Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Лекция 3. Матричная алгебра. Определители порядков 1, 2, 3

3.1. Пространство $\mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$

Определение (что такое матрица). Пусть N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$.

1. Будем говорить, что A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец, если: A — функция, $\mathrm{D}(A) = \{1, \ldots, N_2\} \times \{1, \ldots, N_1\}$.

2. Пусть $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^{N_2}, \ldots, \alpha_{N_1}^1, \ldots, \alpha_{N_1}^{N_2}$ — некоторые объекты. Пусть: $A(j, i) = \alpha_i^j$ при: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Обозначим:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_{N_1}^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_1^{N_2} & \cdots & \alpha_{N_1}^{N_2} \end{pmatrix} = A.$$

Пусть A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец. Тогда:

$$A = \begin{pmatrix} A(1,1) & \cdots & A(1, N_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A(N_2, 1) & \cdots & A(N_2, N_1) \end{pmatrix}.$$

3. Пусть A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец. Далее часто будем писать: A_i^j, $A_{j,i}$, $A^{j,i}$ вместо $A(j, i)$. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Обозначим:

$$A_i = \begin{pmatrix} A_i^1 \\ \vdots \\ A_i^{N_2} \end{pmatrix}.$$

Пусть $j = \overline{1, N_2}$. Обозначим:

$$A^j = \begin{pmatrix} A_1^j & \cdots & A_{N_1}^j \end{pmatrix}.$$

4. Пусть Q — множество. Будем говорить, что A — матрица с элементами из множества Q, имеющая N_2 строки и N_1 столбец, если:

$$A \colon \{1, \ldots, N_2\} \times \{1, \ldots, N_1\} \implies Q.$$

5. Пусть Q — множество. Обозначим через $Q^{N_2 \times N_1}$ множество всех матриц с элементами из множества Q, имеющих N_2 строки и N_1 столбец.

Определение. Пусть N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть A, $B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим:

$$(A+B)_i^j = A_i^j + B_i^j, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Очевидно, $A+B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что $\{A+B\}_{A,B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}}$ — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим:

$$(\lambda A)_i^j = \lambda A_i^j, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Очевидно, $\lambda A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что $\{\lambda A\}_{\lambda \in \mathbb{R},\, A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$.

Обозначим:

$$\Theta_i^j = 0, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Очевидно, $\Theta \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что Θ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$.

Утверждение. *Пусть N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$.*

1. *Пусть A, $B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $A + B = B + A$.*
2. *Пусть A, B, $C \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $(A + B) + C = A + (B + C)$.*
3. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $A + \Theta = A$.*
4. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $A + (-1)A = \Theta$.*
5. *Пусть: α, $\beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.*
6. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $1A = A$.*
7. *Пусть: α, $\beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.*
8. *Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.*
9. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $0A = \Theta$.*
10. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda\Theta = \Theta$.*
11. *Пусть A, $B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Существует единственная матрица X, удовлетворяющая условиям: $X \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $A + X = B$.*

Доказательство.

1. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(A+B)_i^j = A_i^j + B_i^j = B_i^j + A_i^j = (B+A)_i^j.$$

Следовательно, $A + B = B + A$.

2. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big((A+B)+C\big)_i^j = (A_i^j + B_i^j) + C_i^j = A_i^j + (B_i^j + C_i^j) = \big(A + (B+C)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(A+\Theta)_i^j = A_i^j + \Theta_i^j = A_i^j + 0 = A_i^j.$$

Следовательно, $A + \Theta = A$.

4. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\bigl(A+(-1)A\bigr)_i^j=A_i^j+(-1)A_i^j=0=\Theta_i^j.$$

Следовательно, $A+(-1)A=\Theta$.

5. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\bigl((\alpha\beta)A\bigr)_i^j=(\alpha\beta)A_i^j=\alpha(\beta A_i^j)=\bigl(\alpha(\beta A)\bigr)_i^j.$$

Следовательно, $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

6. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$(1A)_i^j=1A_i^j=A_i^j.$$

Следовательно, $1A=A$.

7. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\bigl((\alpha+\beta)A\bigr)_i^j=(\alpha+\beta)A_i^j=\alpha A_i^j+\beta A_i^j=(\alpha A+\beta A)_i^j.$$

Следовательно, $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

8. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\bigl(\lambda(A+B)\bigr)_i^j=\lambda(A_i^j+B_i^j)=\lambda A_i^j+\lambda B_i^j=(\lambda A+\lambda B)_i^j.$$

Следовательно, $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

9. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$(0A)_i^j=0A_i^j=0=\Theta_i^j.$$

Следовательно, $0A=\Theta$.

10. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$(\lambda\Theta)_i^j=\lambda\Theta_i^j=\lambda 0=0=\Theta_i^j.$$

Следовательно, $\lambda\Theta=\Theta$.

11. Пусть: $X\in\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$, $A+X=B$. Тогда:

$$\begin{gathered}(-1)A+(A+X)=(-1)A+B,\\ \bigl((-1)A+A\bigr)+X=(-1)A+B,\\ \bigl(A+(-1)A\bigr)+X=(-1)A+B,\\ \Theta+X=(-1)A+B,\\ X+\Theta=(-1)A+B,\\ X=(-1)A+B.\end{gathered}$$

Пусть: $X_1\in\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$, $A+X_1=B$, $X_2\in\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$, $A+X_2=B$. Тогда: $X_1=(-1)A+B$, $X_2=(-1)A+B$. Следовательно, $X_1=X_2$.

Обозначим, $X=(-1)A+B$. Тогда: $X\in\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$, $A+X=A+\bigl((-1)A+B\bigr)=\bigl(A+(-1)A\bigr)+B=\Theta+B=B+\Theta=B$. □

Определение. Пусть N_1, $N_2\in\mathbb{N}$.

Пусть $A\in\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$. Обозначим, $-A=(-1)A$. Очевидно: $-A\in\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$, $A+(-A)=\Theta$. Будем говорить, что $-A$ — противоположная матрица к матрице A.

Пусть A, $B\in\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$. Обозначим, $B-A=(-1)A+B$. Очевидно: $B-A\in\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$, $A+(B-A)=B$. Будем говорить, что $B-A$ — разность матриц B, A.

3.2. Линейная комбинация матриц, линейная зависимость матриц

Определение (линейная комбинация матриц). Пусть: $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $X_1, \ldots, X_r \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$.

Будем говорить, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k X_k$ — линейная комбинация матриц $X_1, \ldots, X_r$ с коэффициентами $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$.

Далее часто будем писать $\lambda^k X_k$ вместо $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k X_k$ (частный случай *правила суммирования Эйнштейна*).

Определение (линейная оболочка матриц, линейная зависимость матриц, линейная независимость матриц). Пусть: $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_r \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$.

Обозначим:

$$L(X_1, \ldots, X_r) = \{\lambda^k X_k \colon \lambda^1 \in \mathbb{R} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \bigl\{U \colon \exists \lambda^1 \cdots \exists \lambda^r (\lambda^1 \in \mathbb{R} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{R} \wedge U = \lambda^k X_k)\bigr\}.$$

Очевидно, $L(X_1, \ldots, X_r) \subseteq \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что $L(X_1, \ldots, X_r)$ — линейная оболочка матриц $X_1, \ldots, X_r$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда: $X_k = \delta_k^m X_m \in L(X_1, \ldots, X_r)$.

Будем говорить, что по любой линейной комбинации матриц $X_1, \ldots, X_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, если для любых чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r$, удовлетворяющих условиям: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in \mathbb{R}$, $\alpha^k X_k = \beta^k X_k$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r} (\alpha^k = \beta^k)$.

Будем говорить, что $X_1, \ldots, X_r$ — линейно зависимые матрицы, если существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k X_k = \Theta$, $\exists k = \overline{1, r} (\lambda^k \neq 0)$.

Будем говорить, что $X_1, \ldots, X_r$ — линейно независимые матрицы, если для любых чисел $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, удовлетворяющих условиям: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k X_k = \Theta$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r} (\lambda^k = 0)$.

