — конечное множество. Тогда $\operatorname{rank}(Q) \leqslant \operatorname{card}(Q)$.
4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$, $Q = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Тогда: $Q \subseteq L$, Q — конечное множество, $\operatorname{card}(Q) \leqslant r$. Следовательно $\operatorname{rank}(Q) \leqslant r$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q_2 \subseteq L$, $Q_1 \subseteq Q_2$*. Тогда* $\operatorname{rank}(Q_1) \leqslant \operatorname{rank}(Q_2)$.

Доказательство. Обозначим: $r_1 = \operatorname{rank}(Q_1)$, $r_2 = \operatorname{rank}(Q_2)$. Тогда r_1, $r_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Предположим, что $r_2 < r_1$. Тогда: $r_1 \in \overline{\mathbb{N}}$, $r_2 \in \mathbb{Z}_+$. Так как: $\operatorname{rank}(Q_1) = r_1$, $r_2 + 1 \leqslant r_1$, то существуют векторы $x_1, \ldots, x_{r_2+1}$, удовлетворяющие условиям: $x_1, \ldots, x_{r_2+1} \in Q_1$, $x_1, \ldots, x_{r_2+1}$ — линейно независимые векторы. Так как: $x_1, \ldots, x_{r_2+1} \in Q_1$, $Q_1 \subseteq Q_2$, то $x_1, \ldots, x_{r_2+1} \in Q_2$. Так как $\operatorname{rank}(Q_2) = r_2$, то $x_1, \ldots, x_{r_2+1}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $x_1, \ldots, x_{r_2+1}$ — линейно независимые векторы). Итак, $r_1 \leqslant r_2$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$, $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q) = r$, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, $e_1, \ldots, e_r$ *— линейно независимые векторы. Тогда* $e_1, \ldots, e_r$ *— базис множества* Q *длины* r.

Доказательство. По условию: $r \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть $x \in Q$. Так как: $\operatorname{rank}(Q) = r$, $e_1, \dots, e_r \in Q$, то $e_1, \dots, e_r, x$ — линейно зависимые векторы. Так как $e_1, \dots, e_r$ — линейно независимые векторы, то $x \in L(e_1, \dots, e_r)$. Итак, e — базис множества Q длины r. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$*,* $r \in \mathbb{N}$*,* $\operatorname{rank}(Q) = r$*. Тогда существуют векторы* $e_1, \dots, e_r$*, удовлетворяющие условию:* $e_1, \dots, e_r$ *— базис множества* Q *длины* r*.*

Доказательство. Так как $\operatorname{rank}(Q) = r$, то существуют векторы $e_1, \dots, e_r$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \dots, e_r \in Q$, $e_1, \dots, e_r$ — линейно независимые векторы. Так как $\operatorname{rank}(Q) = r$, то $e_1, \dots, e_r$ — базис множества Q длины r. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \dots, x_r \in L$*.*

Пусть: $r_0 \in \mathbb{N}$*,* $e \in \{x_1, \dots, x_r\}^{r_0}$*,* $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq L(e_1, \dots, e_{r_0})$*,* $r_0 < r$*. Тогда* $x_1, \dots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Так как $e_1, \dots, e_{r_0} \in \{x_1, \dots, x_r\}$, то существуют числа $k_1, \dots, k_{r_0} = \overline{1, r}$, удовлетворяющие условиям: $e_1 = x_{k_1}, \dots, e_{r_0} = x_{k_{r_0}}$. Так как $r_0 < r$, то существует число $k = \overline{1, r}$, удовлетворяющее условию $k \notin \{k_1, \dots, k_{r_0}\}$. Тогда $k_1, \dots, k_{r_0} \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, r\}$. Так как $x_k \in \{x_1, \dots, x_r\}$, то: $x_k \in L(e_1, \dots, e_{r_0}) = L(x_{k_1}, \dots, x_{k_{r_0}})$. Так как $k_1, \dots, k_{r_0} \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, r\}$, то $x_k \in L(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_r)$. Тогда $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*,* $Q_1 \subseteq Q_2$*,* $\dim(Q_1) = \dim(Q_2)$*,* $\dim(Q_2) \neq +\infty$*. Тогда* $Q_1 = Q_2$*.*

Доказательство. Обозначим, $N = \dim(Q_2)$. Тогда: $N \in \mathbb{Z}_+$, $\dim(Q_1)$, $\dim(Q_2) = N$.

Пусть $N = 0$. Так как $\dim(Q_1)$, $\dim(Q_2) = N$, то Q_1, $Q_2 = \{\theta\}$. Тогда $Q_1 = Q_2$.

Пусть $N \neq 0$. Тогда $N \in \mathbb{N}$. Так как $\dim(Q_1) = N$, то существуют векторы $e_1, \dots, e_N$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \dots, e_N \in Q_1$, $e_1, \dots, e_N$ — линейно независимые векторы. Так как $\dim(Q) = N$, то $e_1, \dots, e_N$ — базис подпространства Q_1 длины N. Так как: $e_1, \dots, e_N \in Q_1$, $Q_1 \subseteq Q_2$, то $e_1, \dots, e_N \in Q_2$. Так как: $\dim(Q_2) = N$, $e_1, \dots, e_N$ — линейно независимые векторы, то $e_1, \dots, e_N$ — базис подпространства Q_2 длины N. Тогда: $Q_1 = L(e_1, \dots, e_N) = Q_2$. $\square$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.