Утверждение (критерий линейной зависимости матриц)**.** *Пусть $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$.*

1. Пусть $X \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Матрица X является линейно зависимой тогда и только тогда, когда $X = \Theta$.

2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $X_1, \ldots, X_r \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Матрицы $X_1, \ldots, X_r$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда существует номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $X_{k_0} \in L(X_1, \ldots, X_{k_0 - 1}, X_{k_0 + 1}, \ldots, X_r)$.

Доказательство.

1. Пусть X — линейно зависимая матрица. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям: $\lambda X = \Theta$, $\lambda \neq 0$. Следовательно, $X = \Theta$.

Пусть $X = \Theta$. Тогда $1X = \Theta$. Так как $1 \neq 0$, то X — линейно зависимая матрица.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_r$ — линейно зависимые матрицы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^N \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k X_k = \Theta$, $\exists k = \overline{1, r} (\lambda^k \neq 0)$. Выберем номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $\lambda^{k_0} \neq 0$. Тогда:

$$\lambda^1 X_1 + \cdots + \lambda^{k_0 - 1} X_{k_0 - 1} + \lambda^{k_0} X_{k_0} + \lambda^{k_0 + 1} X_{k_0 + 1} + \cdots + \lambda^r X_r = \Theta,$$
$$X_{k_0} = \frac{-\lambda^1}{\lambda_{k_0}} X_1 + \cdots + \frac{-\lambda^{k_0 - 1}}{\lambda_{k_0}} X_{k_0 - 1} + \frac{-\lambda^{k_0 + 1}}{\lambda_{k_0}} X_{k_0 + 1} + \cdots + \frac{-\lambda^r}{\lambda_{k_0}} X_r,$$
$$X_{k_0} \in L(X_1, \ldots, X_{k_0 - 1}, X_{k_0 + 1}, \ldots, X_r).$$

Пусть существует номер $k_0 = \overline{1,r}$, удовлетворяющий условию $X_{k_0} \in L(X_1, \dots, X_{k_0-1}, X_{k_0+1}, \dots, X_r)$. Тогда существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^{k_0-1}$, $\lambda^{k_0+1}, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию:

$$X_{k_0} = \lambda^1 X_1 + \dots + \lambda^{k_0-1} X_{k_0-1} + \lambda^{k_0+1} X_{k_0+1} + \dots + \lambda^r X_r.$$

Следовательно:

$$(-\lambda^1) X_1 + \dots + (-\lambda^{k_0-1}) X_{k_0-1} + 1 X_{k_0} + (-\lambda^{k_0+1}) X_{k_0+1} + \dots + (-\lambda^r) X_r = \Theta.$$

Так как $1 \neq 0$, то $X_1, \dots, X_r$ — линейно зависимые матрицы. $\square$

Утверждение (критерий линейной независимости матриц)**.** *Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Матрицы $X_1, \dots, X_r$ являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда по любой линейной комбинации матриц $X_1, \dots, X_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $X_1, \dots, X_r$ — линейно независимые матрицы. Пусть: $\alpha^1, \dots, \alpha^r$, $\beta^1, \dots, \beta^r \in \mathbb{R}$, $\alpha^k X_k = \beta^k X_k$. Тогда $(\alpha^k - \beta^k) X_k = \Theta$. Так как $X_1, \dots, X_r$ — линейно независимые матрицы, то $\forall k = \overline{1,r} (\alpha^k - \beta^k = 0)$. Тогда $\forall k = \overline{1,r} (\alpha^k = \beta^k)$. Следовательно, по любой линейной комбинации матриц $X_1, \dots, X_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.

Пусть по любой линейной комбинации матриц $X_1, \dots, X_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты. Пусть: $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k X_k = \Theta$. Тогда:

$$\lambda^1 X_1 + \dots + \lambda^r X_r = 0 X_1 + \dots + 0 X_r.$$

Так как по любой линейной комбинации матриц $X_1, \dots, X_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, то $\forall k = \overline{1,r} (\lambda^k = 0)$. Тогда $X_1, \dots, X_r$ — линейно независимые матрицы. $\square$

Утверждение. *Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_r$, $X \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $X_1, \dots, X_r$ — линейно независимые матрицы, $X_1, \dots, X_r$, X — линейно зависимые матрицы. Тогда $X \in L(X_1, \dots, X_r)$.*

Доказательство. Так как $X_1, \dots, X_r$, X — линейно зависимые матрицы, то существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^{r+1} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 X_1 + \dots + \lambda^r X_r + \lambda^{r+1} X = \Theta$, $\exists k = \overline{1, r+1} (\lambda^k \neq 0)$. Предположим, что $\lambda^{r+1} = 0$. Тогда: $\lambda^1 X_1 + \dots + \lambda^r X_r = \Theta$, $\exists k = \overline{1,r} (\lambda^k \neq 0)$ (что противоречит утверждению: $X_1, \dots, X_r$ — линейно независимые матрицы). Итак, $\lambda^{r+1} \neq 0$. Тогда:

$$X = \frac{-\lambda^1}{\lambda^{r+1}} X_1 + \dots + \frac{-\lambda^r}{\lambda^{r+1}} X_r,$$
$$X \in L(X_1, \dots, X_r). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $\sigma \in S_r$, $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}$ — линейно зависимые матрицы. Тогда $X_1, \dots, X_r$ — линейно зависимые матрицы.*

Доказательство. Так как $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}$ — линейно зависимые матрицы, то существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 X_{\sigma(1)} + \dots + \lambda^r X_{\sigma(r)} = \Theta$, $\exists m = \overline{1,r} (\lambda^m \neq 0)$. Тогда:

$$\lambda^{\sigma^{-1}(1)} X_1 + \dots + \lambda^{\sigma^{-1}(r)} X_r = \Theta, \quad \exists k = \overline{1,r} (\lambda^{\sigma^{-1}(k)} \neq 0).$$

Следовательно, $X_1, \dots, X_r$ — линейно зависимые матрицы. $\square$

Утверждение. *Пусть:* N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$*;* $r \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_r \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $r_0 \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1, r}$, $k_1 < \cdots < k_{r_0}$, $X_{k_1}, \ldots, X_{k_{r_0}}$ *— линейно зависимые матрицы. Тогда* $X_1, \ldots, X_r$ *— линейно зависимые матрицы.*

Доказательство. Так как $X_{k_1}, \ldots, X_{k_{r_0}}$ — линейно зависимые матрицы, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_0} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1 X_{k_1} + \cdots + \alpha^{r_0} X_{k_{r_0}} = \Theta$, $\exists m = \overline{1, r_0}(\alpha^m \neq 0)$. Обозначим: $\beta^{k_1} = \alpha^1, \ldots, \beta^{k_{r_0}} = \alpha^{r_0}$, $\beta^k = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Тогда:

$$\beta^{k_1} X_{k_1} + \cdots + \beta^{k_{r_0}} X_{k_{r_0}} = \Theta, \quad \exists m = \overline{1, r_0}(\beta^{k_m} \neq 0);$$
$$\beta^1 X_1 + \cdots + \beta^r X_r = \Theta, \quad \exists k = \overline{1, r}(\beta^k \neq 0).$$

Следовательно, $X_1, \ldots, X_r$ — линейно зависимые матрицы. □

3.3. Перемножение матриц

Определение.

1. Пусть: N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. Обозначим:

$$(BA)^j_i = B^j_k A^k_i, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_3}.$$

Очевидно, $BA \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Будем говорить, что BA — произведение матриц B, A.

2. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим:

$$I^j_i = \delta^j_i, \quad i = \overline{1, N},\ j = \overline{1, N}.$$

Очевидно, $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Будем говорить, что I — единичная матрица из множества $\mathbb{R}^{N \times N}$.

Утверждение.

1. *Пусть:* N_1, N_2, N_3, $N_4 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$, $C \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_3}$. *Тогда* $(CB)A = C(BA)$.
2. *Пусть:* N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. *Тогда:* $AI_1 = A$, $I_2 A = A$.
3. *Пусть:* N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. *Тогда* $(B_1 + B_2)A = B_1 A + B_2 A$.
4. *Пусть:* N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$*;* $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. *Тогда* $(\lambda B)A = \lambda(BA)$.
5. *Пусть:* N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$*;* A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. *Тогда* $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$.
6. *Пусть:* N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$*;* $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. *Тогда* $B(\lambda A) = \lambda(BA)$.

Доказательство.

1. Очевидно, $(CB)A$, $C(BA) \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_4}$. Тогда:

$$\big((CB)A\big)^j_i = \sum_{k=1}^{N_2} (CB)^j_k A^k_i = \sum_{k=1}^{N_2} \left(\sum_{m=1}^{N_3} C^j_m B^m_k \right) A^k_i = \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{m=1}^{N_3} (C^j_m B^m_k) A^k_i =$$
$$= \sum_{m=1}^{N_3} \sum_{k=1}^{N_2} C^j_m (B^m_k A^k_i) = \sum_{m=1}^{N_3} C^j_m \sum_{k=1}^{N_2} B^m_k A^k_i = \sum_{m=1}^{N_3} C^j_m (BA)^m_i = \big(C(BA)\big)^j_i.$$

Следовательно, $(CB)A = C(BA)$.

Проделаем аналогичные выкладки, используя правило суммирования Эйнштейна. Очевидно, $(CB)A$, $C(BA) \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_4}$. Тогда:

$$\big((CB)A\big)^j_i = (CB)^j_k A^k_i = (C^j_m B^m_k) A^k_i = C^j_m (B^m_k A^k_i) = C^j_m (BA)^m_i = \big(C(BA)\big)^j_i.$$

Следовательно, $(CB)A = C(BA)$.

2. Очевидно, AI_1, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(AI_1)_i^j = A_k^j (I_1)_i^k = A_k^j \delta_i^k = A_i^j.$$

Следовательно, $AI_1 = A$.

Очевидно, $I_2 A$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(I_2 A)_i^j = (I_2)_k^j A_i^k = \delta_k^j A_i^k = A_i^j.$$

Следовательно, $I_2 A = A$.

3. Очевидно, $(B_1 + B_2)A$, $B_1 A + B_2 A \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_3}$. Тогда:

$$\big((B_1 + B_2)A\big)_i^j = (B_1 + B_2)_k^j A_i^k = \big((B_1)_k^j + (B_2)_k^j\big) A_i^k = (B_1)_k^j A_i^k + (B_2)_k^j A_i^k = \\ = (B_1 A)_i^j + (B_2 A)_i^j = (B_1 A + B_2 A)_i^j.$$

Следовательно, $(B_1 + B_2)A = B_1 A + B_2 A$.

4. Очевидно, $(\lambda B)A$, $\lambda(BA) \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_3}$. Тогда:

$$\big((\lambda B)A\big)_i^j = (\lambda B)_k^j A_i^k = (\lambda B_k^j) A_i^k = \lambda(B_k^j A_i^k) = \lambda (BA)_i^j = \big(\lambda(BA)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(\lambda B)A = \lambda(BA)$.

5. Очевидно, $B(A_1 + A_2)$, $BA_1 + BA_2 \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_3}$. Тогда:

$$\big(B(A_1 + A_2)\big)_i^j = B_k^j (A_1 + A_2)_i^k = B_k^j \big((A_1)_i^k + (A_2)_i^k\big) = B_k^j (A_1)_i^k + B_k^j (A_2)_i^k = \\ = (BA_1)_i^j + (BA_2)_i^j = (BA_1 + BA_2)_i^j.$$

Следовательно, $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$.

6. Очевидно, $B(\lambda A)$, $\lambda(BA) \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_3}$. Тогда:

$$\big(B(\lambda A)\big)_i^j = B_k^j (\lambda A)_i^k = B_k^j (\lambda A_i^k) = \lambda(B_k^j A_i^k) = \lambda (BA)_i^j = \big(\lambda(BA)\big)_i^j.$$

Следовательно, $B(\lambda A) = \lambda(BA)$. □

Замечание.

1. Пусть N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$. Пусть: $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$. Будем говорить, что матрицы B, A коммутируют, если $BA = AB$.

Пусть: $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$, матрицы B, A коммутируют. Тогда $N_2 = N_1$.

2. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Пусть A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Обозначим, $[B, A] = BA - AB$. Будем говорить, что $[B, A]$ — коммутатор матриц B, A.

Пусть A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Матрицы B, A коммутируют тогда и только тогда, когда $[B, A] = \Theta$.

3. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Тогда $[B_1 + B_2, A] = [B_1, A] + [B_2, A]$.
4. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Тогда $[\lambda B, A] = \lambda [B, A]$.
5. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A_1, A_2, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Тогда $[B, A_1 + A_2] = [B, A_1] + [B, A_2]$.
6. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Тогда $[B, \lambda A] = \lambda [B, A]$.
7. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Тогда $[A, B] = -[B, A]$.
8. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A, B, $C \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Тогда $\big[C, [B, A]\big] + \big[A, [C, B]\big] + \big[B, [A, C]\big] = \Theta$.

3.4. Транспонирование матрицы

Определение. Пусть: $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим:

$$(A^T)_i^j = A_j^i, \quad i = \overline{1, N_2},\ j = \overline{1, N_1}.$$

Очевидно, $A^T \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$. Будем говорить, что A^T — результат транспонирования матрицы A.

Утверждение.
1. *Пусть:* $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$*;* $A,\ B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$*. Тогда* $(A+B)^T = A^T + B^T$*.*
2. *Пусть:* $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$*;* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$*. Тогда* $(\lambda A)^T = \lambda A^T$*.*
3. *Пусть:* $N_1,\ N_2,\ N_3 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$*,* $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$*. Тогда* $(BA)^T = A^T B^T$*.*
4. *Пусть:* $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$*. Тогда* $(A^T)^T = A$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $(A+B)^T,\ A^T + B^T \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$. Пусть: $i = \overline{1, N_2}$, $j = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$\big((A+B)^T\big)_i^j = (A+B)_j^i = A_j^i + B_j^i = (A^T)_i^j + (B^T)_i^j = (A^T + B^T)_i^j.$$

Следовательно, $(A+B)^T = A^T + B^T$.

2. Очевидно, $(\lambda A)^T,\ \lambda A^T \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$. Пусть: $i = \overline{1, N_2}$, $j = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$\big((\lambda A)^T\big)_i^j = (\lambda A)_j^i = \lambda A_j^i = \lambda (A^T)_i^j = (\lambda A^T)_i^j.$$

Следовательно, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

3. Очевидно, $(BA)^T,\ A^T B^T \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_3}$. Пусть: $i = \overline{1, N_3}$, $j = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$\big((BA)^T\big)_i^j = (BA)_j^i = B_k^i A_j^k = (B^T)_i^k (A^T)_k^j = (A^T)_k^j (B^T)_i^k = (A^T B^T)_i^j.$$

Следовательно, $(BA)^T = A^T B^T$.

4. Очевидно, $(A^T)^T,\ A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big((A^T)^T\big)_i^j = (A^T)_j^i = A_i^j.$$

Следовательно, $(A^T)^T = A$. □

3.5. След матрицы

Определение. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Обозначим, $\mathrm{tr}(A) = A_k^k$. Очевидно, $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\mathrm{tr}(A)$ — след матрицы A.

Утверждение. *Пусть* $N \in \mathbb{N}$*.*
1. *Пусть* $A,\ B \in \mathbb{R}^{N \times N}$*. Тогда* $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$*.*
2. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$*. Тогда* $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A)$*.*
3. *Пусть* $A,\ B \in \mathbb{R}^{N \times N}$*. Тогда* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$*.*
4. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$*. Тогда* $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\mathrm{tr}(A+B) = \sum_{k=1}^{N} (A+B)_k^k = \sum_{k=1}^{N} (A_k^k + B_k^k) = \sum_{k=1}^{N} A_k^k + \sum_{k=1}^{N} B_k^k = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).$$

2. Очевидно:

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \sum_{k=1}^{N} (\lambda A)_k^k = \sum_{k=1}^{N} \lambda A_k^k = \lambda \sum_{k=1}^{N} A_k^k = \lambda \operatorname{tr}(A).$$

3. Очевидно:

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{N} (AB)_k^k = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} A_m^k B_k^m = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} B_k^m A_m^k = \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} B_k^m A_m^k = \sum_{m=1}^{N} (BA)_m^m = \\ = \operatorname{tr}(BA).$$

4. Очевидно:

$$\operatorname{tr}(A^T) = \sum_{k=1}^{N} (A^T)_k^k = \sum_{k=1}^{N} A_k^k = \operatorname{tr}(A). \quad \square$$

3.6. Определители порядков 1, 2, 3

Определение. Пусть $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$. Обозначим, $\det_1(A) = A_1^1$. Очевидно, $\det_1 \colon \mathbb{R}^{1\times 1} \Longrightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\det_1$ — определитель в пространстве $\mathbb{R}^{1\times 1}$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Обозначим, $\det_2(A) = A_1^1 A_2^2 - A_1^2 A_2^1$. Очевидно, $\det_2 \colon \mathbb{R}^{2\times 2} \Longrightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\det_2$ — определитель в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Обозначим, $\det_3(A) = A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_1^3 A_2^1 A_3^2 + A_1^2 A_2^3 A_3^1 - A_1^3 A_2^2 A_3^1 - A_1^1 A_2^3 A_3^2 - A_1^2 A_2^1 A_3^3$. Очевидно, $\det_3 \colon \mathbb{R}^{3\times 3} \Longrightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\det_3$ — определитель в пространстве $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Далее часто будем писать $\det$ вместо $\det_N$.

Утверждение (доказывается прямой проверкой)**.** *Пусть* $N = \overline{1,3}$.

1. *Пусть:* $k = \overline{1,N}$, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_N$, X, $Y \in \mathbb{R}^N$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, X + Y, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \\ = \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_N) + \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, Y, A_{k+1}, \ldots, A_N).$$

2. *Пусть:* $k = \overline{1,N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \lambda \det(A_1, \ldots, A_N).$$

3. *Пусть:* k, $m = \overline{1,N}$, $k < m$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$, $A_k = A_m$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_N) = 0.$$

4. *Справедливо утверждение:*

$$\det(I) = 1.$$

Утверждение. *Пусть* $N = \overline{1,3}$.

1. *Пусть:* k, $m = \overline{1,N}$, $k < m$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = -\det(A_1, \ldots, A_N).$$

2. Пусть: $k = \overline{1,N}$, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \tilde{\theta}, A_{k+1}, \ldots, A_N) = 0.$$

3. Пусть: $N \geqslant 2$, $k = \overline{1,N}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$, $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_N) = 0.$$

4. Пусть: $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$, $A_1, \ldots, A_N$ *— линейно зависимые столбцы. Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_N) = 0.$$

5. Пусть: $N \geqslant 2$, $k = \overline{1,N}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$, $X \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \det(A_1, \ldots, A_N).$$

6. Пусть: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $k_1, \ldots, k_N = \overline{1,N}$. *Тогда:*

$$\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}).$$

7. Пусть $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. *Тогда:*

$$\det(A) = \det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N}.$$

8. Пусть A, $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$. *Тогда:*

$$\det(BA) = \det(B)\det(A).$$

9. Пусть $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. *Тогда:*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\begin{gathered}
\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k + A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0,\\
\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) +\\
+ \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) +\\
+ \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) +\\
+ \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0,\\
\det(A_1, \ldots, A_N) + \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0,\\
\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = -\det(A_1, \ldots, A_N).
\end{gathered}$$

2. Очевидно:

$$\begin{gathered}
\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \tilde{\theta}, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, 0\tilde{\theta}, A_{k+1}, \ldots, A_N) =\\
= 0\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \tilde{\theta}, A_{k+1}, \ldots, A_N) = 0.
\end{gathered}$$

3. Так как $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^{k-1}, \lambda^{k+1}, \ldots, \lambda^N \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию $A_k = \sum\limits_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \lambda^m A_m$. Тогда:

$$\det(A_1, \ldots, A_N) = \det\Big(A_1, \ldots, A_{k-1}, \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \lambda^m A_m, A_{k+1}, \ldots, A_N\Big) =$$
$$= \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \lambda^m \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_N) = 0.$$

4. Пусть $N = 1$. Так как A_1 — линейно зависимый столбец, то $A_1 = \tilde{\theta}$. Тогда: $\det(A_1) = \det(\tilde{\theta}) = 0$.

Пусть $N \geqslant 2$. Так как $A_1, \ldots, A_N$ — линейно зависимые столбцы, то существует номер $k = \overline{1, N}$, удовлетворяющий условию $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$. Тогда $\det(A_1, \ldots, A_N) = 0$.

5. Очевидно:

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \ldots, A_N) =$$
$$= \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_N) + \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_N) =$$
$$= \det(A_1, \ldots, A_N).$$

6. Пусть числа $k_1, \ldots, k_N$ не являются различными. Тогда: $\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = 0$, $\det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) = 0$. Следовательно, $\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N})$.

Пусть $k_1, \ldots, k_N$ — различные числа. Очевидно, $\{k_1, \ldots, k_N\} = \{1, \ldots, N\}$. Тогда:

$$\det(A) = \det(A)\det(I),$$
$$\det(A_1, \ldots, A_N) = \det(A)\det(I_1, \ldots, I_N),$$
$$\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}).$$

7. Очевидно:

$$\det(A) = \det(A_1, \ldots, A_N) = \det(I_{k_1}A_1^{k_1}, \ldots, I_{k_N}A_N^{k_N}) = \det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N})A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N}.$$

8. Очевидно:

$$\det(BA) = \det\big((BA)_1, \ldots, (BA)_N\big) = \det(B_{k_1}A_1^{k_1}, \ldots, B_{k_N}A_N^{k_N}) =$$
$$= \det(B_{k_1}, \ldots, B_{k_N})A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N} = \det(B)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N})A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N} = \det(B)\det(A).$$

9. Утверждение доказывается прямой проверкой. □

Замечание. Пусть $N = \overline{1, 3}$. Обозначим: $\tilde{\varepsilon}_{k_1,\ldots,k_N} = \det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N})$ при $k_1, \ldots, k_N = \overline{1, N}$. Пусть $k_1, \ldots, k_N = \overline{1, N}$. Пусть числа $k_1, \ldots, k_N$ не являются различными. Тогда $\tilde{\varepsilon}_{k_1,\ldots,k_N} = 0$. Пусть $k_1, \ldots, k_N$ — различные числа. Очевидно, $\{k_1, \ldots, k_N\} = \{1, \ldots, N\}$. Тогда: $|\tilde{\varepsilon}_{k_1,\ldots,k_N}| = |\tilde{\varepsilon}_{1,\ldots,N}| = 1$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Тогда $\det(A) = \tilde{\varepsilon}_{k_1,\ldots,k_N} A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N}$.

Определение. Пусть: $N = 2, 3$; $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $i, j = \overline{1, N}$. Обозначим через $\overline{\Delta}_i^j(A)$ определитель матрицы, которая получается из матрицы A вычёркиванием столбца A_i и строки A^j. Будем говорить, что $\overline{\Delta}_i^j(A)$ — минор матрицы A, дополнительный к элементу A_i^j. Будем говорить, что $(-1)^{j+i}\overline{\Delta}_i^j(A)$ — алгебраическое дополнение элемента A_i^j в матрице A.

Утверждение (доказывается прямой проверкой). *Пусть:* $N = 2, 3$; $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $i_0 = \overline{1, N}$. *Тогда:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+i_0} \overline{\Delta}^{j}_{i_0}(A) A^{j}_{i_0}.$$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.